E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Barcelona

Problemas de Resistencia de Materiales y Estructuras

Juan Miquel Canet

©Juan Miquel Canet
Problemas de Estructuras
Versión 12.01

Capítulo 1:
Análisis de tensiones

Problema 1.1. *Dado el tensor de tensiones (las unidades son MPa),*

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -120 & 75 \\ 75 & 300 \end{bmatrix}$$

determinar los planos en los cuales las tensiones tangenciales son nulas (planos principales). Hallar asimismo el valor de las tensiones normales en dichos planos (tensiones principales).

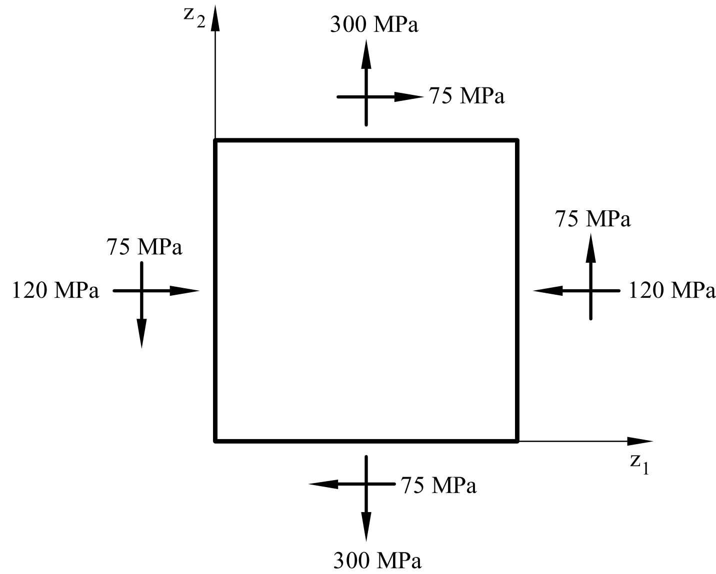


Fig. 1 Tensor de tensiones

Solución

Obsérvese la figura 2 en la cual un rectángulo elemental de dimensiones dz_1 , dz_2 se corta por un plano *AB* de cosenos directores $\mathbf{N}=[l,m]^t$ siendo $l = \cos\alpha$, $m = \sin\alpha$. Haciendo el equilibrio de fuerzas en dirección **N** y en la dirección normal a **N,** se tiene respectivamente

$$\sigma_1' \overline{AB} - \sigma_1 \overline{OB} \cos\alpha - \tau \overline{OB} \sin\alpha - \tau \overline{OA} \cos\alpha - \sigma_2 \overline{OA} \sin\alpha = 0$$

$$\tau' \overline{AB} - \sigma_1 \overline{OB} \sin\alpha - \tau \overline{OB} \cos\alpha + \tau \overline{OA} \sin\alpha - \sigma_2 \overline{OA} \cos\alpha = 0$$

es decir,

$$\sigma_1' = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha + \tau \sin 2\alpha$$

$$\tau' = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha$$

Haciendo en las anteriores ecuaciones $\tau' = 0$ se obtiene el valor del ángulo α_p correspondiente al plano principal,

$$\tan 2\alpha_p = \frac{2\tau}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{2\times 75}{-120-300} = -0{,}375$$

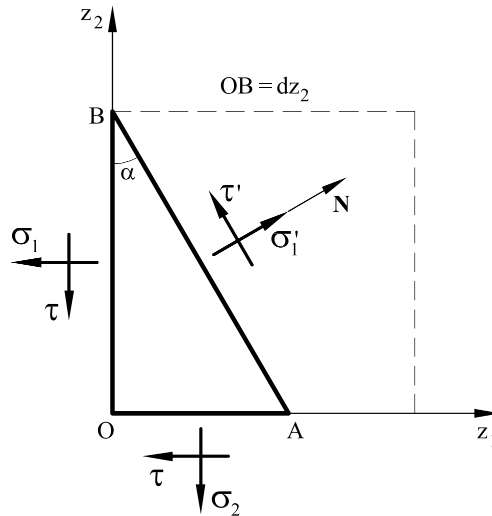


Fig. 2. Tensiones en un plano cualquiera

$$\tan 2\alpha_p = \frac{2\tau}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{2 \times 75}{-120 - 300} = -0{,}375$$

$$\alpha_{p1} = -9{,}83^{\text{o}}$$
$$\alpha_{p2} = 80{,}17^{\text{o}}$$

Por lo que respecta a las tensiones, sustituyendo en el valor de σ' se obtiene

$$\sigma_I = \sigma'(\alpha_{p1}) = \sigma'(-9{,}83) = -120\cos^2(-9{,}83) + 300\sin^2(-9{,}83) + 75\sin(-2 \times 9{,}83) = -132{,}99\,MPa$$
$$\sigma_{II} = \sigma'(\alpha_{p2}) = \sigma'(80{,}17) = -120\cos^2(80{,}17) + 300\sin^2(80{,}17) + 75\sin(2 \times 80{,}17) = 312{,}99\,MPa$$

En la figura 3 pueden verse representados los valores anteriores.

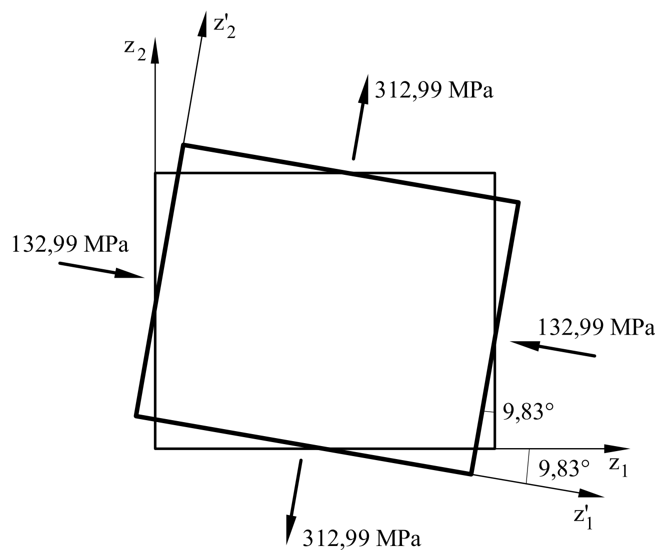


Fig. 3 Planos y tensiones principales

Problema 1.2. *En el estado de tensión plana representados en la figura 1 determinar:*

a) *Tensiones que actúan sobre el plano AB*
b) *Direcciones principales*
c) *Tensiones principales*

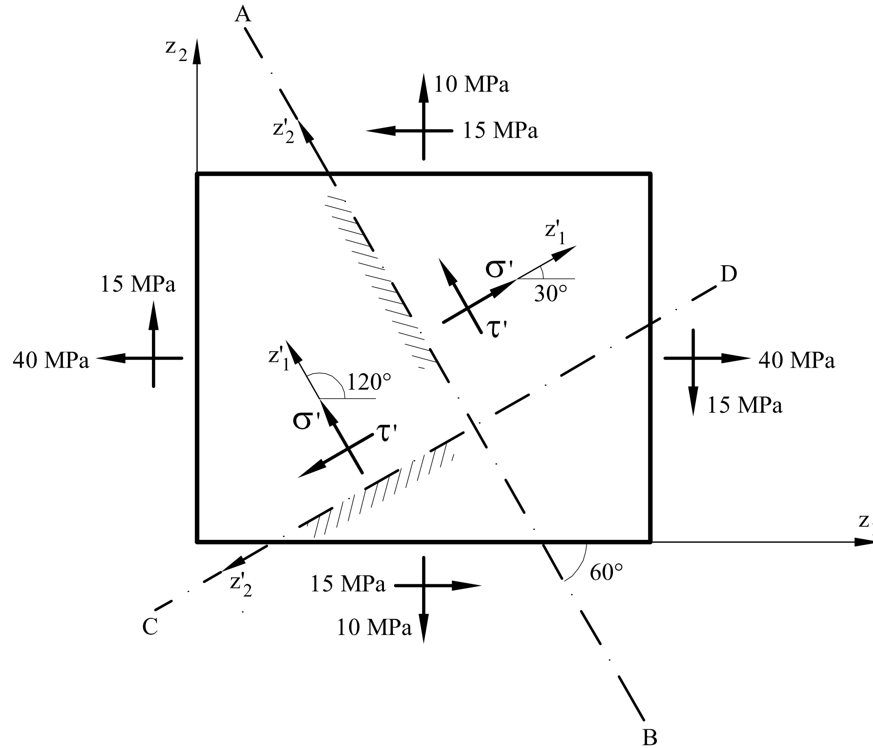


Fig. 1 Estado de tensión plano

Solución

a) Las tensiones σ' y τ' sobre el plano AB valdrán, (ver problema 1.1)

$$\sigma' = 40\cos^2 30 + 10\sin^2 30 - 15\sin(2\times 30) = 19{,}51\,MPa$$
$$\tau' = \frac{10-40}{2}\sin(2\times 30) - 15\cos(2\times 30) = -20{,}49\,MPa$$

Sobre el plano CD:

$$\sigma' = 40\cos^2 120 + 10\sin^2 120 - 15\sin(2\times 120) = 30{,}49\,MPa$$
$$\tau' = \frac{10-40}{2}\sin(2\times 120) - 15\cos(2\times 120) = 20{,}49\,MPa$$

b) A partir de los resultados obtenidos en el problema 1.1

$$\tan 2\alpha_p = \frac{-2\times 15}{40-10} = -1$$

$$\alpha_{p1} = -22{,}5^{\circ}$$
$$\alpha_{p2} = 67{,}5^{\circ}$$

c) Se obtendrán las tensiones principales

$$\sigma_I = \frac{40+10}{2} + \sqrt{\left(\frac{40-10}{2}\right)^2 + 15^2} = 46{,}21\,MPa$$
$$\sigma_{II} = \frac{40+10}{2} - \sqrt{\left(\frac{40-10}{2}\right)^2 + 15^2} = 3{,}79\,MPa$$

En la figura 2 pueden verse representados los planos y las tensiones principales.

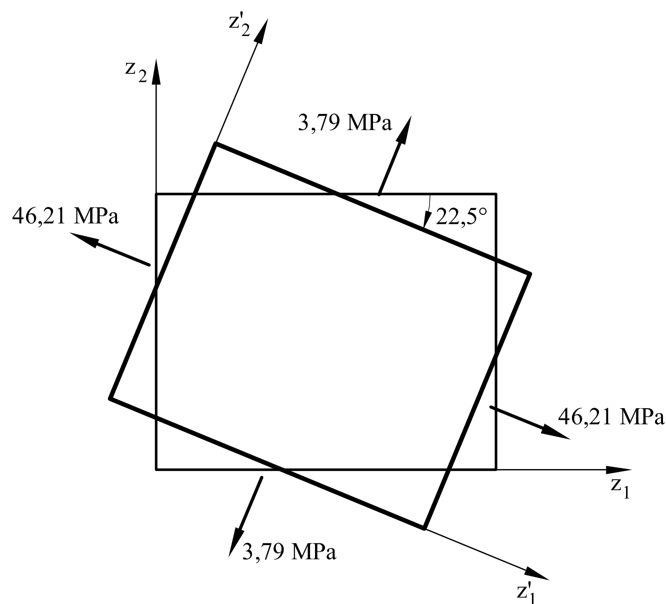


Fig. 2 Tensiones y planos principales correspondientes al problema resuelto 1.2

Problema 1.3 *Con respecto a la pieza en tensión plana que se indica en la figura.1, determinar el tensor de tensiones.*

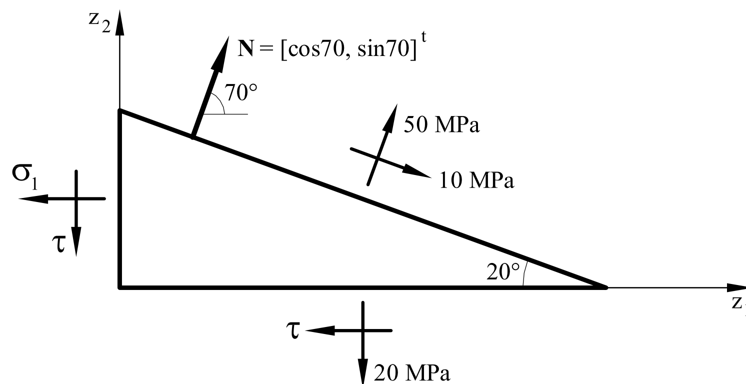


Fig.1 Pieza sometida a tensión plana correspondiente al problema resuelto 1.3

Solución

Partiendo de los resultados obtenidos en el problema 1.1

$$50 = \sigma_1 \cos^2 70 + 20 \sin^2 70 + \tau \sin(2 \times 70)$$

$$-10 = \frac{20 - \sigma_1}{2} \sin(2 \times 70) + \tau \cos(2 \times 70)$$

Resolviendo el sistema anterior,

$$\sigma_1 = -121{,}51 MPa$$
$$\tau = 72{,}43 MPa$$

El tensor de tensiones se escribirá por tanto

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} -121{,}51 & 72{,}43 \\ 72{,}43 & 20 \end{bmatrix}$$

► **Problema 1.4** *El elemento plano de la figura 1 está sometido a las tensiones que se indican. Hallar:*

-Tensiones sobre un plano cuyo vector normal forma 70º con el eje z_1.
-Tensiones principales

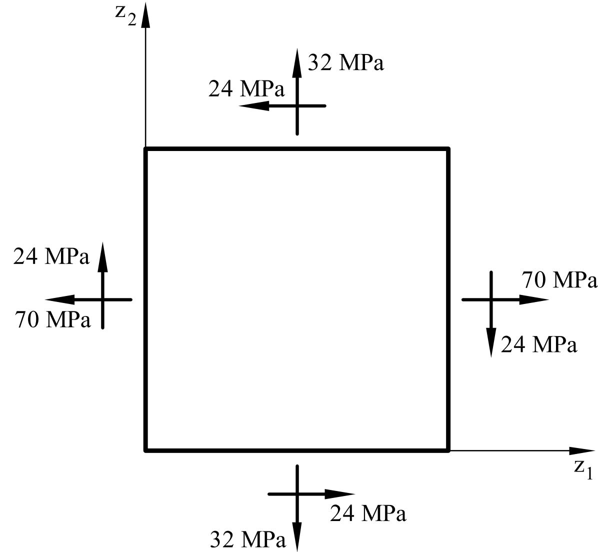


Fig.1 Tensor de tensiones

Solución

Se desea obtener la tensión normal σ' y la tensión tangencial τ' en el plano AB representado en la figura 2

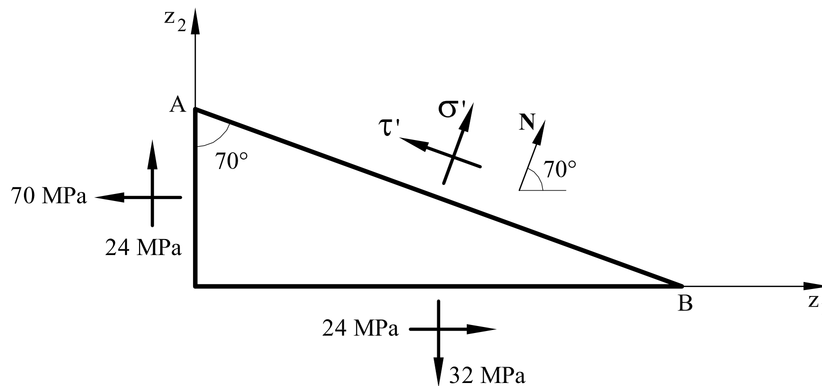


Fig 2 Tensiones en un plano inclinado AB

Por equilibrio de la laja

$$\sigma' = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha + \tau \sin 2\alpha$$
$$\sigma' = 70 \cos^2 70 + 32 \sin^2 70 - 24 \sin(2 \times 70) = 21{,}02\, MPa$$
$$\tau' = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \right) \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha$$

$$\tau' = \left(\frac{32-70}{2}\right)\sin(2\times 70) - 24\cos(2\times 70) = 6{,}17\, MPa$$

Análogamente, los planos principales se obtendrán a partir de

$$\tan 2\alpha_p = \frac{2\tau}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{-2\times 24}{70-32} = 1{,}26$$

Es decir,

$\alpha_1 = 25{,}82º$ $\alpha_2 = 115{,}82º$

y las tensiones principales

$$\sigma_I = 70\cos^2(25{,}82) + 32\sin^2(25{,}82) - 24\sin(2\times 25{,}82) = 81{,}61 MPa$$
$$\sigma_{II} = 70\cos^2(115{,}82) + 32\sin^2(115{,}82) - 24\sin(2\times 115{,}82) = 20{,}39\, MPa$$

En la figura 3 pueden verse representadas las tensiones principales

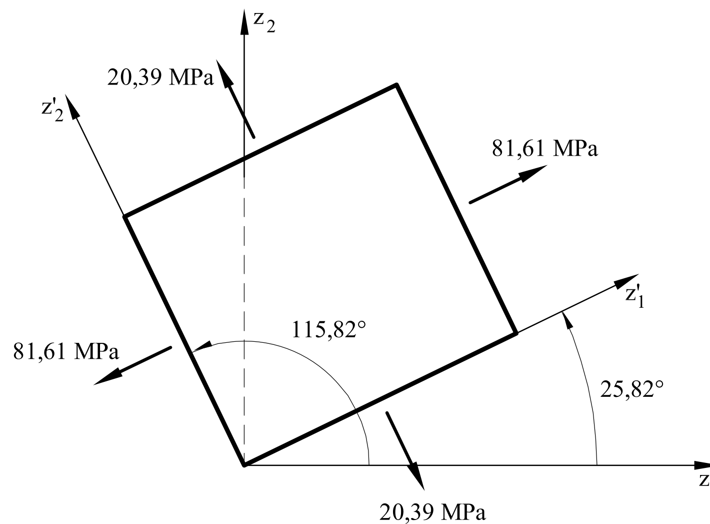


Fig. 3 Planos y tensiones principales

► **Problema 1.5** *En un determinado punto en el cual el estado de tensiones es plano, los planos principales forman un ángulo de 76,35º y 166,35º (medidos como el ángulo que forma la normal a dichos planos con el eje* z_1*), valiendo las tensiones principales 50,89 MPa y -18,89 MPa. Determinar el tensor de tensiones.*

Solución

El estado de tensiones es el representado en la figura 1

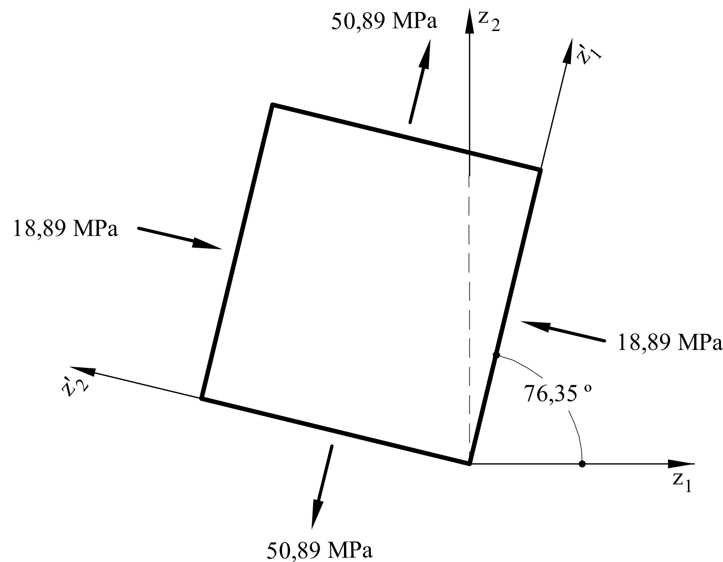


Fig.1 Planos y tensiones principales

El tensor de tensiones **T'** en los ejes principales z_1' y z_2' se escribe

$$T' = \begin{bmatrix} 50{,}89 & 0 \\ 0 & -18{,}89 \end{bmatrix}$$

El tensor **T'** puede obtenerse supuesto conocido el de tensiones **T** (referido a los ejes z_1 y z_2) mediante un cambio de base

$$\mathbf{T'} = \mathbf{P} \ \mathbf{T} \ \mathbf{P}^T$$

Siendo **P** la matriz de cambio de base

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos 76{,}35 & \sin 76{,}35 \\ -\sin 76{,}35 & \cos 76{,}35 \end{bmatrix}$$

por lo que

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}^T \ \mathbf{T'} \ \mathbf{P}$$

es decir:

$$T = \begin{bmatrix} \cos 76{,}35 & -\sin 76{,}35 \\ \sin 76{,}35 & \cos 76{,}35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50{,}89 & 0 \\ 0 & -18{,}89 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 76{,}35 & \sin 76{,}35 \\ -\sin 76{,}35 & \cos 76{,}35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 16 \\ 16 & 47 \end{bmatrix} MPa$$

En la figura 2 puede verse representado el tensor de tensiones

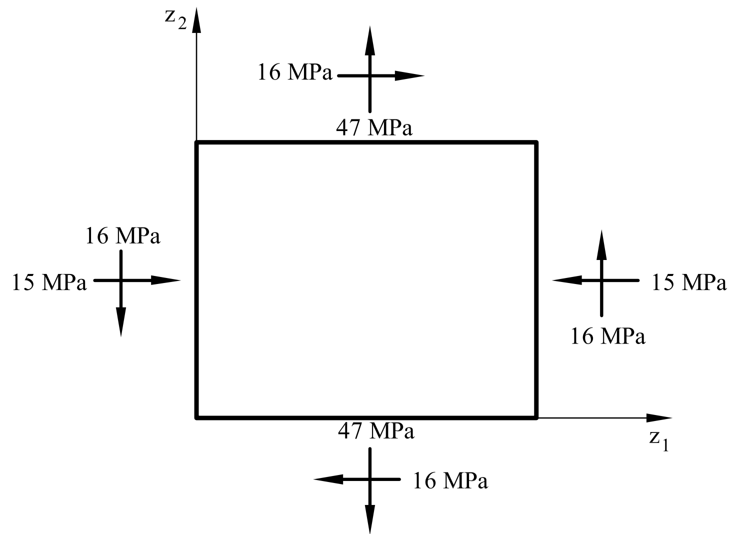


Fig.2 Tensor de tensiones

Problema 1.6 *En un determinado estado plano de tensiones, se sabe que* $\sigma_1 = 40\,MPa$ *y* $\sigma_2 = 25\,MPa$. *Sabiendo que en un plano cuya normal forma 30º con el eje* z_1 *la tensión tangencial vale -1,50 MPa, determinar el valor de la tensión tangencial* τ *del tensor de tensiones.*

Solución

El estado de tensiones puede verse representado en la figura 1

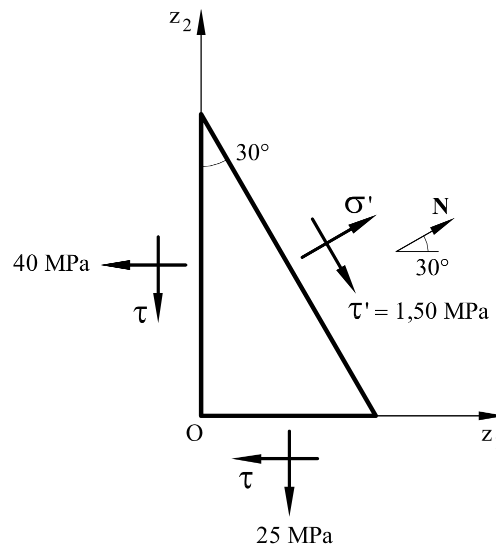


Fig. 1 Estado de tensiones

Por equilibrio de la laja se sabe que

$$\tau' = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}\sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha$$

y sustituyendo

$$-1{,}5 = \frac{25 - 40}{2}\sin(2\times 30) + \tau\cos(2\times 30)$$

Es decir:

$$\tau = 10\,MPa$$

► **Problema 1.7** *En el problema 1.4 determinar el valor de la tensión tangencial máxima, plano en el que se produce y valor de la tensión normal en este plano.*

Solución

En un plano cualquiera, las tensiones valen:

$$\sigma' = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha + \tau \sin 2\alpha$$
$$\tau' = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha$$

y derivando el valor de τ' con respecto a α e igualando a cero,

$$\frac{d\tau'}{d\alpha} = 0 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} 2 \cos 2\alpha - 2\tau \sin 2\alpha$$

Es decir:

$$\tan 2\alpha = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\tau} = \frac{32 - 70}{-2 \times 24} = 0{,}791$$

$$\alpha_1 = 19{,}18^o$$
$$\alpha_2 = 109{,}18^o$$

$$\tau'(\alpha_1) = \frac{32 - 70}{2} \sin(2 \times 19{,}18) - 24 \cos(2 \times 19{,}18) = -30{,}61 MPa$$
$$\tau'(\alpha_2) = \frac{32 - 70}{2} \sin(2 \times 109{,}18) - 24 \cos(2 \times 109{,}18) = 30{,}61 MPa$$

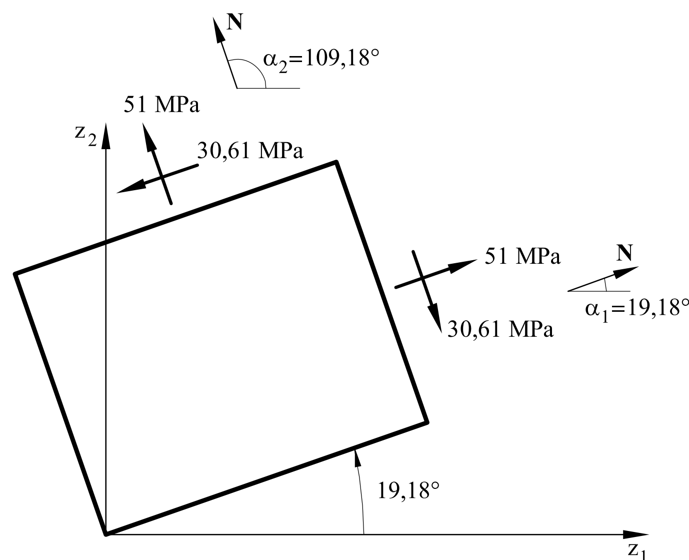


Fig. 1 Tensiones en los planos de tensión tangencial máxima

y las tensiones normales

$$\sigma'(\alpha_1) = 70\cos^2(19{,}18) + 32\sin^2(19{,}18) - 24\sin(2\times 19{,}18) = 51\,MPa$$
$$\sigma'(\alpha_2) = 70\cos^2(109{,}18) + 32\sin^2(109{,}18) - 24\sin(2\times 109{,}18) = 51\,MPa$$

En la figura 1 pueden verse representadas las anteriores tensiones en los planos dados por α_1 y α_2

Problema 1.8 *En la laja de la figura 1 se conocen las tensiones que allá se indican, determinar el tensor de tensiones así como las tensiones σ' , τ' y τ'' .*

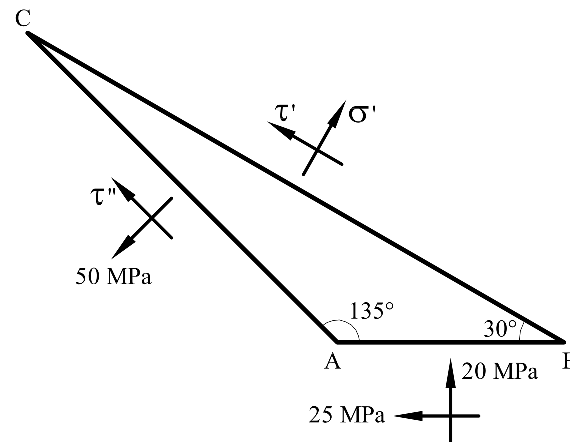


Fig.1 Tensiones en una laja

Solución

Del tensor de tensiones se conocen dos componentes

$\sigma_2 = -20\,MPa$ y $\tau = 25\,MPa$

Por otro lado, la normal al plano AC tiene por componentes

$$l = \cos 225 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$m = \sin 225 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

y como la tensión normal al plano AC vale *50 MPa* , puede escribirse

$$50 = \sigma_1 \cos^2 225 + \sigma_2 \sin^2 225 + \tau \sin(2 \times 225)$$

y sustituyendo, se obtiene

$$\sigma_1 = 70\,MPa$$

Obtenido el tensor de tensiones, los valores σ', τ' y τ'' se obtienen simplemente por equilibrio

$$\sigma' = 24{,}15\,MPa \;;\quad \tau' = -51{,}47\,MPa \;;\quad \tau'' = 45\,MPa$$

Problema 1.9 *De un determinado estado tensional plano se sabe que:*

- *Para un plano cuya normal forma un ángulo de 30º con z_1 la tensión normal vale 94,2 MPa*
- *Para un plano cuya normal forma un ángulo de 45º con z_1 la tensión normal vale 75 MPa*
- *Para un plano cuya normal forma un ángulo de 60º co z_1 la tensión normal vale 69,2 MPa*

Hallar el tensor de tensiones

Solución

Los planos que se indican pueden verse representados en las figuras 1 a) b) y c)

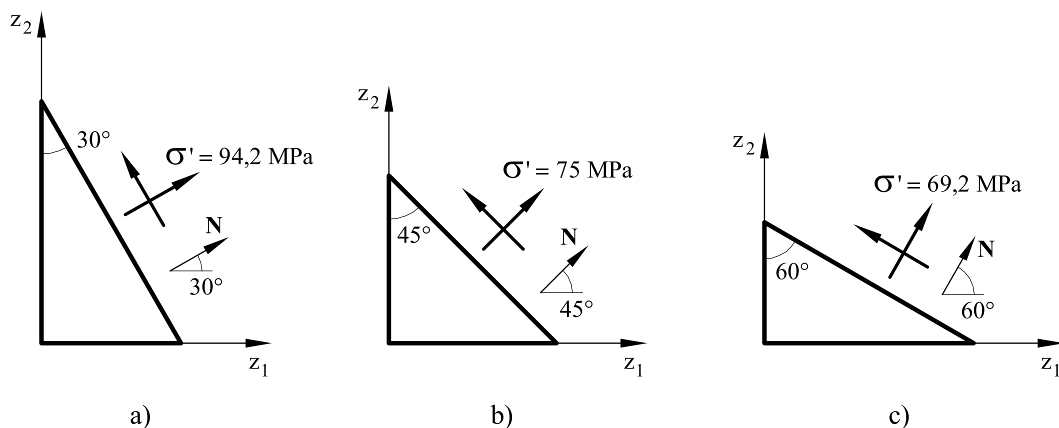


Fig. 1 Tensiones en diferentes planos

Si se conocen los valores del tensor de tensiones σ_1 , σ_2 y τ las tensiones en un plano cualquiera valen (ver ejercicios anteriores)

$$\sigma' = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha + \tau \sin 2\alpha$$

y sustituyendo para $\alpha = 30^{\rm o}$, $\alpha = 45^{\rm o}$, y $\alpha = 60^{\rm o}$

$$94{,}2 = \sigma_1 \cos^2 30 + \sigma_2 \sin^2 30 + \tau \sin 60$$
$$75 = \sigma_1 \cos^2 45 + \sigma_2 \sin^2 45 + \tau \sin 90$$
$$69{,}2 = \sigma_1 \cos^2 60 + \sigma_2 \sin^2 60 + \tau \sin 120$$

con lo que

$$\sigma_1 = 150\,MPa \quad , \quad \sigma_2 = 100\,MPa \quad , \quad \tau = -50\,MPa$$

Capítulo 2:
Leyes de esfuerzos

Problema 2.1 *Determinar las reacciones y leyes de esfuerzos de la ménsula de la figura 1*

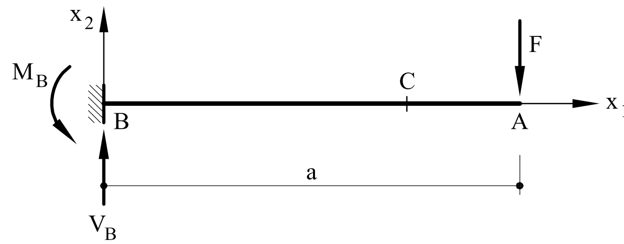


Fig. 1 Pieza recta correspondiente al problema 2.1

Solución

Las reacciones valdrán $V_B = F$; $M_B = aF$.
Para determinar las leyes de esfuerzos, se corta idealmente la estructura por un punto arbitrario *C* de abcisa x_1 (Fig. 2). La fuerza resultante será vertical e igual al cortante, mientras que el momento de las fuerzas situadas a la derecha de *C* valdrá $M_f = F(a - x_1)$. Las leyes de esfuerzos serán por tanto

$$Q = -F$$
$$M_f = -F(a - x_1)$$

Dichas leyes pueden verse representadas en las figuras 3.a) y 3.b), respectivamente.

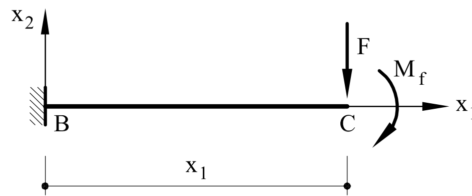


Fig. 2 Corte por C en la estructura de la figura.1

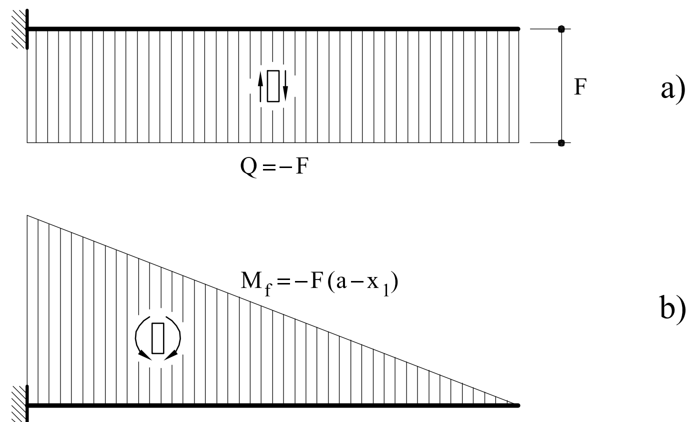


Fig. 3 Leyes de esfuerzos. a) Esfuerzos cortantes b) Momentos flectores

Problema 2.2 *Determinar las leyes de esfuerzos en la pieza de la figura 1*

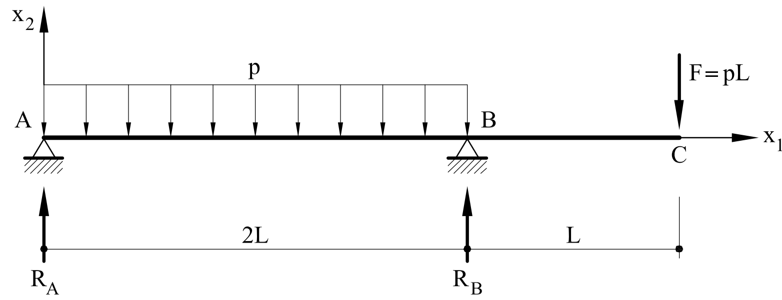


Fig .1 Viga biapoyada del problema 2.2

Solución

Por equilibrio, se obtienen los valores de las reacciones en *A* y *B*

$$R_A = 0{,}5\ pL$$
$$R_B = 2{,}5\ pL$$

Cortando idealmente la pieza por un punto situado entre *B* y *C*, y de coordenada x_1 los esfuerzos valdrán

$$M_f\Big|_B^C = -(3L - x_1)\,p\,L$$
$$Q\Big|_B^C = -p\,L$$
$$N\Big|_B^C = 0$$

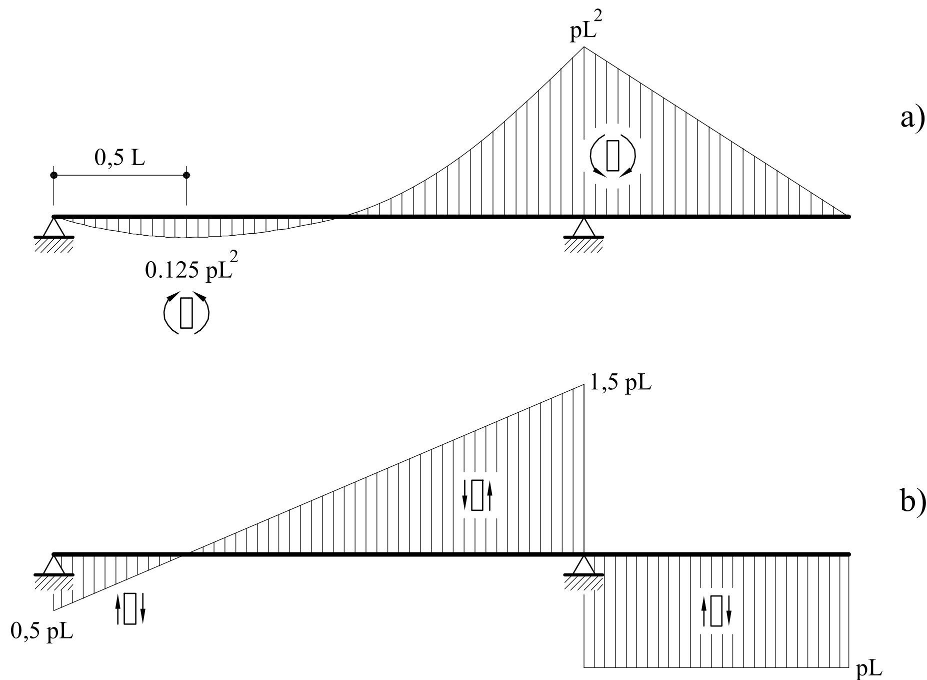


Fig. 2 Leyes de esfuerzos. a) Momento flector. b) Esfuerzo cortante.

Cortando nuevamente la pieza por cualquier punto entre *A* y *B* y de coordenada x_1 se obtiene

$$M_f\Big|_A^B = -(3L - x_1)\,p\,L - \frac{(2L - x_1)^2}{2}\,p + (2L - x_1)R_B = -p\,\frac{x_1^2}{2} + 0{,}5\,p\,x_1\,L$$

$$Q\Big|_A^B = -pL + R_B - p(2L - x_1) = -0{,}5\,pL + px_1$$

$$N\Big|_A^B = 0$$

Problema 2.3 *En la viga de la figura 1 hallar las reacciones y dibujar las leyes de momentos flectores y de esfuerzos cortantes*

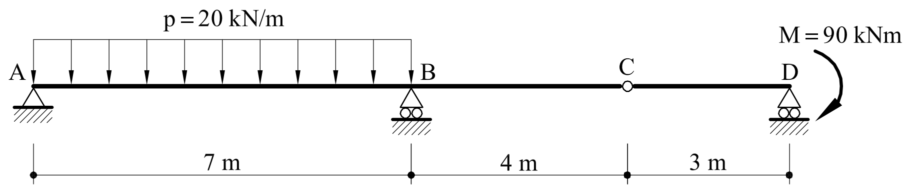


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 2.3

Solución

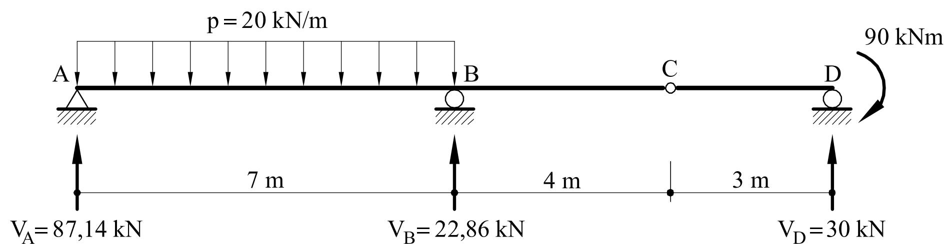


Fig. 2 Reacciones

Reacciones:

Dado que el momento flector en *C* es nulo,

$$(M_f)_C = 0 \quad \Rightarrow \quad 3V_D = 90 \quad \Rightarrow \quad V_D = 30 \; kN$$

Por otro lado, tomando momentos en *A*:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -20 \times \frac{7^2}{2} + 7V_B + 14V_D - 90 = 0$$

La suma de fuerzas verticales debe ser nula,

$$V_B = 22{,}86 \; kN$$

$$\sum F_V = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = 20 \times 7 - 22{,}86 - 30 = 87{,}14 \; kN$$

Con los valores anteriores pueden dibujarse las leyes de esfuerzos

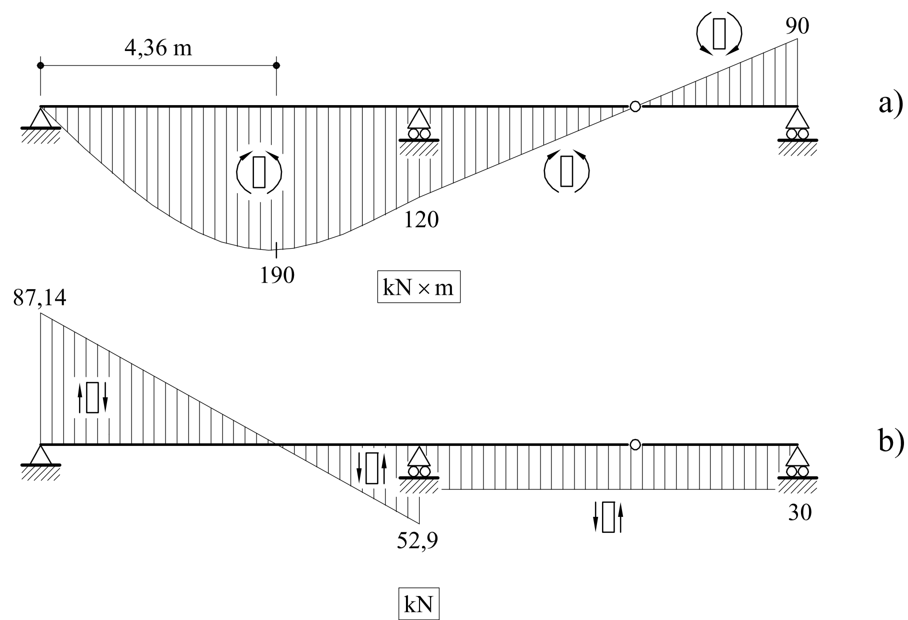


Fig . 3 Leyes de esfuerzos correspondientes al problema 2.3
a) Ley de momentos flectores. b) Ley de cortantes

Problema 2.4 *Determinar y dibujar las leyes de esfuerzos en la viga que se representa en la figura 1*

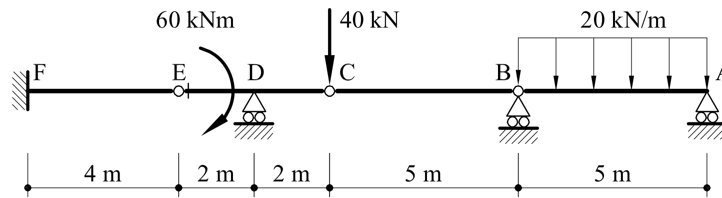


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 2.4

Solución

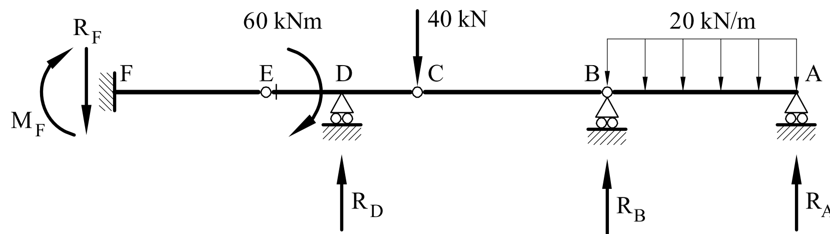


Fig. 2 Reacciones

Teniendo en cuenta que los momentos flectores en C y B son nulos, se obtienen las reacciones en A y en B.

$$(M_f)_B = 0 \qquad -20\times 5\times\frac{5}{2} + R_A\times 5 = 0 \quad\Rightarrow\quad R_A = 50\ kN$$

Por otro lado, tomando momentos en C

$$(M_f)_C = 0 \qquad R_B\times 5 + R_A\times 10 - 20\times 5\times 7{,}5 = 0 \quad\Rightarrow\quad R_B = 50\ kN$$

Por equilibrio de fuerzas verticales se obtiene el valor del cortante en C.

$$Q_C + 50 + 50 - 20\times 5 - 40 = 0 \qquad\rightarrow\qquad Q_C = 40\ kN$$

Del mismo modo, tomando momentos en E, se hallan las reacciones R_D , R_F y M_F.

$$(M_f)_E = 0 \qquad\Rightarrow\qquad -60 + R_D\times 2 - 40\times 4 = 0 \qquad\Rightarrow\qquad R_D = 110\ kN$$

$$-R_F + R_D - Q_C = 0 \qquad\Rightarrow\qquad R_F = 70\ kN$$

$$(M_f)_E = 0 \qquad\Rightarrow\qquad -70\times 4 + M_F = 0 \qquad\rightarrow\qquad M_F = 280\ kN$$

Con los valores anteriores pueden dibujarse las leyes de esfuerzos (figuras 3 y 4)

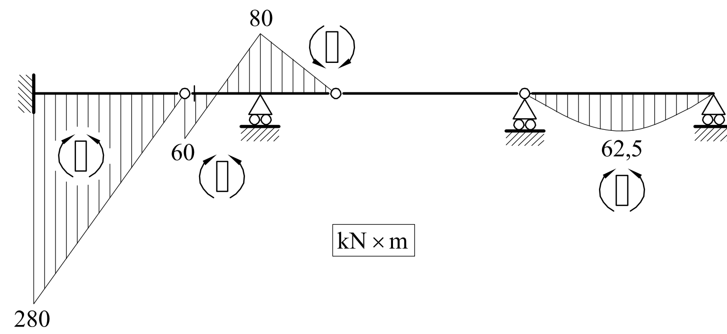


Fig. 3 Leyes de momentos flectores

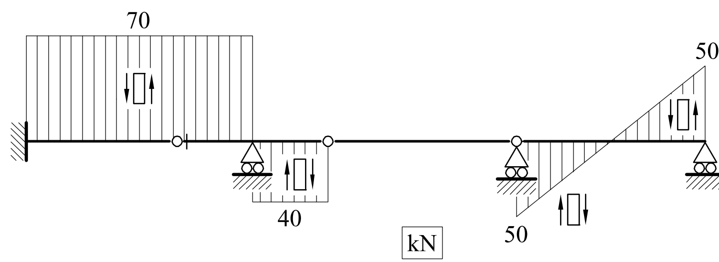


Fig. 4 Esfuerzos cortantes

Problema 2.5 *En la viga de la figura 1, hallar las reacciones y dibujar las leyes de momentos flectores y de esfuerzos cortantes.*

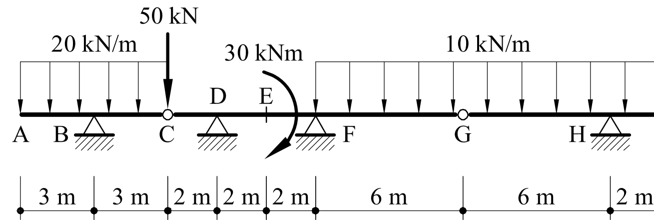


Fig. 1 Viga correspondiente al problema resuelto 2.5

Solución

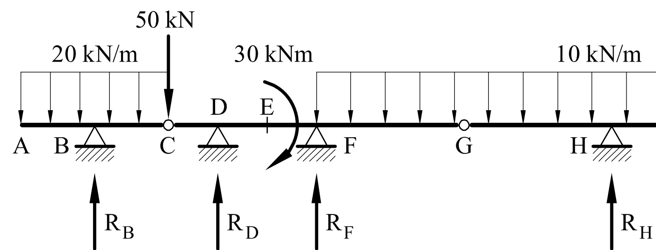


Fig. 2 Reacciones

Dado que el momento flector en G es nulo:

$$\left(M_f\right)_G = 0 \qquad -10\times 8\times 4 + R_H \times 6 = 0 \qquad \rightarrow \qquad R_H = 53{,}33\ kN$$

Por equilibrio de fuerzas, se calcula el valor del cortante en G : Q_G = 26,66 kN

Tomando momentos en C:

$$\left(M_f\right)_C = 0 \qquad R_D \times 2 - 30 + R_F \times 6 - 10\times 6\times 9 - Q_G \times 12 = 0$$

$$R_B \times 3 - 20\times 6\times 3 = 0$$

$$R_B = 120\ kN$$

La suma de fuerzas verticales debe ser nula,

$$\sum F_v = 0 \qquad -20\times 6 + R_B - 50 + R_D + R_F - 10\times 14 + R_H = 0$$

$$R_F = 154{,}166\ kN$$

$$R_D = -17{,}5\ kN$$

Con los valores anteriores pueden dibujarse las leyes de esfuerzos

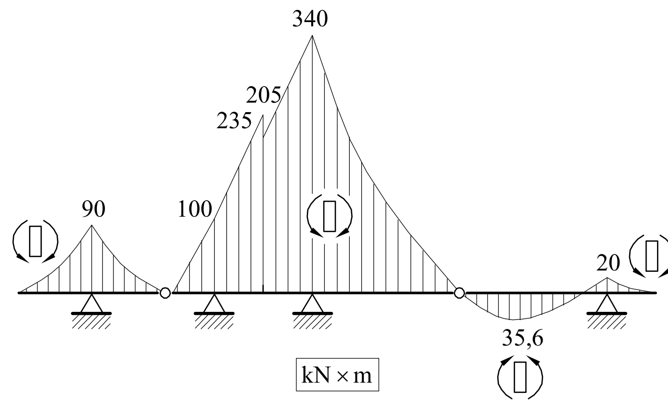


Fig. 3 Ley de momentos flectores

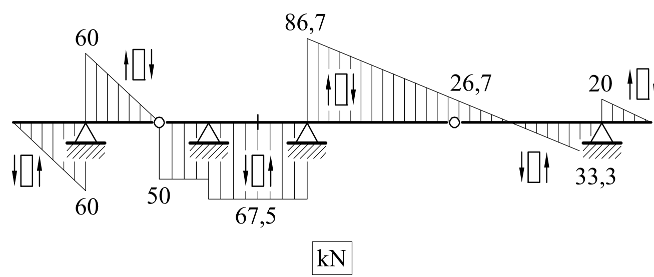


Fig. 4 Ley de cortantes

Problema 2.6 *Determinar las leyes de esfuerzos y las reacciones en la viga de la figura 1*

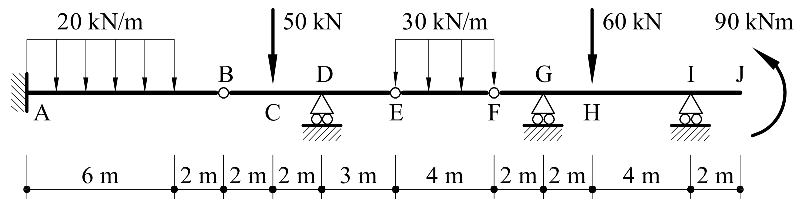


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 2.6

Solución

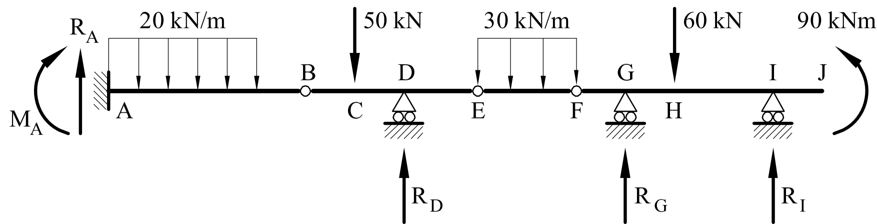


Fig. 2 Reacciones

Teniendo en cuenta que los momentos flectores en E y F son nulos, se obtienen las reacciones R_G y R_I.
Del mismo modo, tomando el momento en B igual a cero, se obtiene la reacción en D y a partir del equilibrio global se obtiene la reacción en A y el momento M_A. Es decir,

$R_I = -15\ kN$
$R_G = 135\ kN$
$R_D = 130\ kN$
$R_A = 100\ kN$
$M_A = -200\ kNm$

En las figuras 3 y 4 pueden verse dibujadas las leyes de momentos flectores y de esfuerzos cortantes.

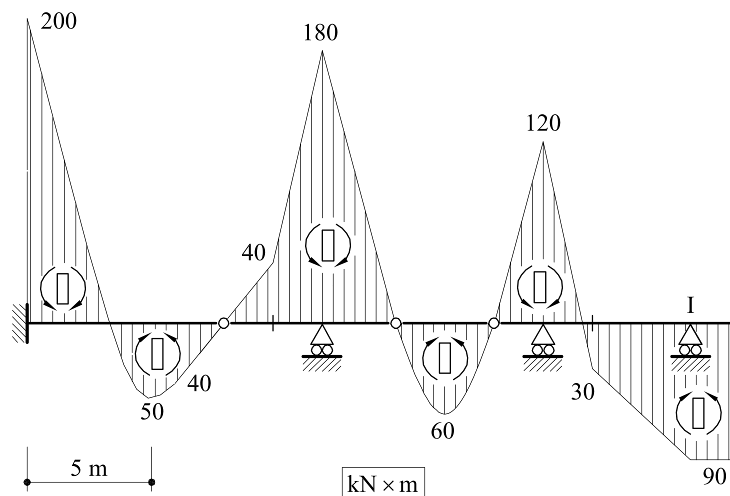


Fig. 3 Ley de momentos flectores

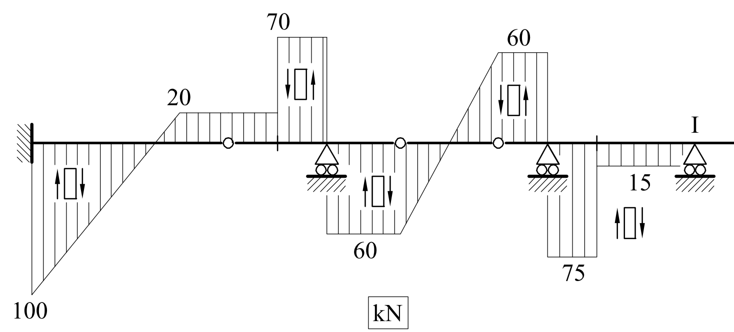


Fig. 4 Esfuerzos cortantes

Problema 2.7 *En la estructura que se acota en la figura 1, hallar:*

- *Ley de momentos flectores*
- *Ley de esfuerzos cortantes*
- *Reacciones en A y D*

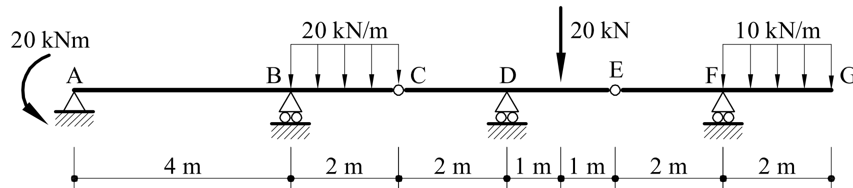


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 2.7

Solución

Teniendo en cuenta que los momentos flectores en *C* y *E* son nulos, se obtienen las reacciones en *D* y *F*. Las reacciones en *A* y *B* se obtienen a partir del equilibrio global de la estructura. En la figura 2 pueden verse dibujadas las reacciones.

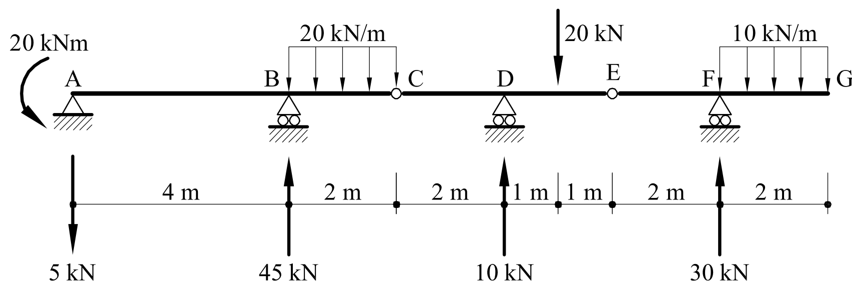


Fig. 2 Reacciones

En la figura 3 pueden verse dibujadas las leyes de momentos flectores y las de esfuerzos cortantes.

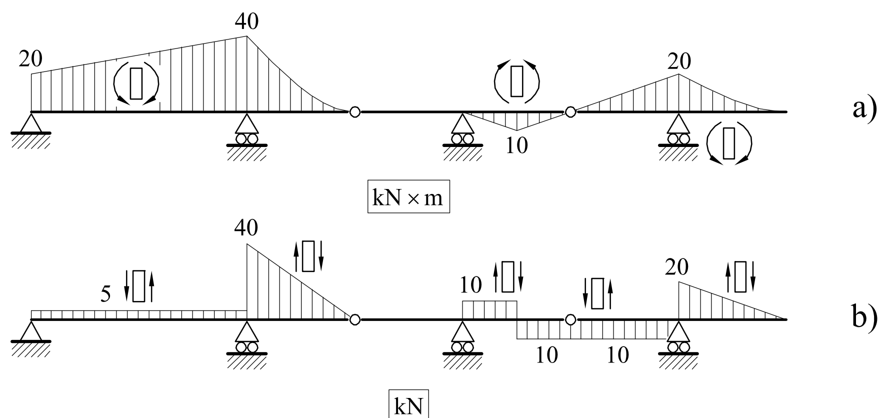


Fig. 3 Leyes de esfuerzos: a) Ley de momentos flectores b) Ley de cortantes

Problema 2.8 *En la estructura que se acota en la figura, hallar y dibujar las reacciones y las leyes de esfuerzos.*

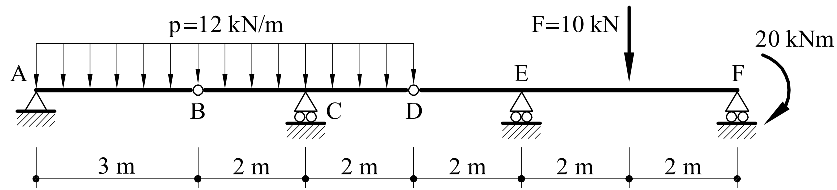


Fig. 1 Viga correspondiente al ejercicio 2.8

Solución

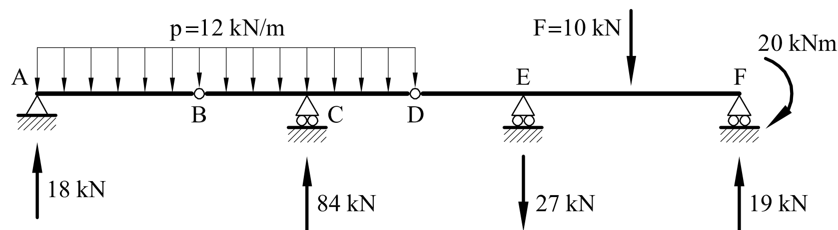


Fig. 2 Reacciones

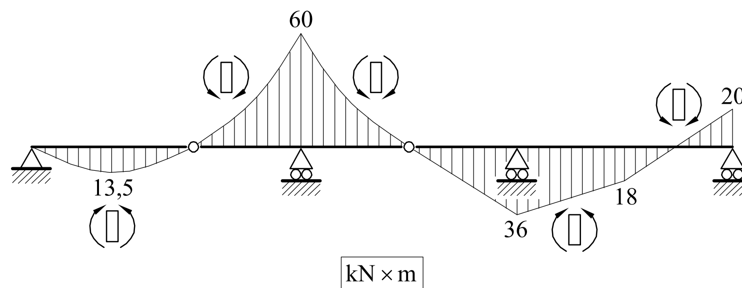


Fig. 3 Ley de momentos flectores

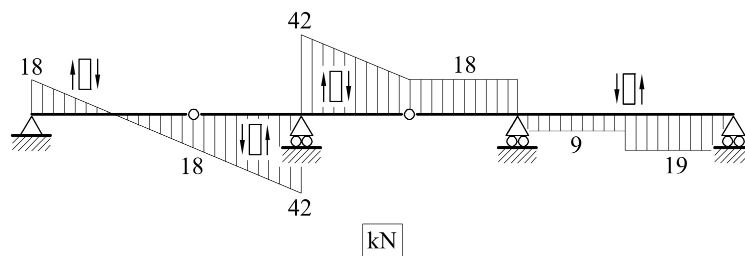


Fig. 4 Ley de esfuerzos cortantes

Problema 2.9 *En la estructura que se acota en la figura 1, hallar:*

1. *Ley de momentos flectores entre* C *y* G
2. *Ley de esfuerzos cortantes entre* C *y* G
3. *Reacciones en* A *y* D

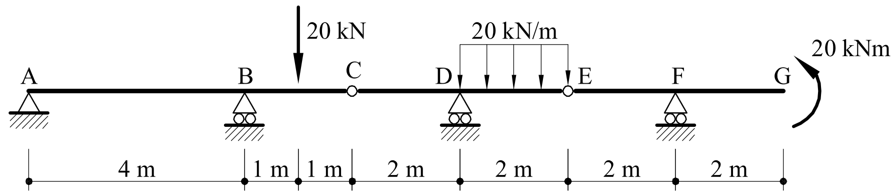


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 2.9

Solución

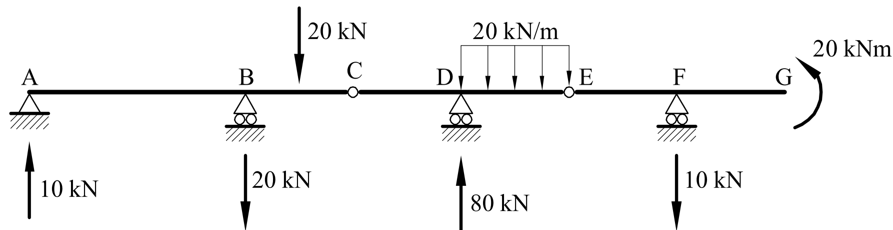


Fig. 2 Reacciones

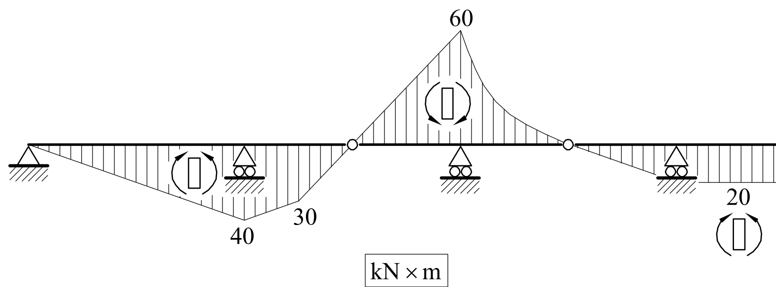


Fig. 3 Ley de momentos flectores

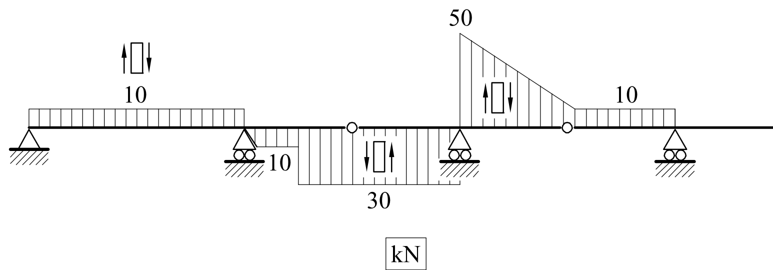


Fig. 4 Ley de esfuerzos cortantes

Problema 2.10 *En la estructura que se acota en la figura 1, hallar y dibujar:*

1. *Reacciones*
2. *Ley de momentos flectores*
3. *Ley de esfuerzos cortantes*

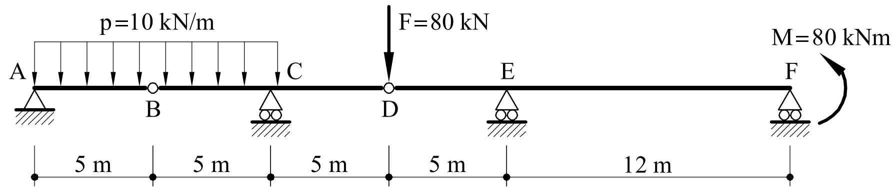


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 2.10

Solución

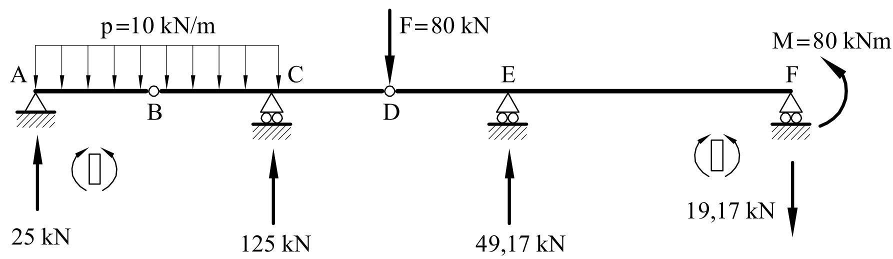


Fig. 2 Reacciones

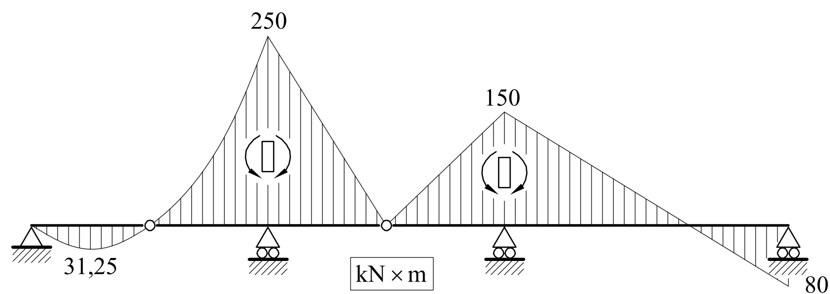


Fig. 3 Ley de momentos flectores (unidades kNm)

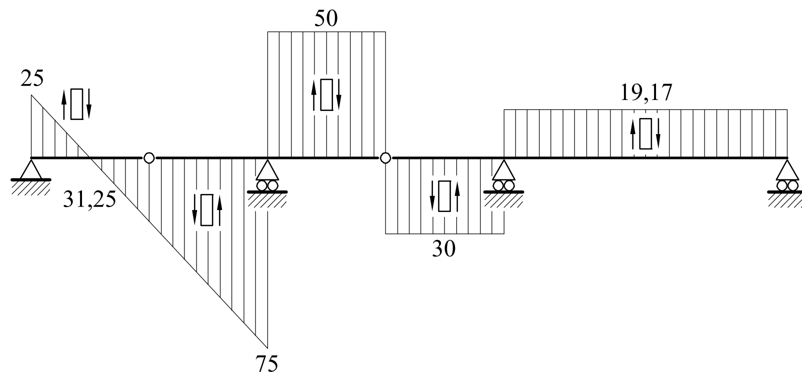


Fig. 4 Ley de esfuerzos cortantes (unidades kN)

Problema 2.11 *Determinar las leyes de esfuerzos de la estructura de la figura 1*

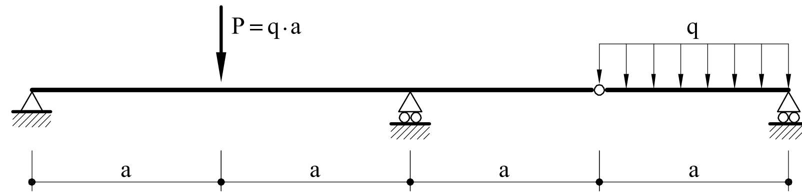


Fig. 1 Viga correspondiente al problema resuelto 2.11

Solución

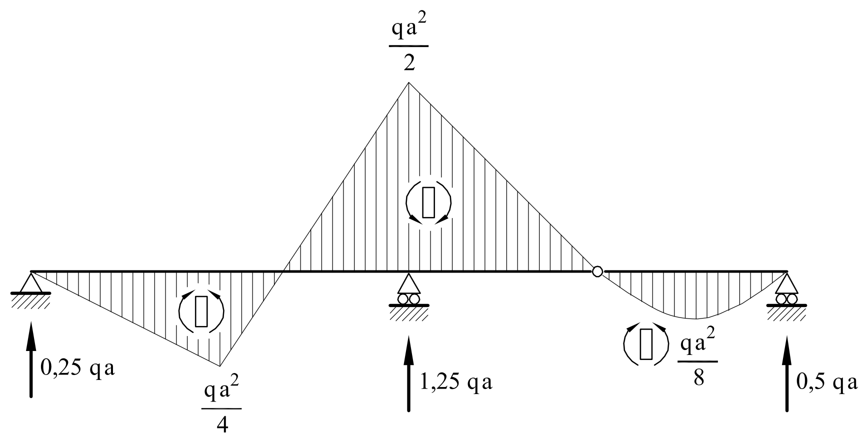


Fig. 2 Reacciones y ley de momentos flectores

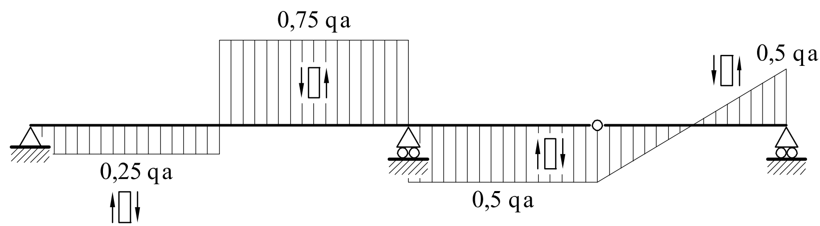


Fig 3 Ley de esfuerzos cortantes

Problema 2.12 *Hallar las leyes de esfuerzos en la viga de la figura 1*

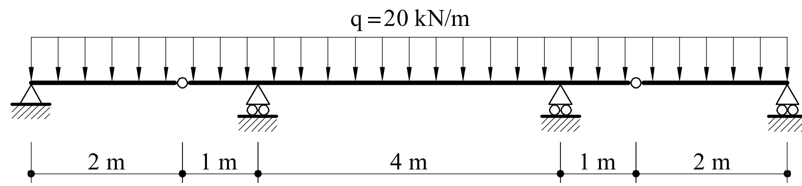


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 2.12

Solución

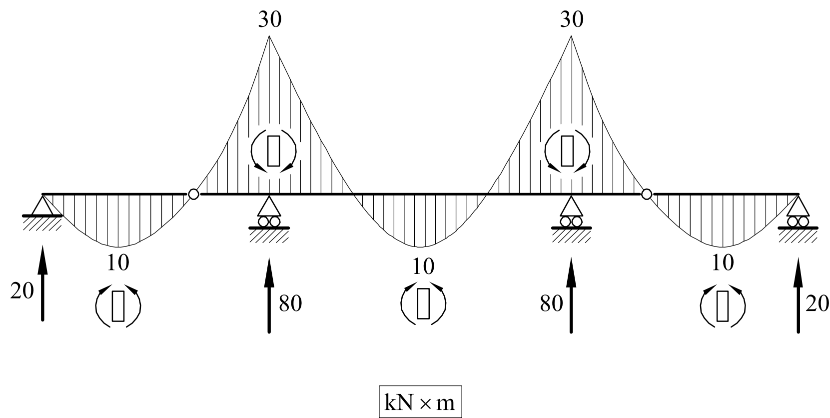


Fig. 2 Ley de momentos flectores

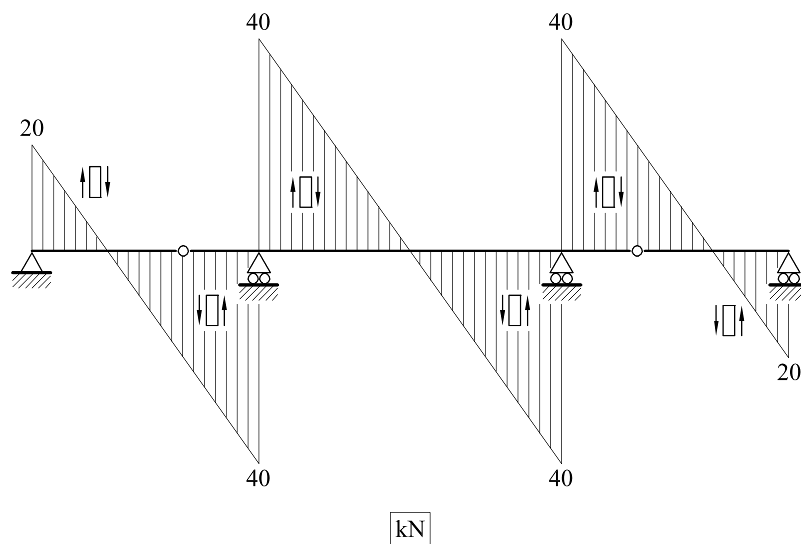


Fig. 3 Ley de esfuerzos cortantes

Problema 2.13 *Hallar las leyes de esfuerzos y las reacciones en la viga de la figura 1.*

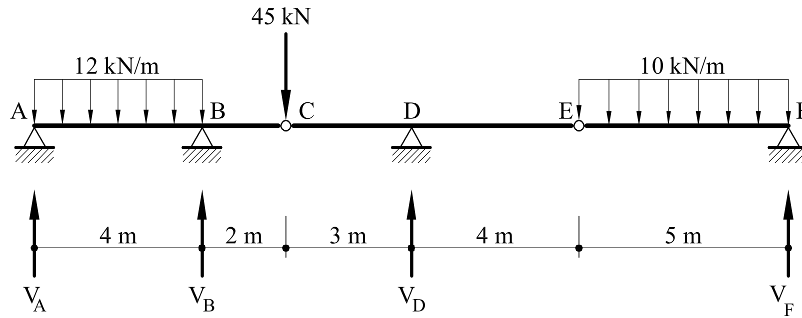


Fig. 1. Viga correspondiente al problema 2.13

Solución

La reacción en *F* vale

$$V_F = 25\,kN$$

Para hallar la reacción en *D* se toman momentos en *C* : $\left(M_f\right)_c = 0$

$$25\times(3+4+5)-10\times5\times(2{,}5+4+3)+V_D\times3=0$$

$$V_D = 58{,}33\,kN$$

Se determinan asimismo las reacciones en *A* y *B*

$V_A = 18{,}17\,kN$ $\qquad V_B = 41{,}45\,kN$

En las figuras 2 y 3 se dibujan las leyes de momentos flectores y de esfuerzos cortantes.

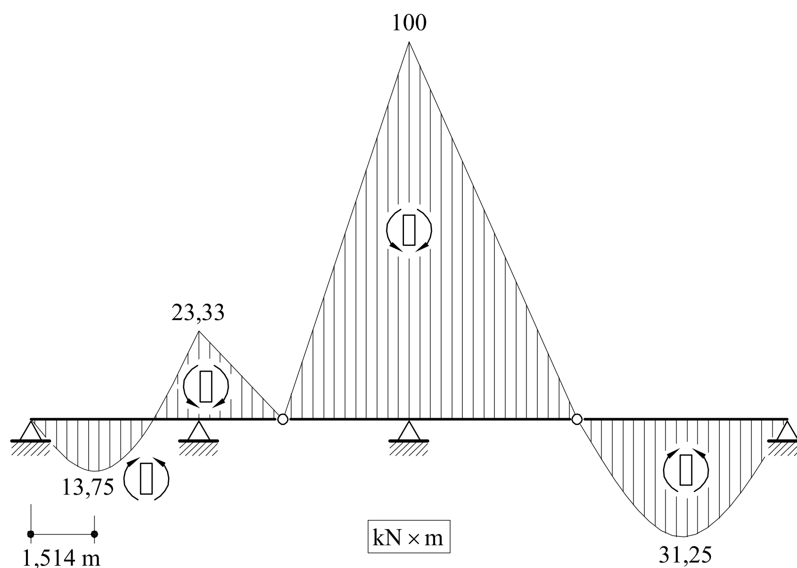


Fig.2. Ley de momentos flectores

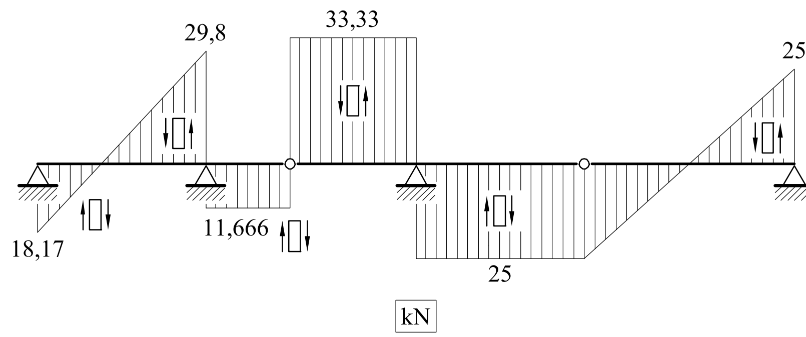


Fig. 3. Ley de esfuerzos cortantes.

Problema 2.14 *Hallar las reacciones y dibujar las leyes de esfuerzos en la estructura de la figura 1.*

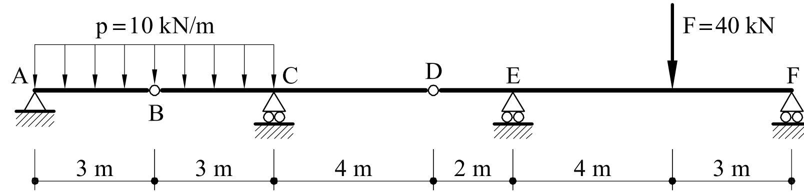


Fig.1 Viga correspondiente al problema 2.14

Solución

En las figuras 2, 3 y 4 pueden verse representadas las reacciones y las leyes de esfuerzos.

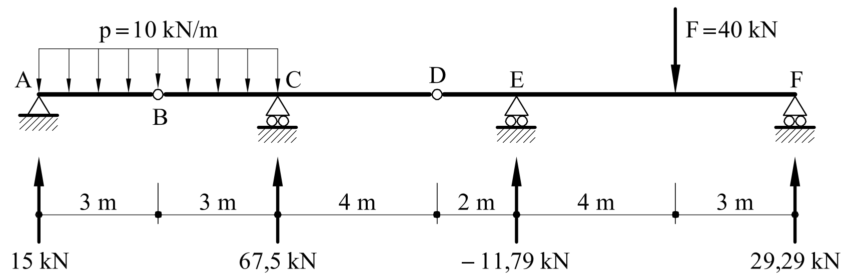


Fig.2 Reacciones

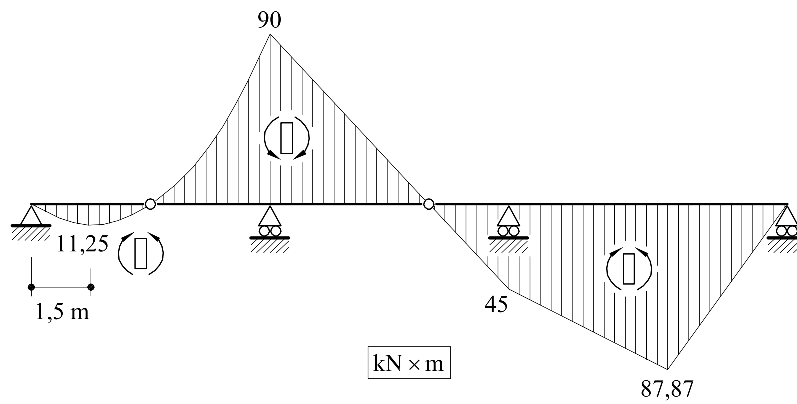


Fig.3 Ley de momentos flectores

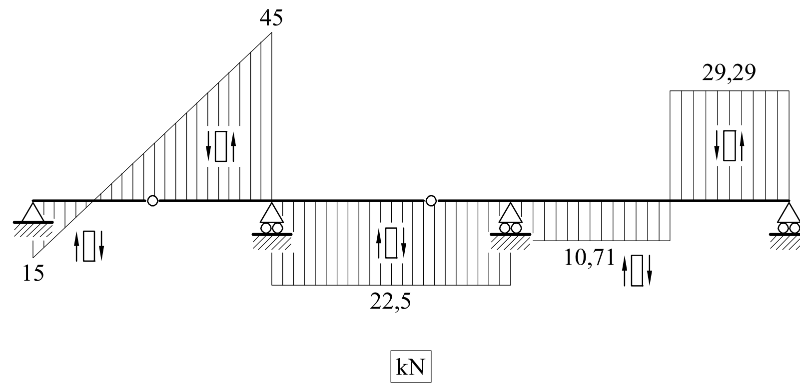


Fig.4 Ley de esfuerzos cortantes

Problema 2.15 *En la viga de la figura 1, determinar las reacciones en los apoyos así como dibujar las leyes de momentos flectores y esfuerzos cortantes.*

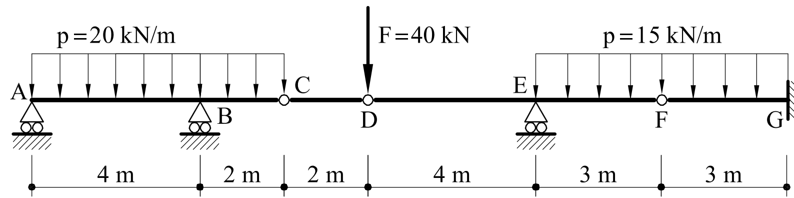


Fig.1 Viga correspondiente al problema 2.15

Solución

En las figuras 2, 3 y 4 pueden verse representadas las reacciones y las leyes de esfuerzos.

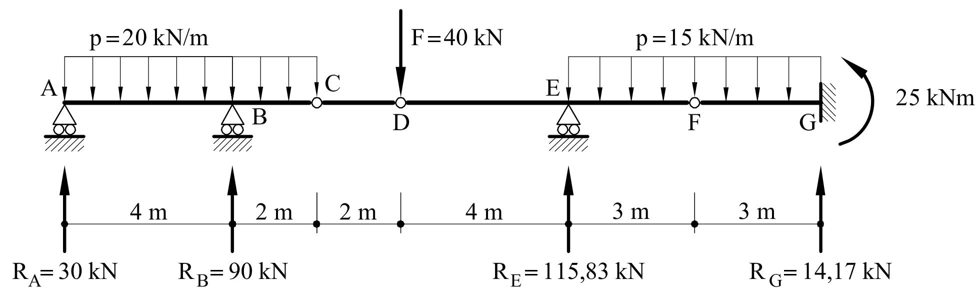


Fig.2 Reacciones

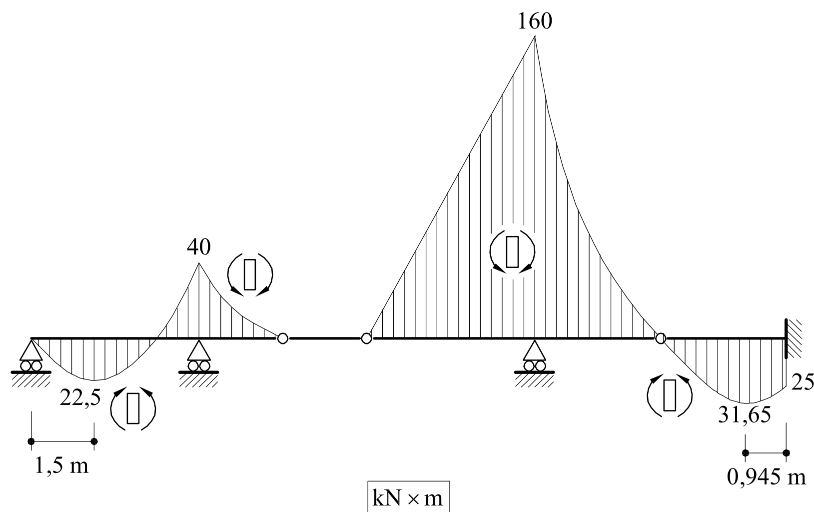


Fig.3 Ley de momentos flectores

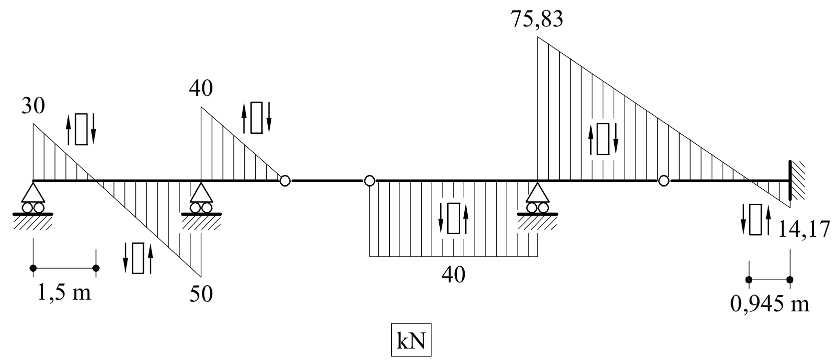


Fig.4 Ley de cortantes

Problema 2.16 *En la viga de la figura 1, determinar las reacciones en los apoyos así como dibujar las leyes de momentos flectores y esfuerzos cortantes.*

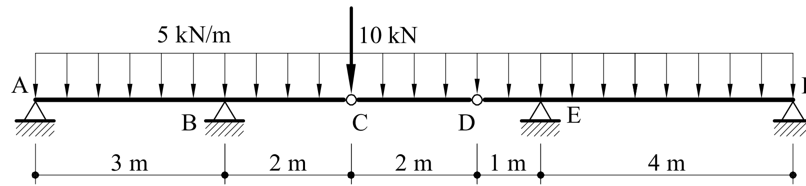


Fig.1 Viga correspondiente al problema 2.16

Solución

En las figuras 2, 3 y 4 pueden verse dibujadas, respectivamente, las reacciones, leyes de momentos flectores y leyes de esfuerzos cortantes.

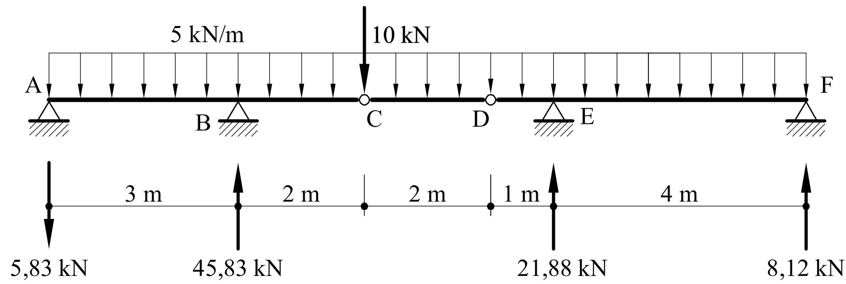


Fig.2 Reacciones

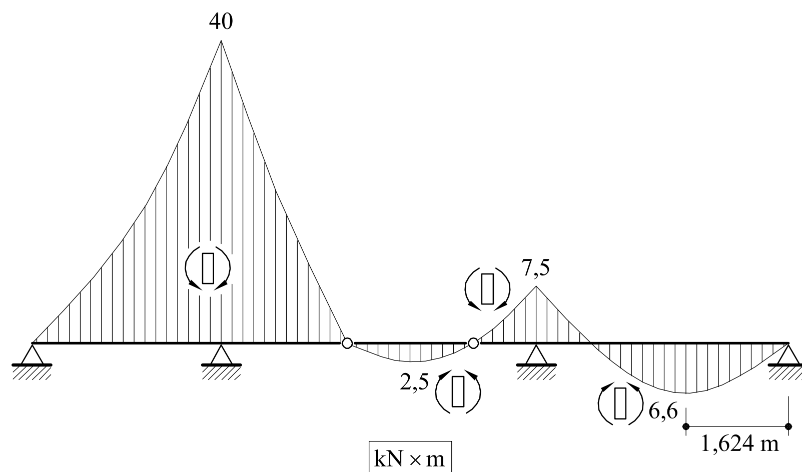


Fig.3 Ley de momentos flectores

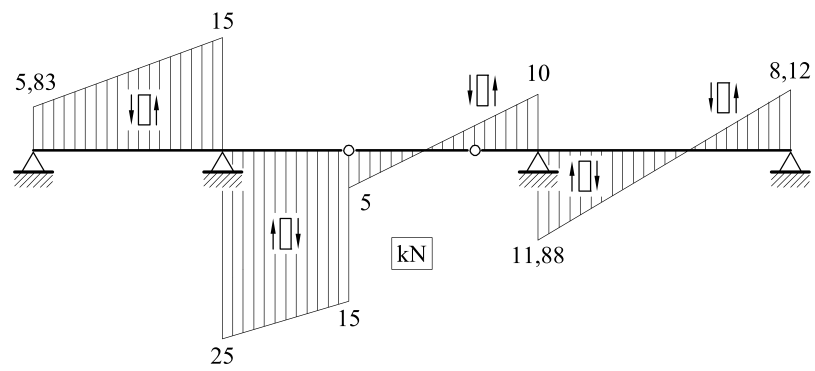


Fig.4 Ley de esfuerzos cortantes

Problema 2.17 *En la viga continua que se esquematiza en la figura 1, determinar las reacciones y las leyes de esfuerzos.*

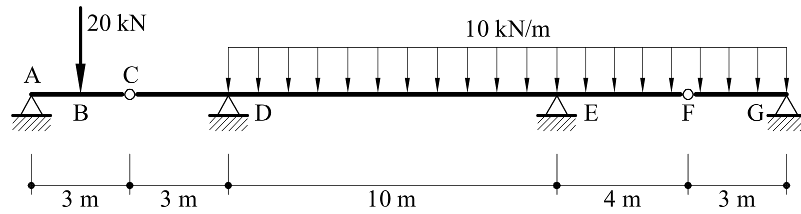


Fig.1 Viga continua correspondiente al problema 2.17

Solución

Las reacciones en A, D, E y G se obtendrán a partir de las ecuaciones de equilibrio global, y del hecho de imponer momento flector nulo en las rótulas C y F:

$$\left(M_{fc}\right) = 0 = 1{,}5 \times 20 - R_A \times 3$$

$$\left(M_{fF}\right) = 0 = -\frac{10 \times 3^2}{2} + 3R_G$$

$$M_D = 0 = -6R_A + 4{,}5 \times 20 + 17R_G + 10R_E - \frac{10 \times 17^2}{2}$$

$$\sum V = 0 = -20 - 10 \times 17 + R_A + R_D + R_E + R_G$$

De las anteriores ecuaciones se obtienen las reacciones en los apoyos:

$R_A = 10\,kN$; $R_D = 49\,kN$; $R_E = 116\,kN$; $R_G = 15\,kN$

A partir de estos valores es posible determinar las leyes de esfuerzos.

En la figura 2 puede verse representada la ley de momentos flectores, y en la 3 la ley de cortantes.

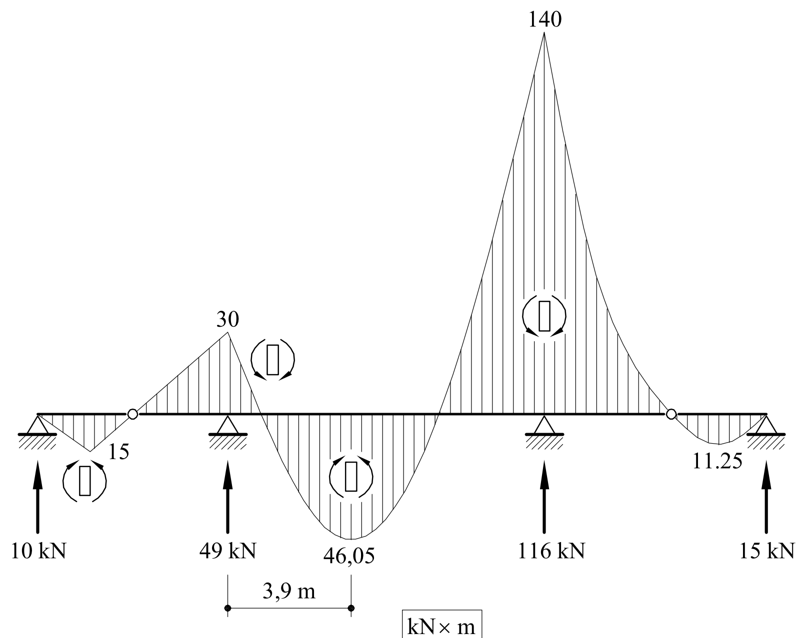


Fig.2 Reacciones y ley de momentos flectores

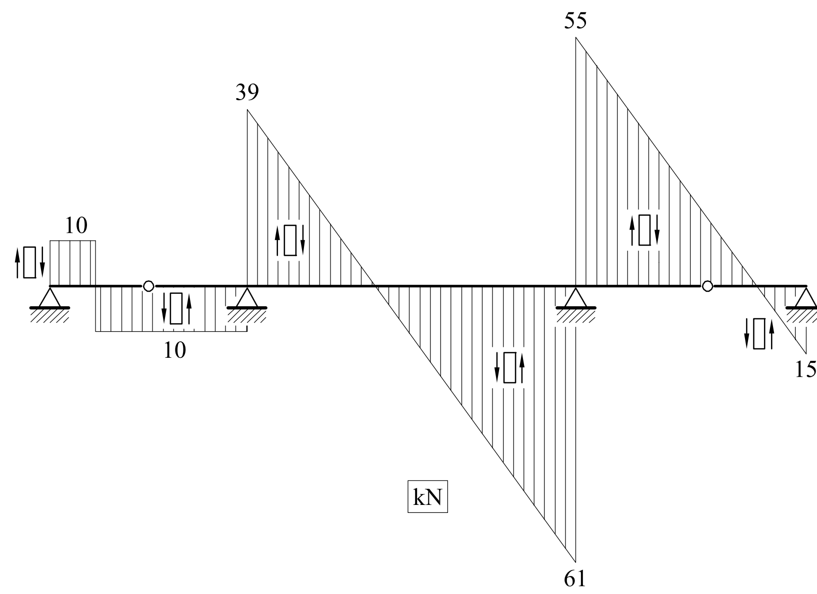


Fig.3 Ley de esfuerzos cortantes

Problema 2.18 *En la viga continua de la figura 1 dibujar:*

- *Ley de momentos flectores*
- *Ley de esfuerzos cortantes*
- *Reacciones*

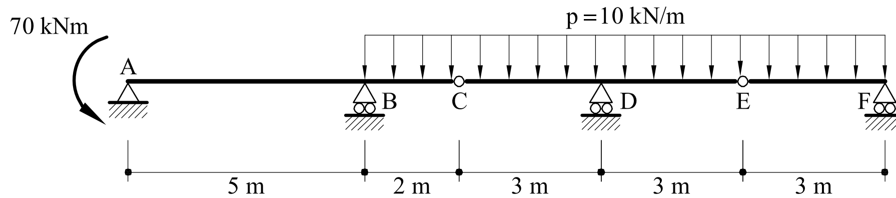


Fig.1 Viga continua correspondiente al problema 2.18

Solución

- La reacción en F vale $R_F = 15\,kN$
- $M_{fc} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3R_D + 15 \times 9 - 10 \times \dfrac{9^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_D = 90\,kN$
- El cortante en C vale $Q_c = 15\,kN$ (ver figura 2)

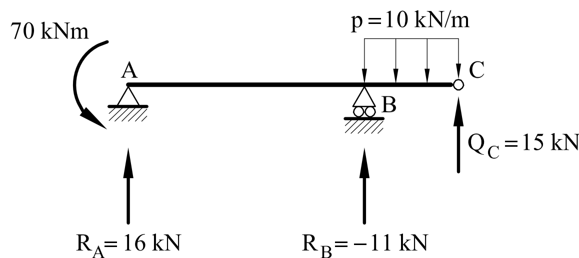


Fig.2 Esquema estático de ABC

- La reacción en B vale: $5R_B + 15 \times 7 + 70 - 20 \times 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = -11\,kN$
- La reacción en A vale: $R_A + R_B + 15 - 10 \times 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = 16\,kN$

En la figura 3 pueden verse representadas las reacciones

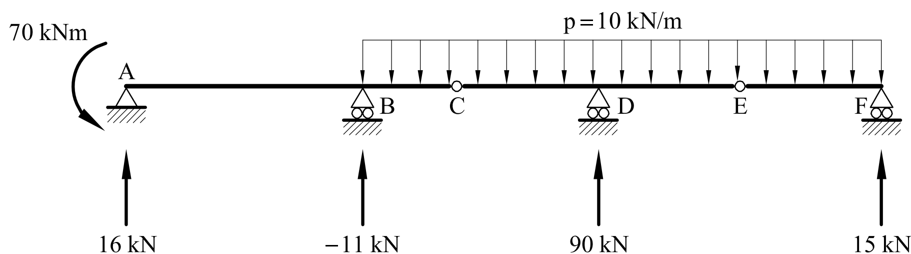


Fig.3 Reacciones

En las figuras 4 y 5 están dibujadas las leyes de momentos flectores y de esfuerzos cortantes

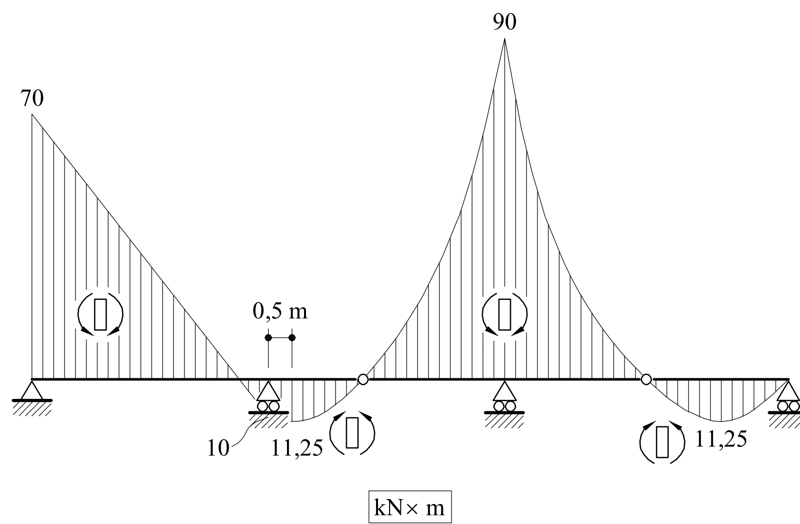


Fig.4 Ley de momentos flectores

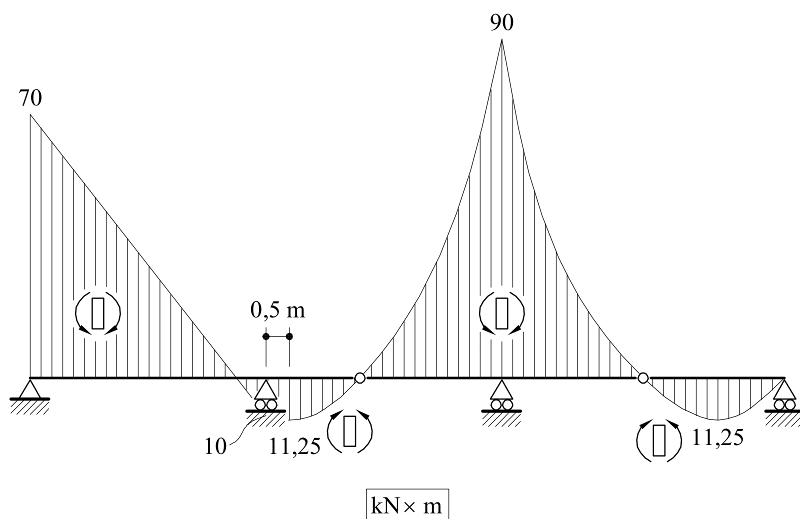


Fig.5 Ley de esfuerzos cortantes

Problema 2.19 *Determinar las leyes de esfuerzos del pórtico de la figura 1*

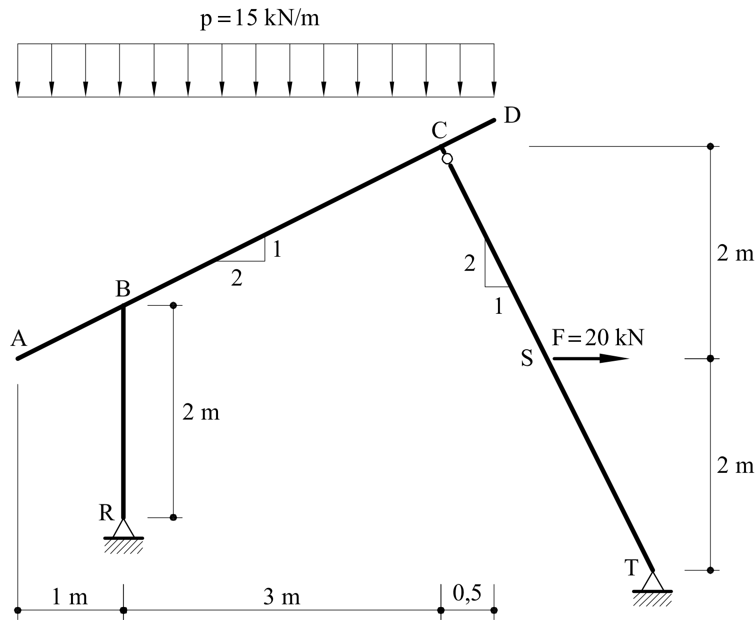


Fig. 1 Pórtico isostático correspondiente al problema 2.19

Solución

En la figura 2 pueden verse dibujadas las reacciones, así como los ejes locales de cada barra. Las tres ecuaciones de equilibrio se escriben:

- Suma de momentos respecto al punto R: $\sum M_R = 0$

$$-67{,}5 \times 1{,}25 - 20 \times 1{,}5 + V_T 5 - H_T 0{,}5 = 0$$

es decir

$$10\, V_T - H_T = 228{,}75$$

- Suma de fuerzas verticales: $\sum F_V = 0$

$$V_R + V_T = 67{,}5$$

- Suma de fuerzas horizontales: $\sum F_H = 0$

$$H_R + H_T = 20$$

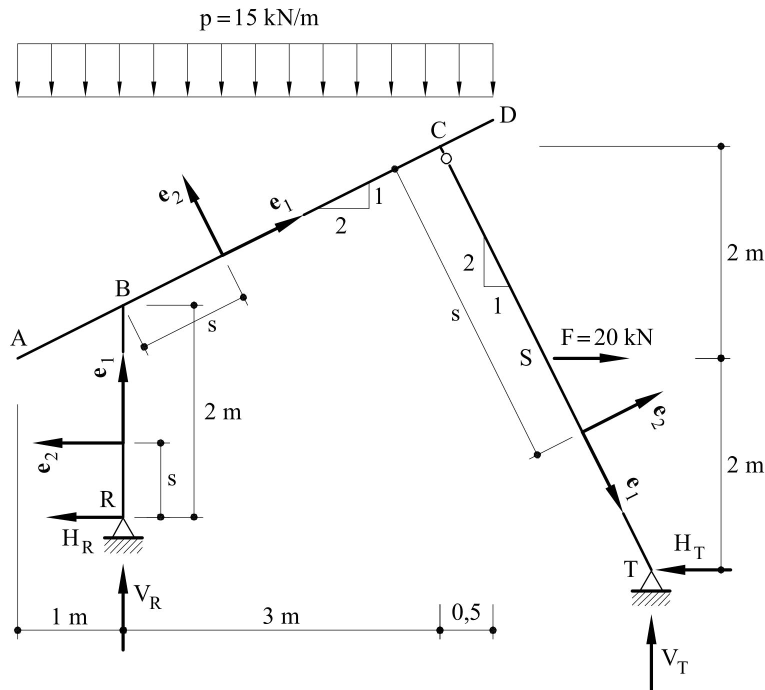


Fig. 2 Reacciones y ejes locales

La rótula en C proporciona una nueva ecuación: Suma de momentos respecto al punto C de todas las fuerzas y reacciones que hay en CT

$$2V_T - 4H_T + 2 \times 20 = 0$$
$$V_T - 2H_T = -20$$

Las expresiones anteriores proporcionan un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Resolviéndolo:

$$V_T = 25{,}13\ kN$$

$$H_T = 22{,}57\ kN$$

$$V_R = 42{,}37\ kN$$

$$H_R = -2{,}57\ kN$$

A partir de estos valores es posible obtener las leyes de esfuerzos.
a) Momentos flectores

$$M_f\Big|_S^T = -40 + 8{,}94\,s\ kNm$$
$$M_f\Big|_C^S = -8{,}94\,s\ kNm$$
$$M_f\Big|_A^B = -6\,s^2\ kNm$$
$$M_f\Big|_B^C = 23{,}3\,s - 12{,}64 - 6\,s^2\ kNm$$
$$M_f\Big|_C^D = -1{,}88 + 6{,}71\,s - 6\,s^2\ kNm$$

$$M_f\Big|_R^B = -2{,}57\,s\ kNm$$

b) Esfuerzos cortantes

$$Q\Big|_S^T = -8{,}94 \quad kN$$

$$Q\Big|_C^S = 8{,}94 \quad kN$$

$$Q\Big|_A^B = 12\,s \quad kN$$

$$Q\Big|_B^C = 12\,s - 23{,}3 \quad kN$$

$$Q\Big|_C^D = -6{,}7 + 12\,s \quad kN$$

$$Q\Big|_R^B = 2{,}57 \quad kN$$

c) Esfuerzos axiles

$$N\Big|_S^T = -32{,}6 \quad kN$$

$$N\Big|_C^S = -23{,}65 \quad kN$$

$$N\Big|_A^B = 6\,s \quad kN$$

$$N\Big|_B^C = 14{,}54 + 6\,s \quad kN$$

$$N\Big|_C^D = -3{,}3 + 6\,s \quad kN$$

$$N\Big|_R^B = -42{,}37 \quad kN$$

En las figuras 3 , 4 y 5 pueden verse representadas las leyes anteriores.

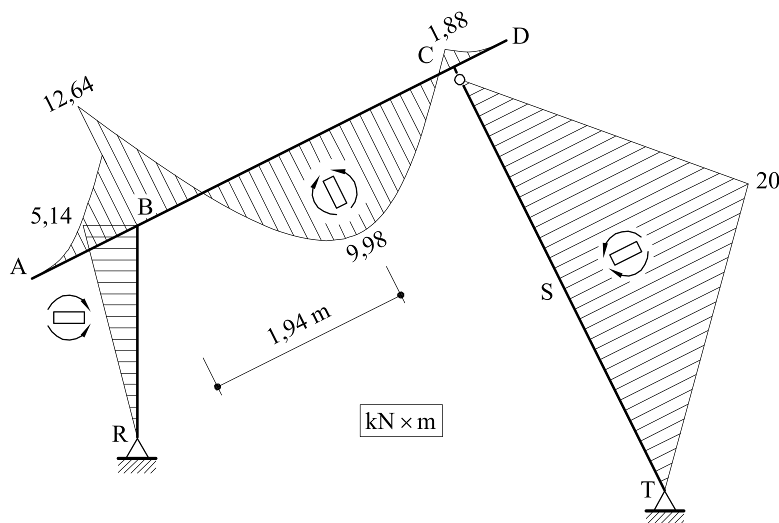


Fig. 3 Leyes de momentos flectores

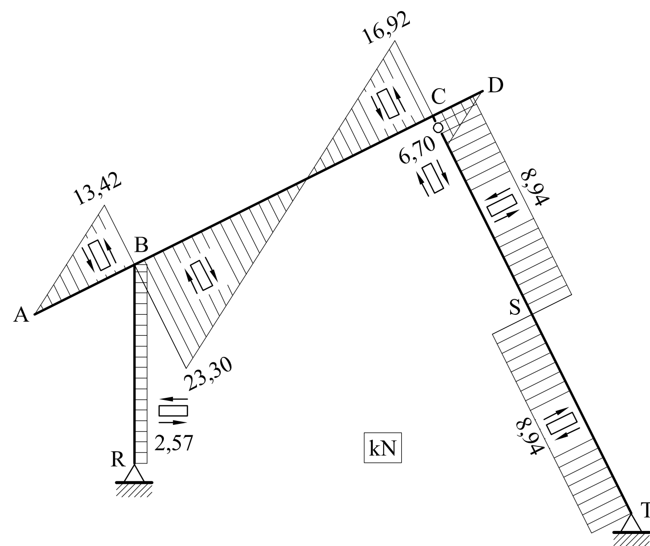


Fig. 4 Leyes de esfuerzos cortantes

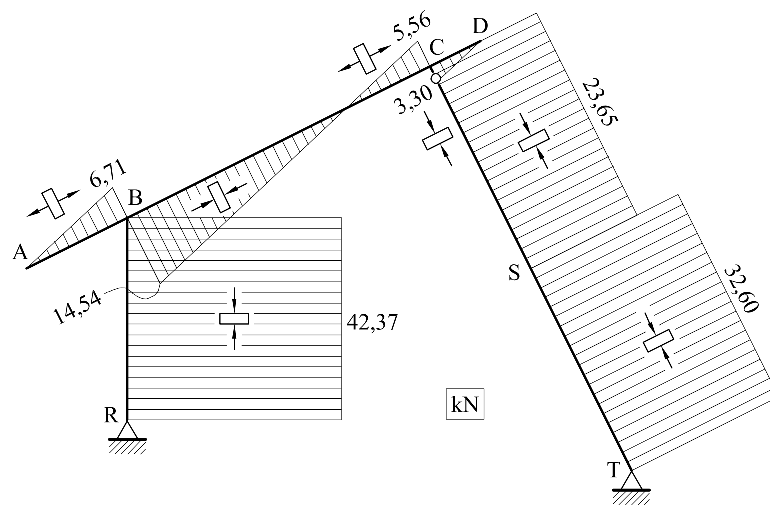


Fig. 5 Leyes de esfuerzos axiles

Problema 2.20 *Determinar las reacciones y leyes de esfuerzos en todos los puntos de la estructura de la figura 1*

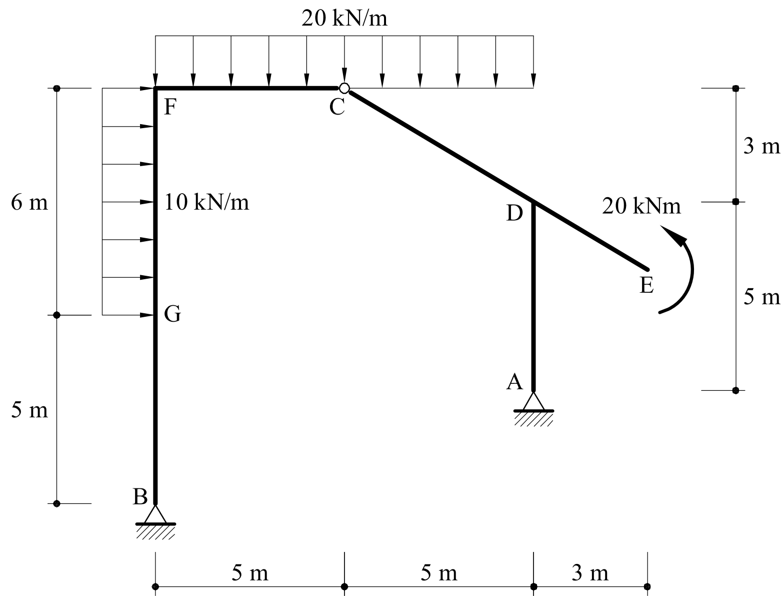


Fig. 1 Pórtico isostático correspondiente al problema resuelto 2.20

Solución

En la figura 2 pueden verse dibujadas las reacciones, así como los ejes locales de las barras. Teniendo en cuenta que los momentos flectores en B y C son nulos, se obtienen las reacciones en A.

$$\sum M_B = 0 \qquad H_A \times 3 + 10\, V_A + 20 - 10 \times 20 \times 5 - 10 \times 6 \times 8 = 0$$

$$\sum M_C = 0 \qquad 5\, V_A - 8 H_A + 20 - 20 \times 5 \times \frac{5}{2} = 0$$

es decir:

$$10\, V_A + 3\, H_A = 1\,460$$
$$5\, V_A - 8\, H_A = 230$$

Las expresiones anteriores proporcionan un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, del cual se obtiene:

$$V_A = 130{,}2\ kN$$
$$H_A = 52{,}63\ kN$$

Con estos valores es posible obtener el valor de las reacciones en B utilizando las ecuaciones del equilibrio global

$$V_B = 69{,}79\ kN$$
$$H_B = 7{,}37\ kN$$

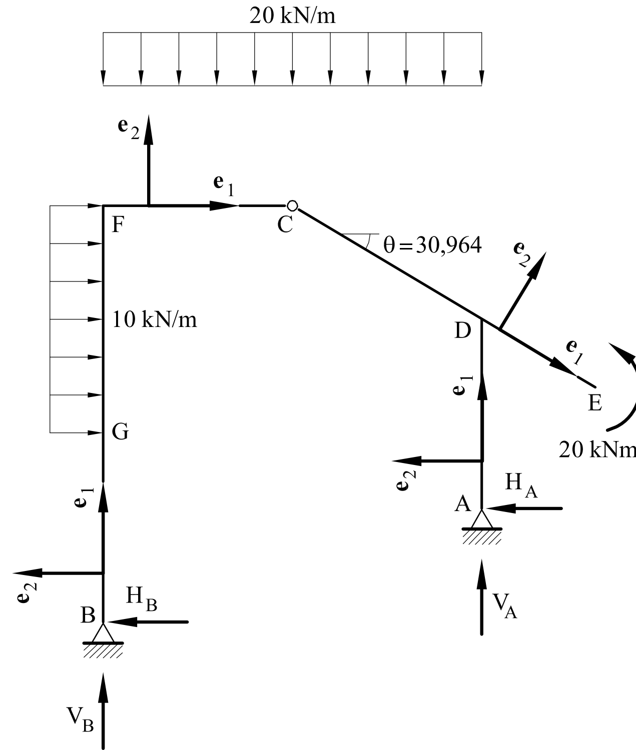


Fig. 2 Reacciones y ejes locales

A partir de estos valores se obtienen las leyes de esfuerzos:

a) Momentos flectores

$$M_f\Big|_B^G = 7{,}37\ s\ kNm$$

$$M_f\Big|_G^F = 36{,}86 + 7{,}37\,s - 5\,s^2\ \ kN\,m$$

$$M_f\Big|_F^C = -98{,}93 + 69{,}79\,s - 10\,s^2\ \ kN\,m$$

$$M_f\Big|_C^D = 1{,}16\,s - 7{,}35\,s^2\ \ kN\,m$$

$$M_f\Big|_D^E = 20\ kN\,m$$

$$M_f\Big|_D^A = 52{,}63\,s\ kN\,m$$

b) Esfuerzos cortantes

$$Q\Big|_B^G = -7{,}37\ kN$$

$$Q\Big|_G^F = -7{,}37 + 10\,s\ kN$$

$$Q\Big|_F^C = -69{,}79 + 20\,s\ kN$$

$$Q\Big|_C^D = -1{,}16 + 14{,}7\,s\ kN$$

$$Q\Big|_D^E = 0\ kN$$

$$Q\Big|_A^D = -52{,}63\ kN$$

c) Esfuerzos axiles

$$N\Big|_B^G = -69{,}79\ kN$$

$$N\Big|_G^F = -69{,}79\ kN$$

$$N\Big|_F^C = -52{,}63\ kN$$

$$N\Big|_C^D = -60{,}6 + 8{,}8\,s\ kN$$

$$N\Big|_D^E = 0\ kN$$

$$N\Big|_A^D = -130{,}21\ kN$$

En las figuras 3, 4 y 5 pueden verse representadas las leyes anteriores:

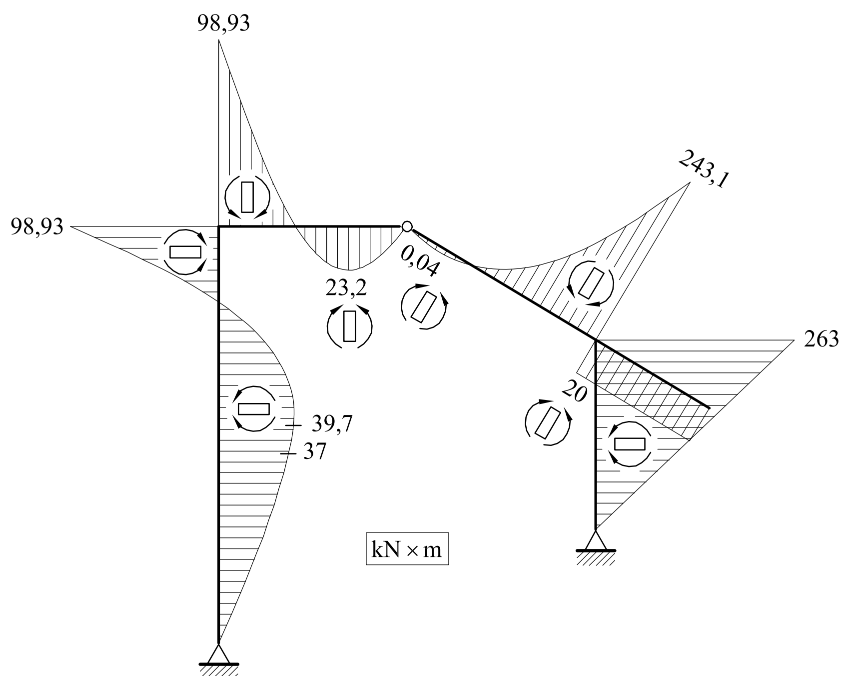


Fig. 3 Leyes de momentos flectores.

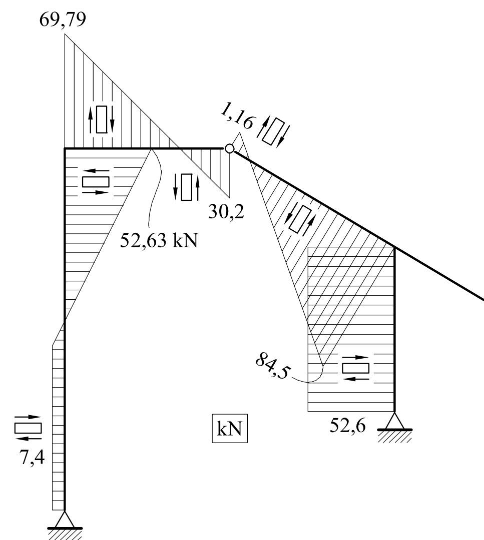


Fig. 4 Leyes de esfuerzos cortantes

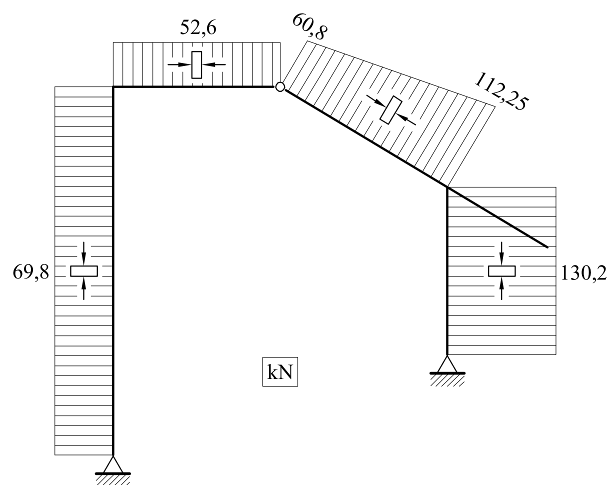


Fig. 5 Leyes de esfuerzos axiles.

Problema 2.21 *Determinar las leyes de esfuerzos y las reacciones en el pórtico de la figura 1*

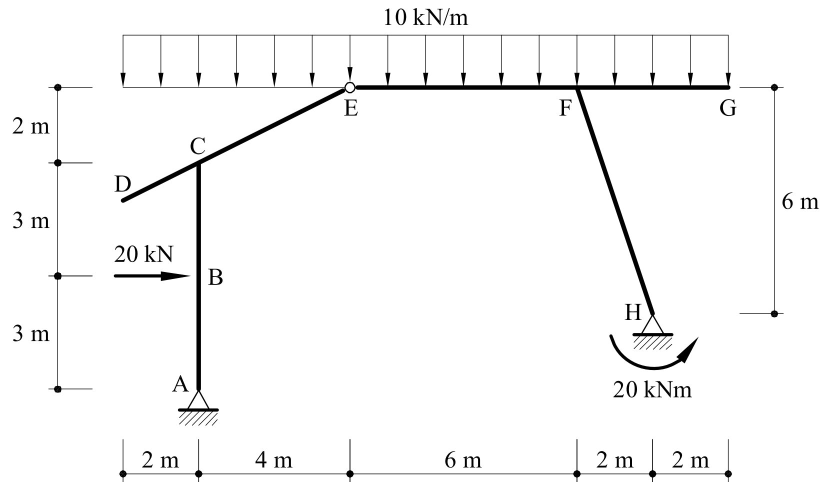


Fig. 1 Pórtico isostático correspondiente al problema resuelto 2.21

Solución

En la figura 2 pueden verse dibujadas las reacciones, así como los ejes locales de cada barra.

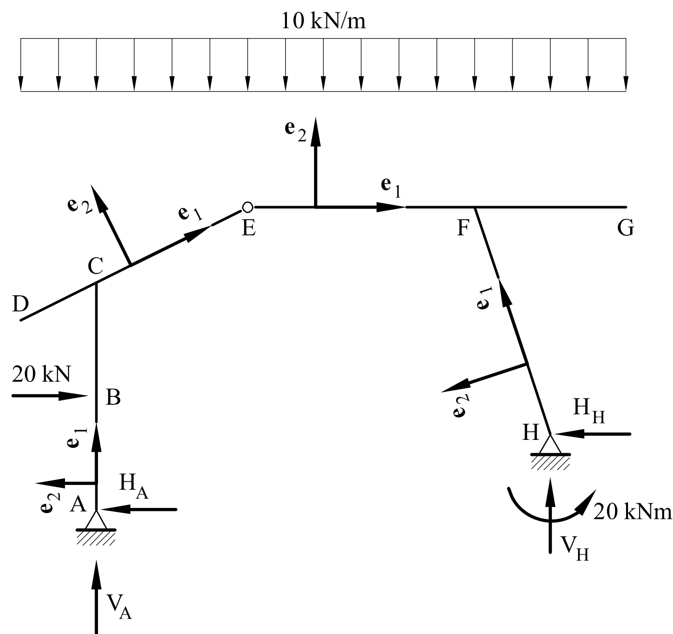


Fig. 2 Reacciones y ejes locales

Las ecuaciones de equilibrio se escriben:

- Suma de momentos respecto al punto E:

$$\sum M_E^- = 0 \qquad V_A \times 4 + H_A \times 8 - 20 \times 5 - 10 \times 6 \times 3 = 0$$

$$\sum M_E^+ = 0 \qquad V_H \times 8 - H_H \times 6 + 20 - 10 \times 10 \times 5 = 0$$

es decir:

$$4V_A + 8H_A = 280$$
$$8V_H - 6H_H = 480$$

-Suma de fuerzas verticales: $\sum F_V = 0$

$$V_A + V_H = 160$$

-Suma de fuerzas horizontales: $\sum F_H = 0$

$$H_A + H_H = 20$$

Las expresiones anteriores proporcionan un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas. Resolviéndolo:

$$V_A = 80{,}90\ kN$$
$$V_H = 79{,}09\ kN$$
$$H_A = -5{,}45\ kN$$
$$H_H = 25{,}45\ kN$$

Las leyes de esfuerzos serán por tanto:

a) Momentos flectores:

$$M_f\Big|_A^B = -5{,}45\,s\ kN\,m$$
$$M_f\Big|_B^C = -16{,}35 - 25{,}45\,s\ kN\,m \qquad (s\ contado\ a\ partir\ de\ B)$$
$$M_f\Big|_D^C = -4s^2\ kN\,m$$
$$M_f\Big|_C^E = -112{,}7 + 43{,}08\,s - 4s^2\ kN\,m$$
$$M_f\Big|_E^F = 20{,}9\,s - 5s^2\ kN\,m$$
$$M_f\Big|_H^F = -20 + 0{,}89\,s\ kN\,m$$
$$M_f\Big|_F^G = -80 + 40\,s - 5s^2\ kN\,m$$

b) Esfuerzos cortantes:

$$Q\Big|_A^B = 5{,}45\ kN$$
$$Q\Big|_B^C = 25{,}45\ kN$$
$$Q\Big|_D^C = 8{,}0\,s\ kN$$
$$Q\Big|_C^E = -43{,}08 + 8{,}0\,s\ kN$$
$$Q\Big|_E^F = -20{,}9 + 10\,s\ kN$$

$$Q\Big|_H^F = -0{,}82\, kN$$

$$Q\Big|_F^G = -40 + 10\, s\ kN$$

c) Esfuerzos axiles:

$$N\Big|_A^B = -80{,}90\ kN$$

$$N\Big|_B^C = -80{,}90\ kN$$

$$N\Big|_D^C = 4\, s\ kN$$

$$N\Big|_C^E = -50 + 4\, s\ kN$$

$$N\Big|_E^F = -25{,}45\ kN$$

$$N\Big|_H^F = -83{,}1\, kN$$

$$N\Big|_F^G = 0$$

En las figuras 3, 4, y 5 pueden verse representadas las leyes anteriores.

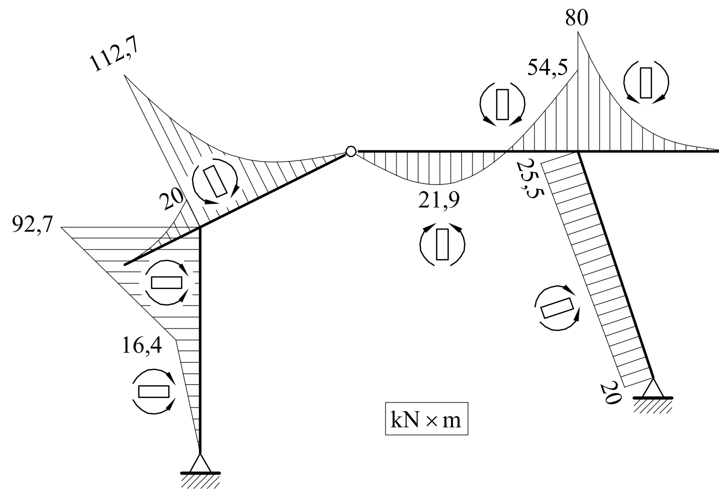


Fig. 3 Leyes de momentos flectores

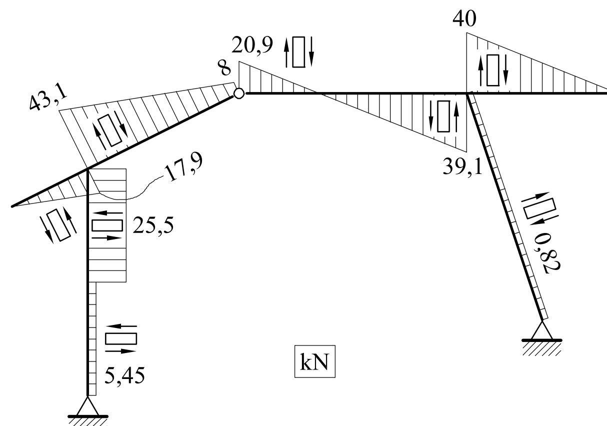


Fig. 4 Leyes de esfuerzos cortantes

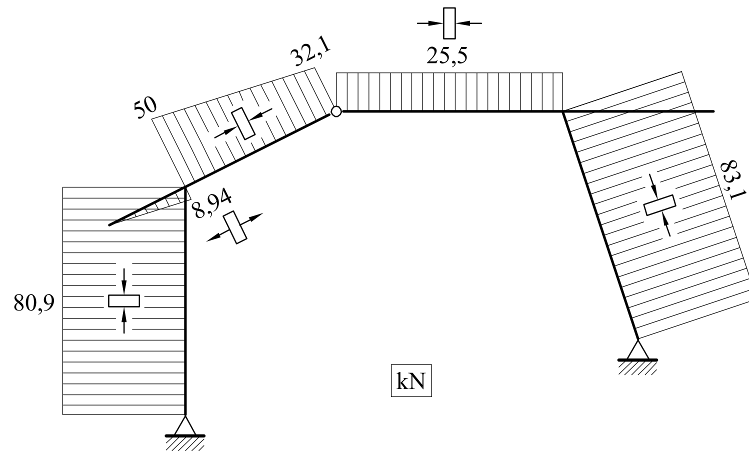


Fig. 5 Leyes de esfuerzos axiles

Problema 2.22 *En la estructura de la figura 1, hallar la expresión analítica y el dibujo de las leyes de esfuerzos.*

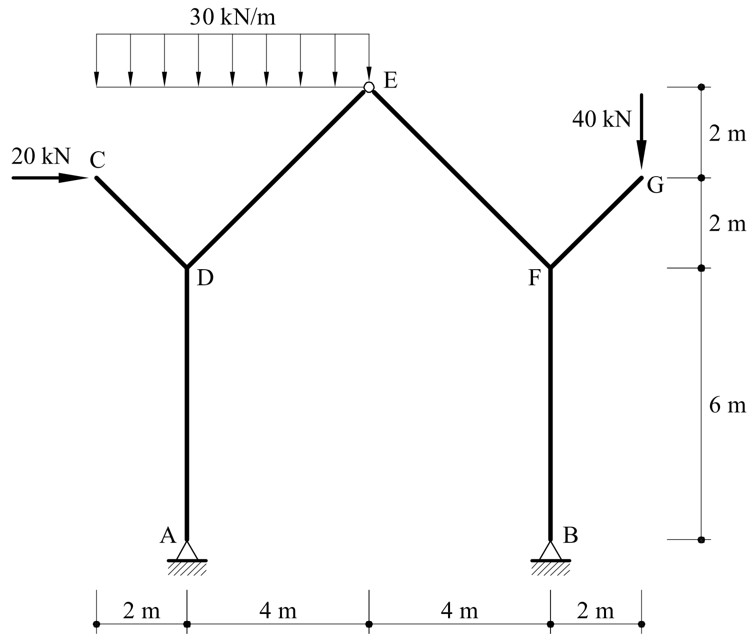


Fig. 1 Pórtico isostático correspondiente al problema resuelto 2.22

Solución

En la figura 2 pueden verse dibujadas las reacciones, así como los ejes locales de cada barra.

Las ecuaciones de equilibrio se escriben:

- Suma de fuerzas verticales: $\sum F_V = 0$

$$V_A + V_B - 30 \times 6 - 40 = 0$$

- Suma de fuerzas horizontales: $\sum F_H = 0$

$$20 - H_A - H_B = 0$$

- Suma de momentos respecto el punto E: $\sum M_E = 0$

$$4V_B - 10H_B - 40 \times 6 - 4V_A - 10 \times H_A + 20 \times 2 + 30 \times 6 \times 3 = 0$$

La rótula E proporciona una nueva ecuación: suma de momentos respecto al punto E de todas las fuerzas y reacciones a la izquierda de la rótula igual a cero:

$$\sum M_{fE} = 0 \qquad 4V_A + 10 \times H_A - 20 \times 2 - 30 \times 6 \times 3 = 0$$

De este modo, se obtiene un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas:

$$V_A + V_B = 220$$
$$H_A + H_B = 20$$
$$4V_A + 10\,H_A = 580$$
$$4V_B - 10\,H_B = 240$$

Resolviendo, se obtiene:

$$V_A = 127{,}5\ kN$$
$$V_B = 92{,}5\ kN$$
$$H_A = 7\ kN$$
$$H_B = 13\ kN$$

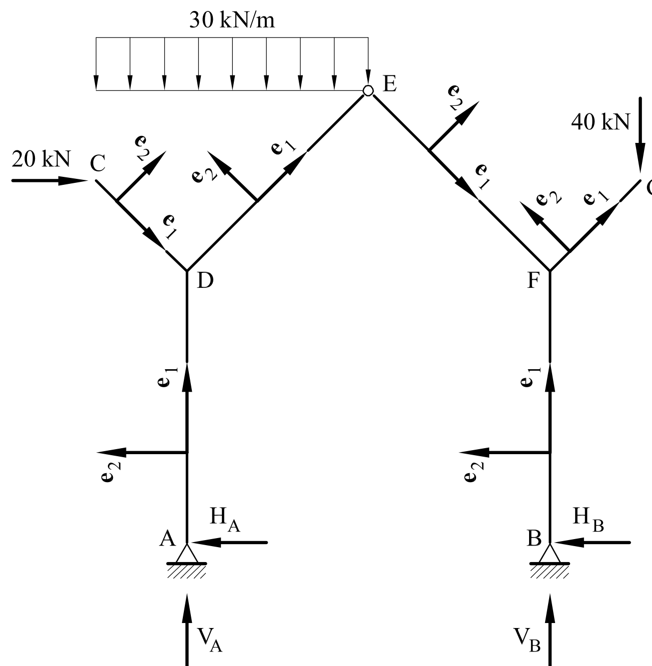


Fig. 2 Reacciones y ejes locales

A partir de estos valores se obtienen las leyes de esfuerzos.

a) Momentos flectores:

$$M_f\Big|_A^D = 7\,s\ kN\,m$$
$$M_f\Big|_C^D = 14{,}14\,s - 7{,}5\,s^2\ \ kN\,m$$
$$M_f\Big|_D^E = 22 + 38{,}54\,s - 7{,}5\,s^2\ \ kN\,m$$
$$M_f\Big|_E^F = -27{,}92\,s\ \ kN\,m$$
$$M_f\Big|_F^G = -80 + 28{,}28\,s\ \ kN$$
$$M_f\Big|_B^F = 13\,s\ \ kN\,m$$

b) Esfuerzos cortantes:

$$Q\Big|_A^D = -7\ kN$$
$$Q\Big|_C^D = -14{,}14 + 15s\ kN$$
$$Q\Big|_D^E = -38{,}54 + 15s\ kN$$
$$Q\Big|_E^F = 27{,}92\ kN$$
$$Q\Big|_F^G = -28{,}28\ kN$$
$$Q\Big|_B^F = -13\ kN$$

c) Esfuerzos axiles:

$$N\Big|_A^D = -127{,}5\ kN$$
$$N\Big|_C^D = -14{,}14 - 15s\ kN$$
$$N\Big|_D^E = -56{,}926 + 15s\ kN$$
$$N\Big|_E^F = -46{,}31\ kN$$
$$N\Big|_F^G = -28{,}28\ kN$$
$$N\Big|_B^F = -92{,}5\ kN$$

En las figuras 3, 4 y 5 pueden verse representadas las leyes anteriores.

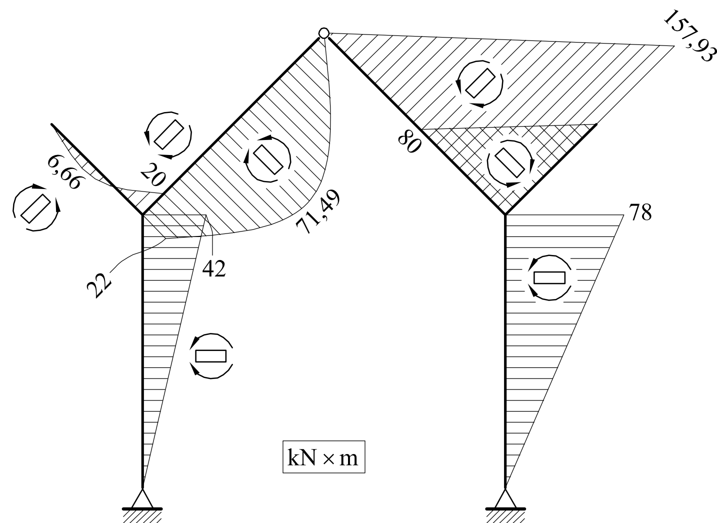


Fig. 3 Leyes de momentos flectores

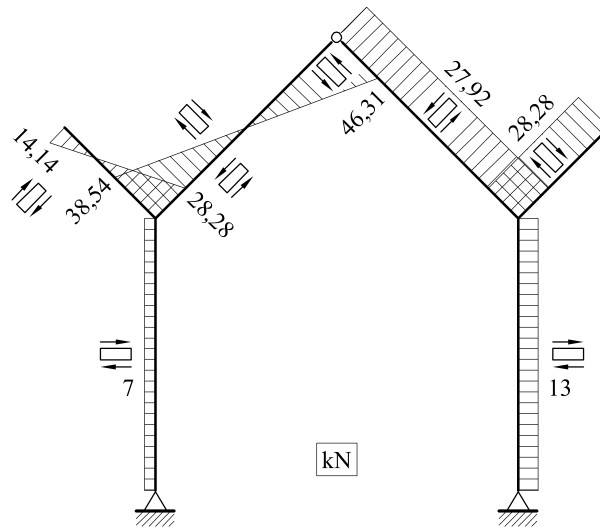


Fig. 4 Leyes de esfuerzos cortantes

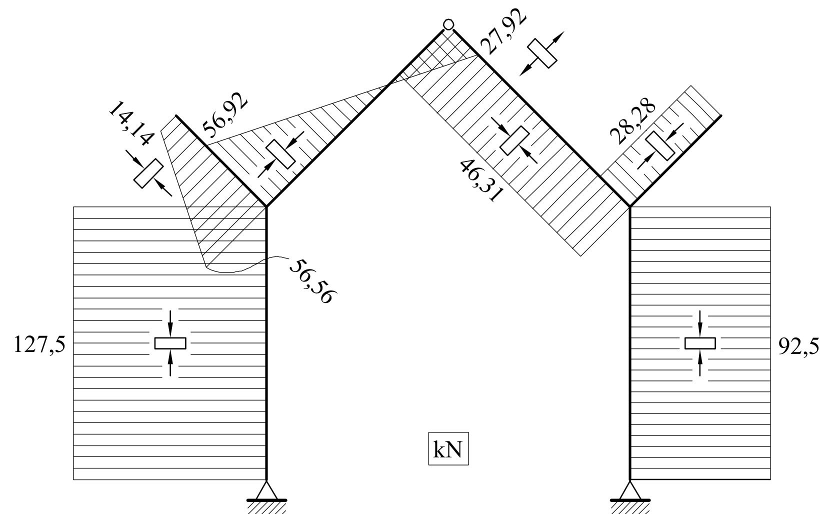


Fig. 5 Leyes de esfuerzos axiles

Problema 2.23 *Determinar las leyes de esfuerzos y las reacciones en la estructura de la figura 1*

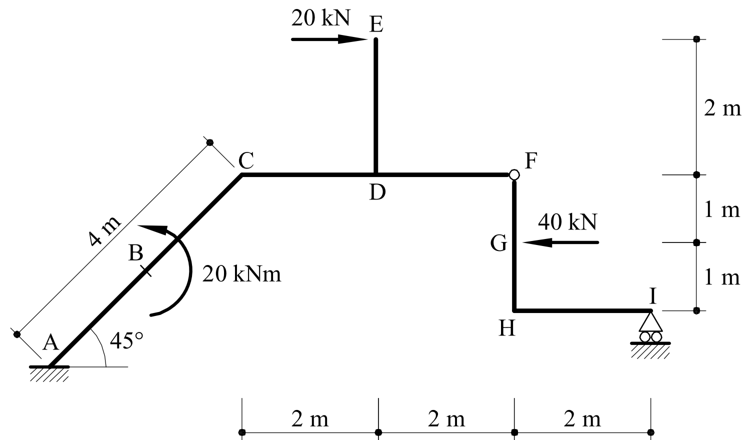


Fig. 1 Pórtico isostático correspondiente al problema resuelto 2.23

Solución

En la figura 2 pueden verse dibujadas las reacciones, así como los ejes locales de cada barra.

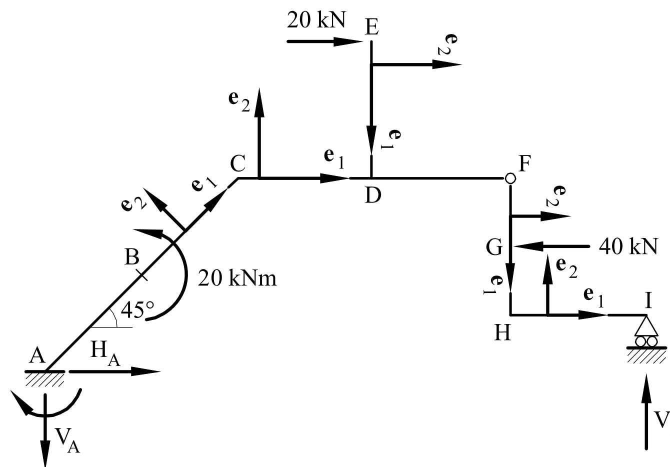


Fig. 2 Reacciones y ejes locales

Las ecuaciones de equilibrio se escriben:

- Suma de fuerzas verticales $\sum F_V = 0$

$$V_A = V_I$$

- Suma de fuerzas horizontales $\sum F_H = 0$

$$H_A + 20 - 40 = 0$$

De lo que se obtiene que $H_A = 20\ kN$

- Suma de momentos respecto al punto F

$$\sum M_F = 0 \qquad V_I \times 2 - 40 \times 1 = 0$$
$$20 \times 2 - 20 + M_A - H_A \times 4 \times \cos 45 - V_A (4 \cos 45 + 4) = 0$$

Resolviendo,

$$V_I = 20\ kN$$
$$V_A = 20\ kN$$
$$M_A = 173{,}13\ kN$$

A partir de estos valores, se obtienen las leyes de esfuerzos:

a) Momentos flectores

$$M\Big|_A^B = 173{,}13 - 28{,}28\, s\ kN\ m$$
$$M_f\Big|_B^C = 96{,}57 - 28{,}28\, s\ kN\ m$$
$$M_f\Big|_C^D = 40 - 20\, s\ kN\ m$$
$$M_f\Big|_E^D = 20\, s\ kN\ m$$
$$M_f\Big|_D^F = 40 - 20\, s\ kN\ m$$
$$M_f\Big|_F^G = 40\, s\ kN\ m$$
$$M_f\Big|_G^H = 40\ \ kN\ m$$
$$M_f\Big|_H^I = -20\, s + 40\ kN\ m$$

b) Esfuerzos cortantes

$$Q\Big|_A^B = 28{,}28\ kN$$
$$Q\Big|_B^C = 28{,}28\ kN$$
$$Q\Big|_C^D = 20\ kN$$
$$Q\Big|_E^D = -20\ kN$$
$$Q\Big|_D^F = 20\ kN$$
$$Q\Big|_F^G = -40\ kN$$
$$Q\Big|_G^H = 0$$
$$Q\Big|_H^I = 20\ kN$$

c) Esfuerzos axiles

$$N\Big|_A^B = 0$$

$$N\Big|_B^C = 0$$

$$N\Big|_C^D = -20\ kN$$

$$N\Big|_E^D = 0$$

$$N\Big|_D^F = -40\ kN$$

$$N\Big|_F^G = -20\ kN$$

$$N\Big|_G^H = -20\ kN$$

$$N\Big|_H^I = 0$$

En las figuras 3, 4 y 5 pueden verse representadas las leyes anteriores.

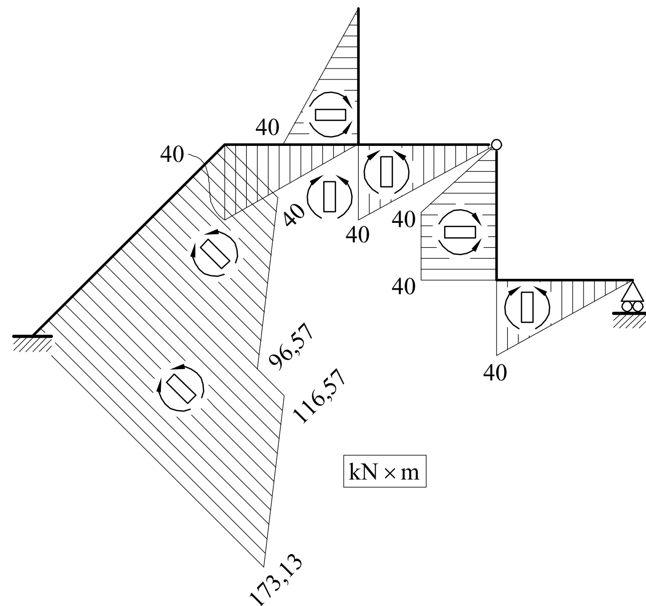


Fig. 3 Leyes de momentos flectores

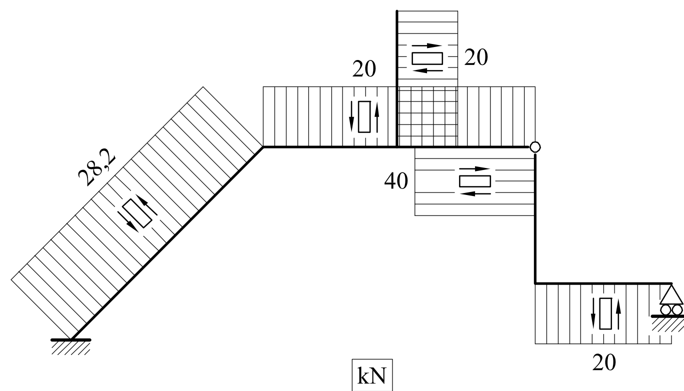


Fig. 4 Esfuerzos cortantes

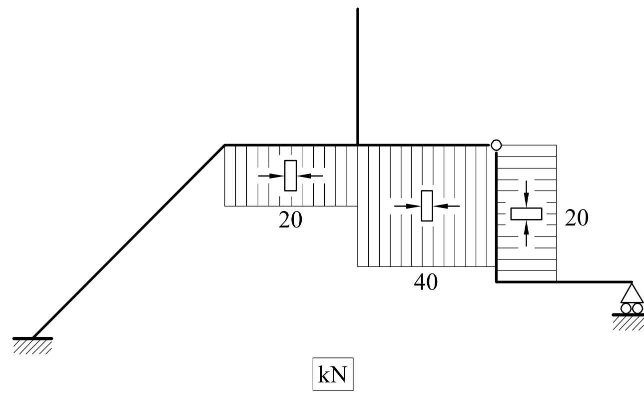


Fig. 5 Esfuerzos axiles

Problema 2.24 *En la estructura de la figura 1, determinar y dibujar (acotándolas debidamente) las leyes de esfuerzos.*

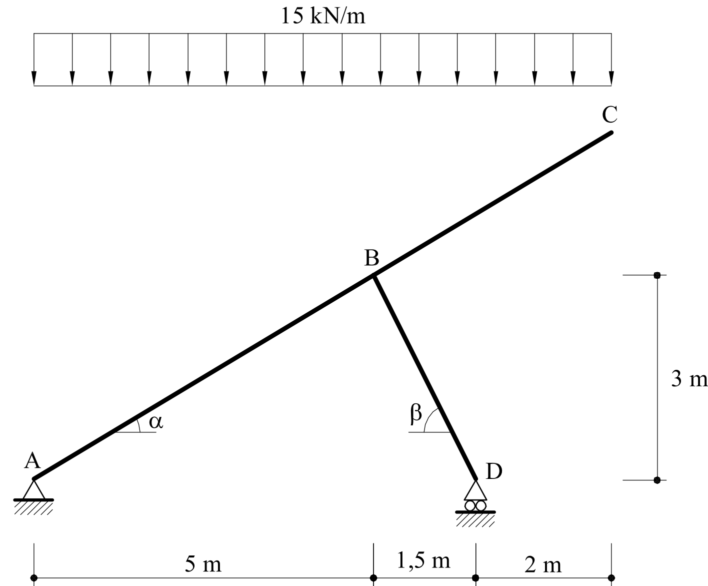


Fig. 1 Pórtico isostático correspondiente al problema resuelto 2.24

Solución

En la figura 2 pueden verse dibujadas las reacciones, así como los ejes locales de cada barra.

Las dos ecuaciones de equilibrio se escriben:

- Suma de momentos respecto al punto A: $\sum M_A = 0$

$$6{,}5\,R_D = 15 \times \frac{(8{,}5)^2}{2}$$

- Suma de fuerzas verticales: $\sum F_V = 0$

$$R_A + R_D = 15 \times 8{,}5$$

Con lo que las reacciones valen:

$$R_D = 83{,}4\ kN$$
$$R_A = 44{,}1\ kN$$

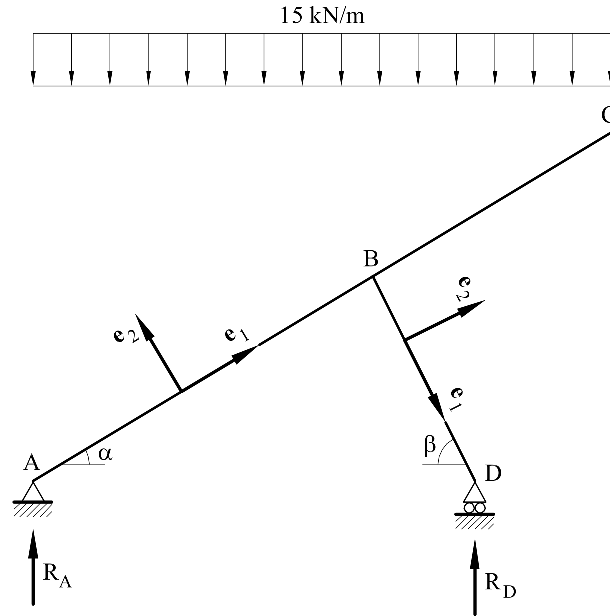


Fig. 2 Reacciones y ejes locales

A partir de los valores de las reacciones es posible obtener las leyes de esfuerzos.

a) Leyes de momentos flectores:

$$M_f\Big|_A^B = 37{,}8\,s - 5{,}51\,s^2 \quad kN\,m$$
$$M_f\Big|_B^C = -91{,}87 + 45{,}01\,s - 5{,}51\,s^2 \quad kN\,m$$
$$M_f\Big|_B^D = 125{,}1 - 37{,}29\,s \quad kN\,m$$

b) Esfuerzos cortantes:

$$Q\Big|_A^B = -37{,}8 + 11{,}03\,s \quad kN$$
$$Q\Big|_B^C = -45{,}01 + 11{,}03\,s \quad kN$$
$$Q\Big|_B^D = 37{,}3 \quad kN$$

c) Esfuerzos axiles:

$$N\Big|_A^B = -22{,}69 + 6{,}61\,s \quad kN$$
$$N\Big|_B^C = -27{,}01 + 6{,}61\,s \quad kN$$
$$N\Big|_B^D = -74{,}59 \quad kN$$

En las figuras 3, 4 y 5 pueden verse representadas las leyes anteriores.

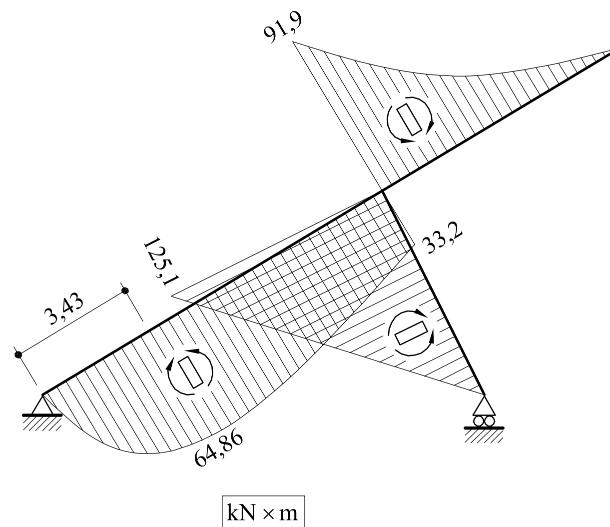


Fig. 3 Leyes de momentos flectores

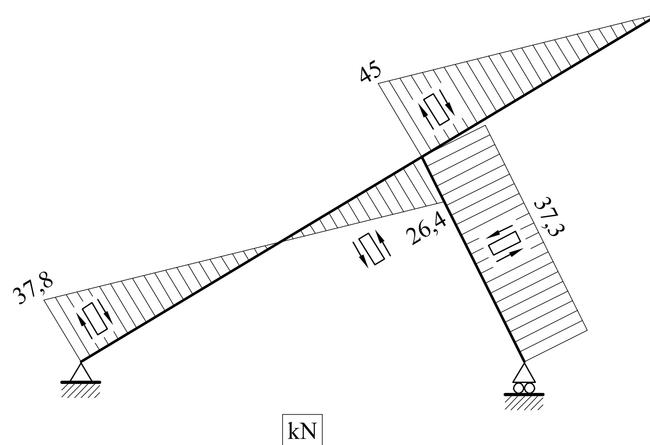


Fig. 4 Leyes de esfuerzos cortantes

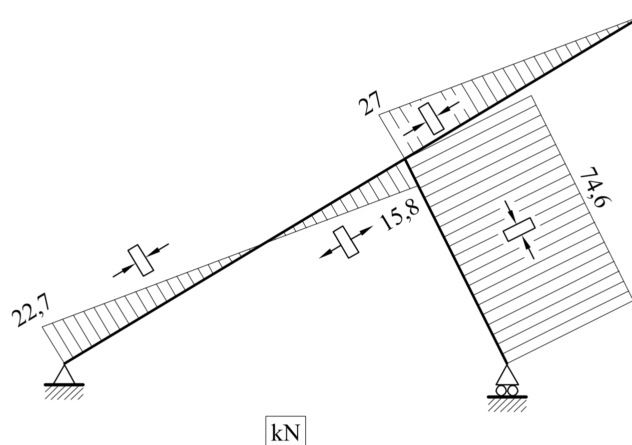


Fig. 5 Leyes de esfuerzos axiles

Problema 2.25 *En la estructura que se acota en la figura 1, hallar y dibujar las reacciones y las leyes de esfuerzos.*

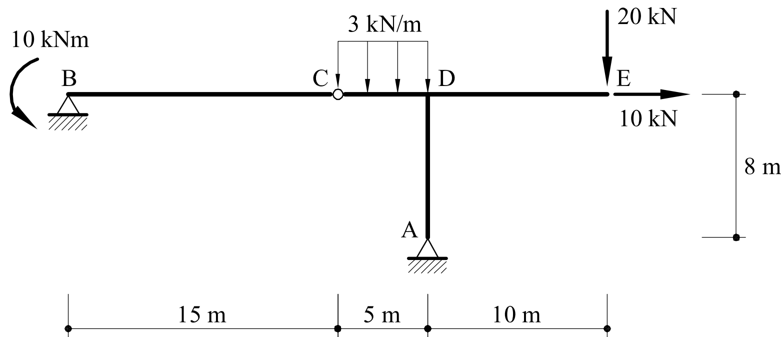


Fig. 1 Pórtico isostático correspondiente al problema 2.25

Solución

En la figura 2 pueden verse dibujadas las reacciones, así como los ejes locales de cada barra. Las ecuaciones de equilibrio se escriben:

- Suma de momentos respecto al punto A : $\sum M_A = 0$

$$-V_B \times 20 + H_B \times 8 + 10 + 15 \times 2{,}5 - 20 \times 10 - 10 \times 8 = 0$$

es decir:

$$-20V_B + 8H_B = 232{,}5$$

- Suma de fuerzas verticales $\sum F_V = 0$

$$V_A + V_B = 35$$

- Suma de fuerzas horizontales $\sum F_H = 0$

$$H_A + H_B = 10$$

La rótula C proporciona una nueva ecuación: suma de momentos respecto al punto C de todas las fuerzas y reacciones que hay en BC igual a cero.

$$-15 \times V_B + 10 = 0$$

De esta última ecuación obtenemos el valor de la reacción vertical en el apoyo B.

$$V_B = 0{,}67 \ kN$$

Resolviendo:

$$H_B = 30{,}74\ kN$$
$$V_A = 34{,}33\ kN$$
$$H_A = -20{,}74\ kN$$

A partir de estos valores es posible obtener las leyes de esfuerzos.

a) Momentos flectores:

$$M_f\Big|_B^C = -10 + 0{,}67\,s\ kN\,m$$
$$M_f\Big|_C^D = 0{,}67\,s - 1{,}5\,s^2\ kN\,m$$
$$M_f\Big|_D^E = -200 + 20\,s\ kN\,m$$
$$M_f\Big|_D^A = 165{,}92 - 20{,}74\ s\ kN\,m$$

b) Esfuerzos cortantes:

$$Q\Big|_B^C = -0{,}67\ kN$$
$$Q\Big|_C^D = -0{,}67 + 3\,s\ kN$$
$$Q\Big|_D^E = -20\ kN$$
$$Q\Big|_D^A = 20{,}74\ kN$$

c) Esfuerzos axiles:

$$N\Big|_B^C = 30{,}74\ kN$$
$$N\Big|_C^D = 30{,}74\ kN$$
$$N\Big|_D^E = 10\ kN$$
$$N\Big|_D^A = -34{,}33\ kN$$

En las figuras 3, 4 y 5 pueden verse representadas las leyes anteriores.

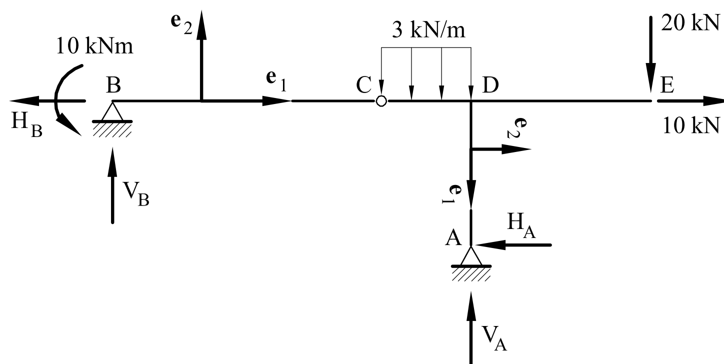


Fig. 2 Reacciones y ejes locales

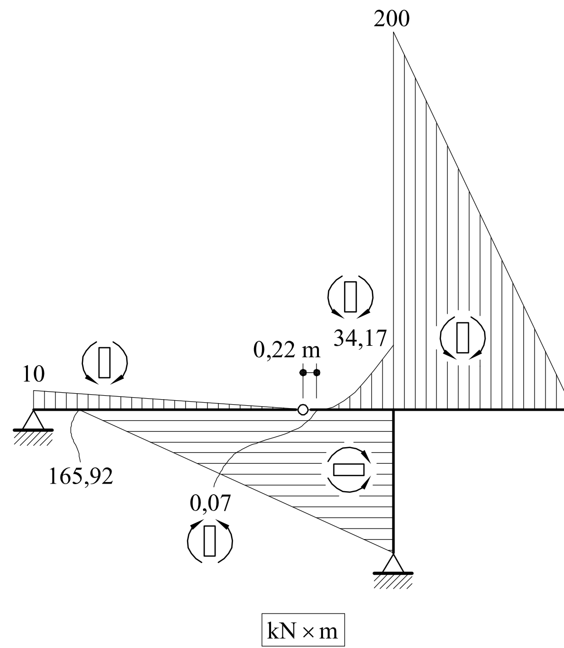


Fig. 3 Leyes de momentos flectores

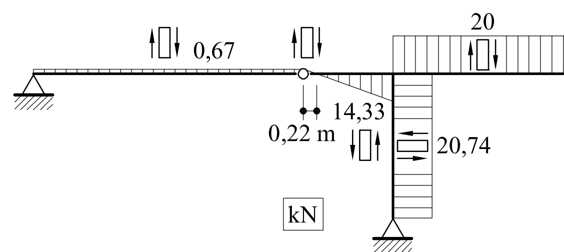


Fig. 4 Leyes de esfuerzos cortantes

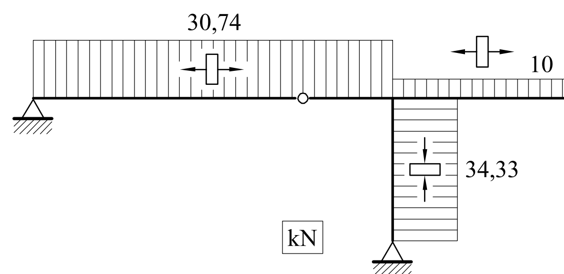


Fig. 5 Leyes de esfuerzos axiles

Problema 2.26 *En la estructura que se acota en la figura 2, determinar las reacciones y las leyes de esfuerzo.*

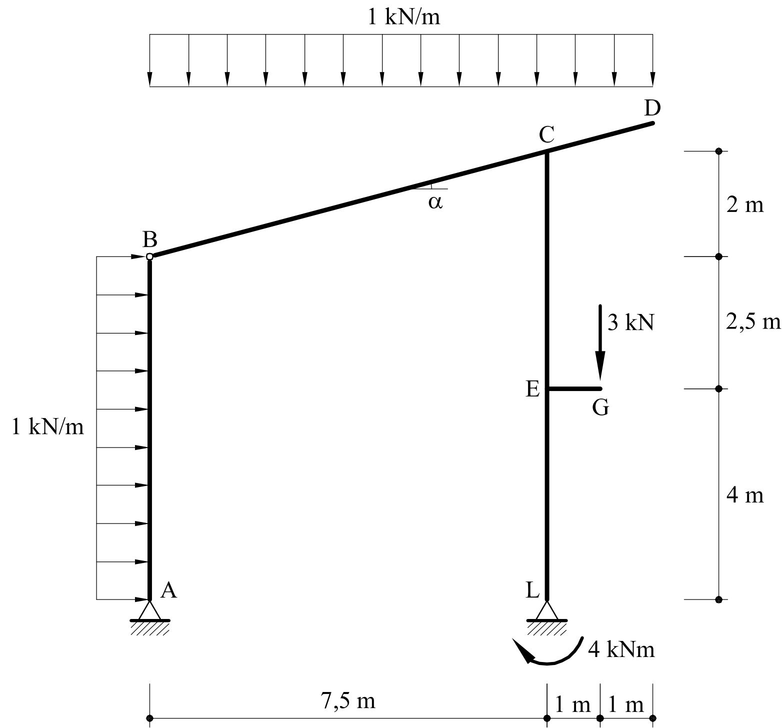


Fig. 1 Pórtico isostático correspondiente al problema resuelto 2.26

Solución

En la figura 2 pueden verse dibujadas las reacciones, así como los ejes locales de cada barra.

Las ecuaciones de equilibrio seran:

- Tomando momentos respecto al punto B, se obtiene el valor de la reacción horizontal en el apoyo izquierdo.

$$\sum M_B = 0$$

$$H_A \times 6{,}5 - 1 \times 6{,}5 \times \frac{6{,}5}{2} = 0$$

$$H_A = 3{,}25\ kN$$

- Suma de fuerzas horizontales. $\sum F_H = 0$

$$H_A + H_L = 1 \times 6{,}5$$

$$H_L = 3{,}25\ kN$$

- Tomando momentos respecto al punto A :

$$7{,}5\times V_L - 4 - 8{,}5\times 3 - 1\times\frac{9{,}5^2}{2} - 1\times\frac{6{,}5^2}{2} = 0$$

La reacción vertical en el apoyo derecho vale:

$$V_L = 12{,}77\ kN$$

- Suma de fuerzas verticales $\sum F_V = 0$

$$V_A + V_L = 9{,}5$$
$$V_A = -0{,}27\ kN$$

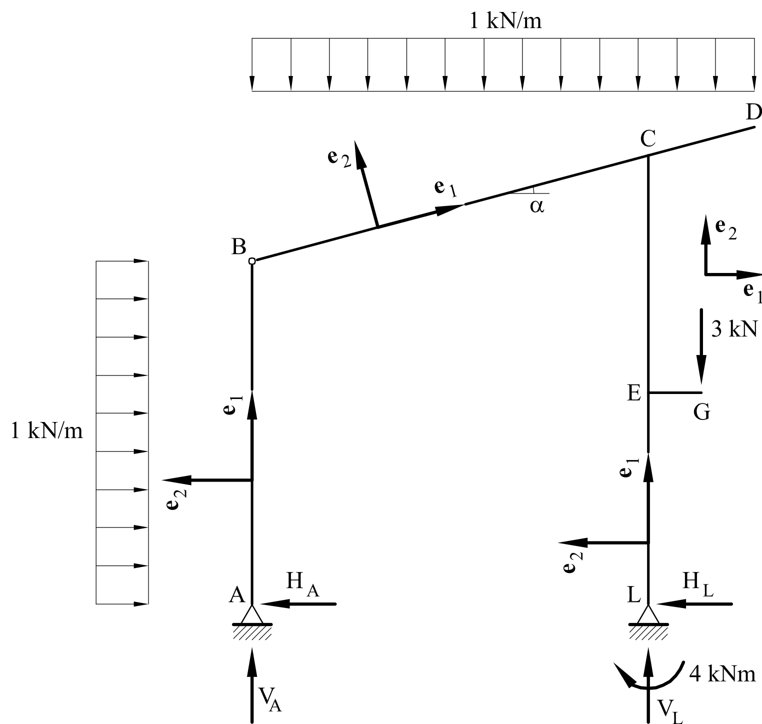


Fig. 2 Reacciones y ejes locales

A partir de estos valores es posible obtener las leyes de esfuerzos.

a) Leyes de momentos flectores

$$M_f\Big|_A^B = 3{,}25\,s - 0{,}5\,s^2$$
$$M_f\Big|_B^C = -1{,}10\,s - 0{,}467\,s^2$$
$$M_f\Big|_C^D = -2 + 1{,}93\,s - 0{,}467\,s^2$$
$$M_f\Big|_L^E = 4 + 3{,}25\ s$$

$$M_f\Big|_E^G = -3 + 3s$$

$$M_f\Big|_E^C = 20 + 3{,}25\,s\ kNm$$

b) Leyes de esfuerzos cortantes

$$Q\Big|_A^B = -3{,}25 + s\ kN$$

$$Q\Big|_B^C = 1{,}10 + 0{,}934\,s\ kN$$

$$Q\Big|_C^D = -1{,}93 - 0{,}934\,s\ kN$$

$$Q\Big|_L^E = -3{,}25\ kN$$

$$Q\Big|_E^G = -3\ kN$$

$$Q\Big|_E^C = -3{,}25\ kN$$

c) Leyes de esfuerzos axiles

$$N\Big|_A^B = 0{,}27\ kN$$

$$N\Big|_B^C = -3{,}07 + 0{,}248\,s\ kN$$

$$N\Big|_C^D = -0{,}52 + 0{,}248\,s\ kN$$

$$N\Big|_L^E = -12{,}77\ kN$$

$$N\Big|_E^G = 0\ kN$$

$$N\Big|_E^C = -12{,}77\ kN$$

En las figuras 3, 4 y 5 pueden verse representadas las leyes anteriores.

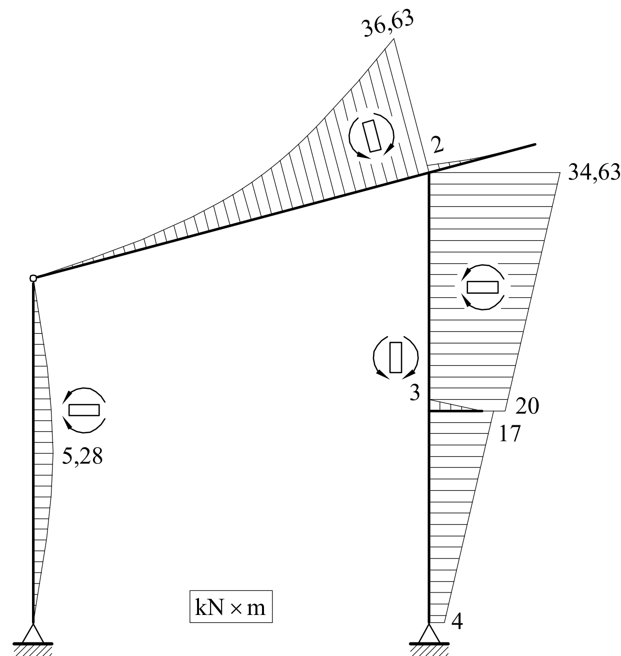


Fig. 3 Leyes de momentos flectores

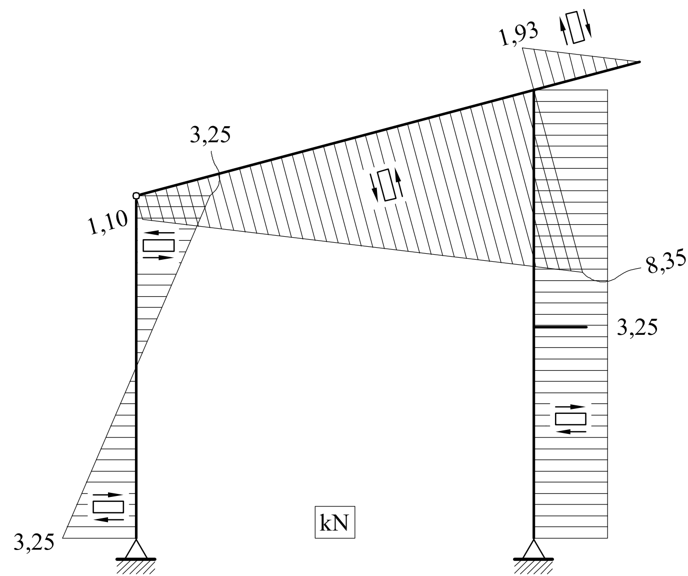


Fig. 4 Leyes de esfuerzos cortantes

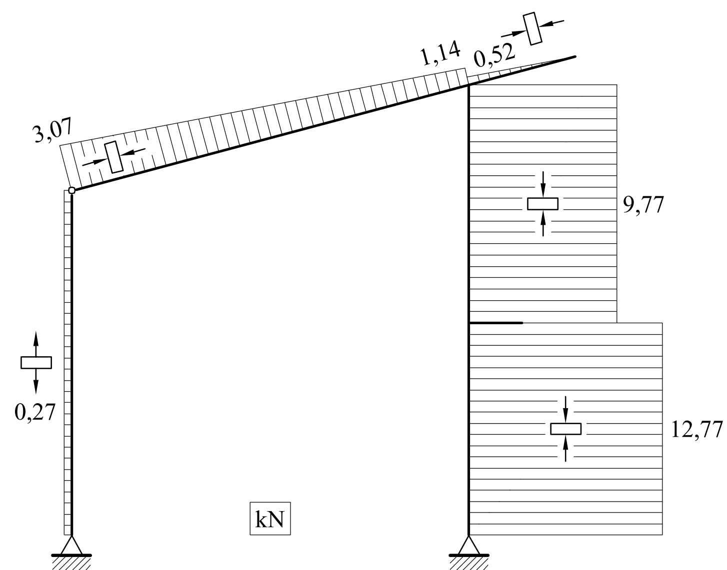


Fig. 5 Leyes de esfuerzos axiles

Problema 2.27 *Determinar las leyes de esfuerzos y las reacciones en el pórtico de la figura 1*

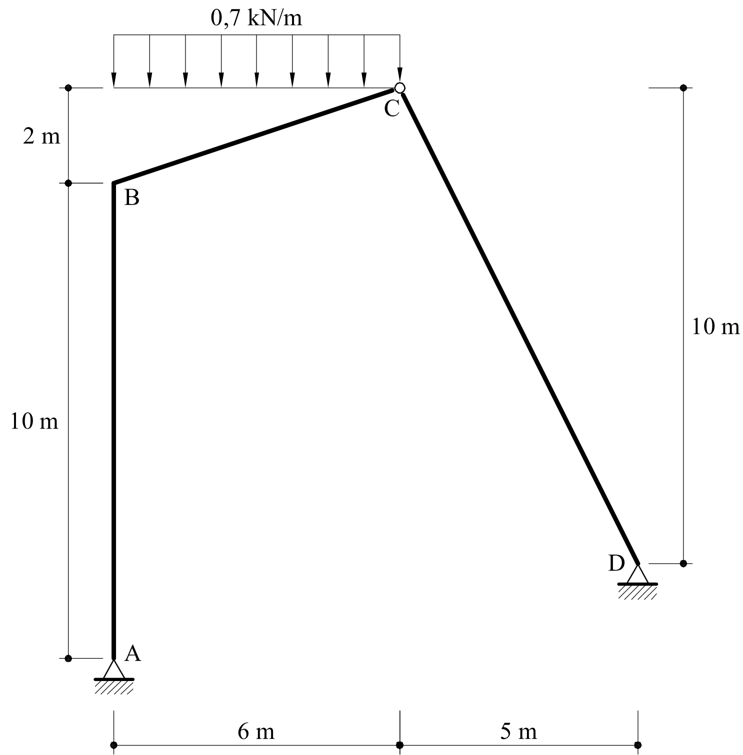


Fig. 1 Pórtico correspondiente al problema 2.27

Solución

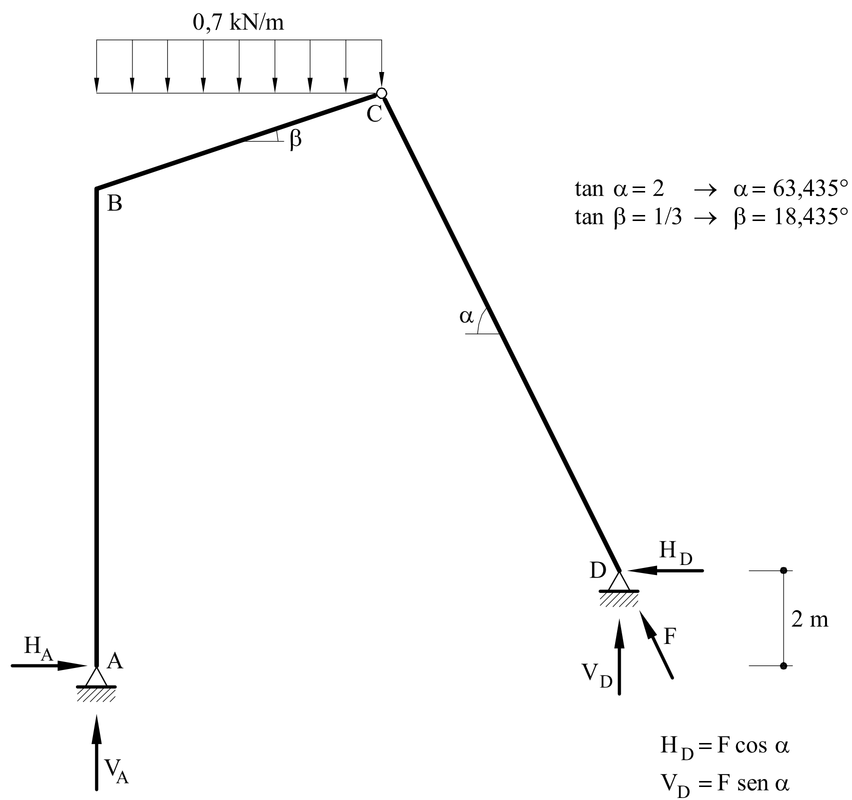


Fig. 2 Reacciones

Debido a que en C existe una rótula, la suma de las reacciones horizontal y vertical en D debe tener la dirección CD.
Tomando momentos respecto al punto A (figura 2)

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 11\,V_D + 2\,H_D = 0{,}7 \times 6 \times \frac{6}{2}$$

$$(11 \sin\alpha + 2\cos\alpha)F = 12{,}6$$

Es decir

$$F = 1{,}17\ kN$$

y por tanto,

$$V_D = 1{,}17 \sin\alpha = 1{,}05\ kN$$
$$H_D = 0{,}53\ kN$$
$$V_A = 0{,}7 \times 6 - 1{,}05 = 3{,}15\ kN$$
$$H_A = 0{,}53\ kN$$

Con estos valores, se pueden dibujar las leyes de esfuerzos (Fig. 3)

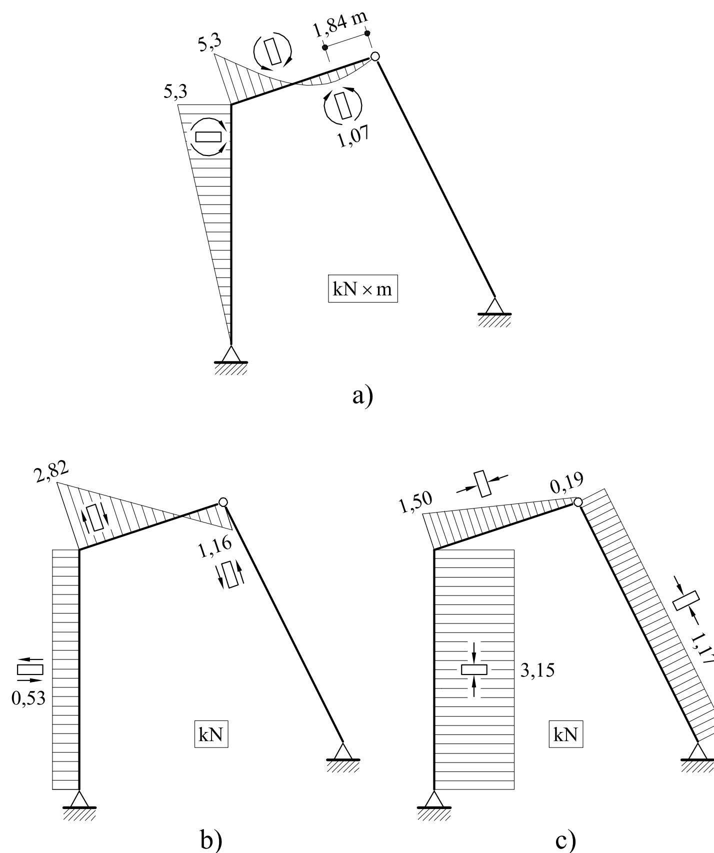


Fig. 3 Leyes de esfuerzos: (a) Ley de momentos flectores. (b) Ley de esfuerzos cortantes. (c) Ley de esfuerzos axiles.

Problema 2.28 *Determinar las leyes de esfuerzos así como las reacciones en la estructura que se acota en la figura 1*

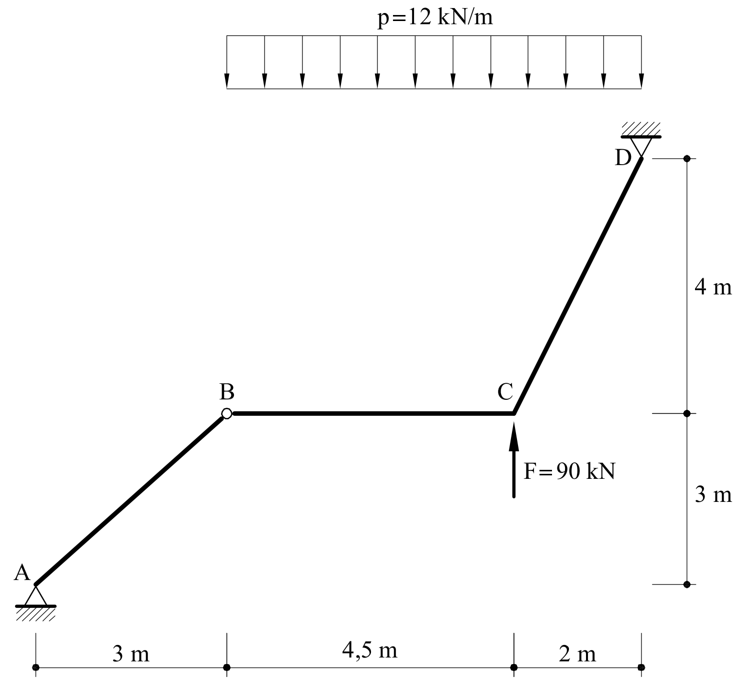


Fig. 1 Pórtico correspondiente al problema resuelto 2.28

Solución

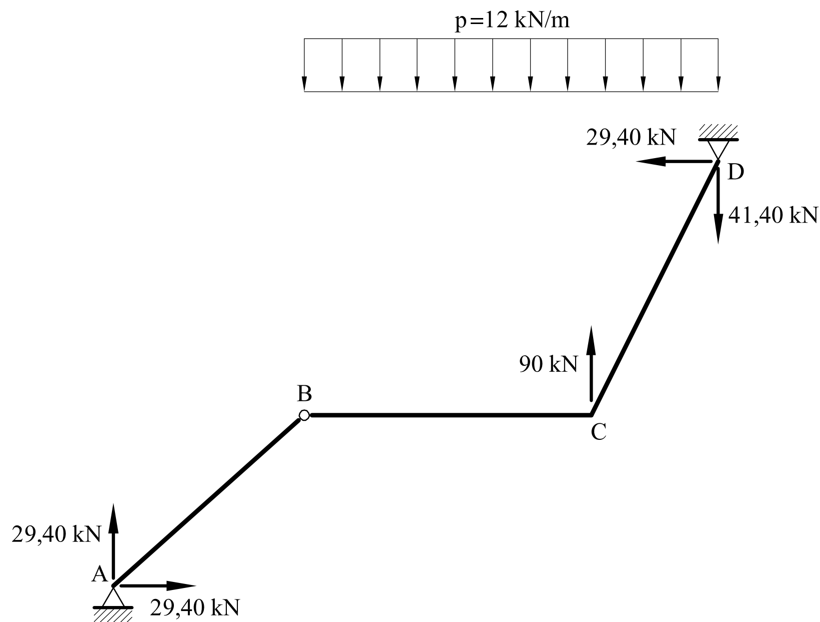


Fig. 2 Reacciones

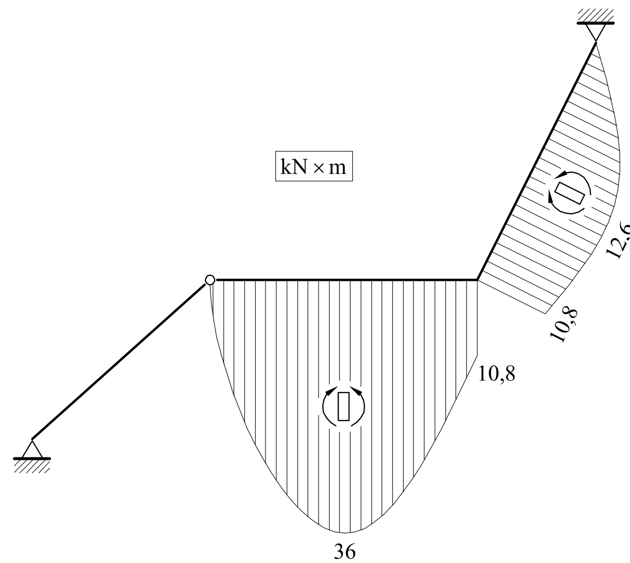


Fig. 3 Ley de momentos flectores

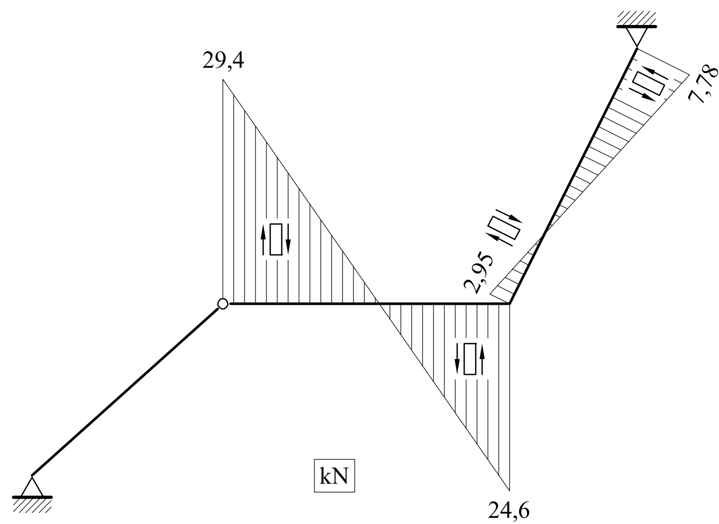


Fig. 4 Ley de esfuerzos cortantes

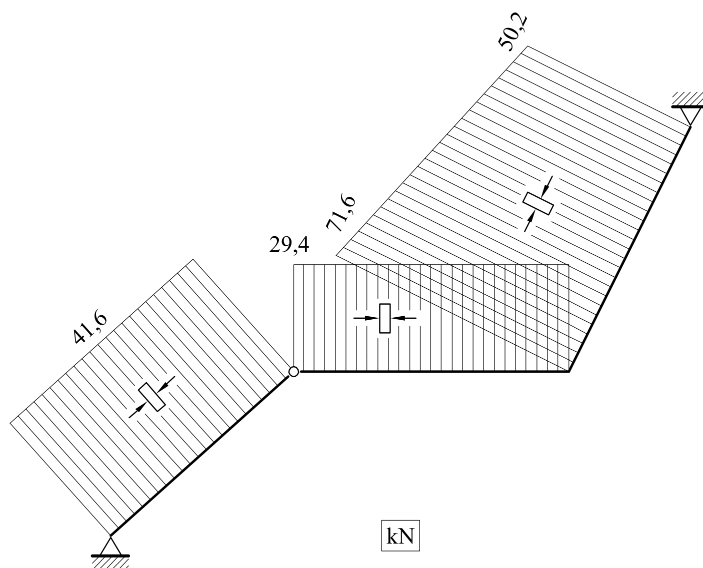


Fig. 5 Ley de esfuerzos axiles

Problema 2.29 *Dibujar las leyes de esfuerzos y las reacciones en el pórtico que se representa en la figura 1*

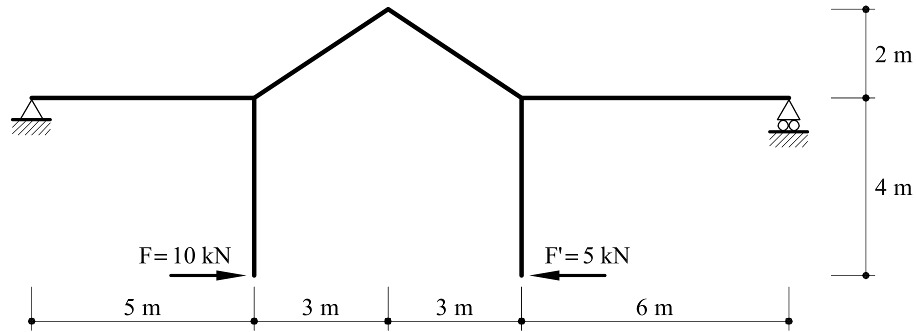


Fig. 1 Pórtico correspondiente al problema 2.29

Solución

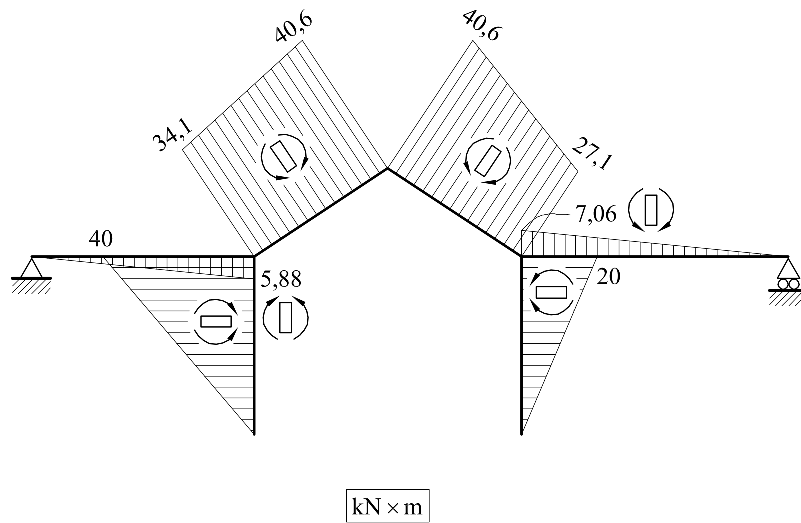


Fig. 2 Ley de momentos flectores

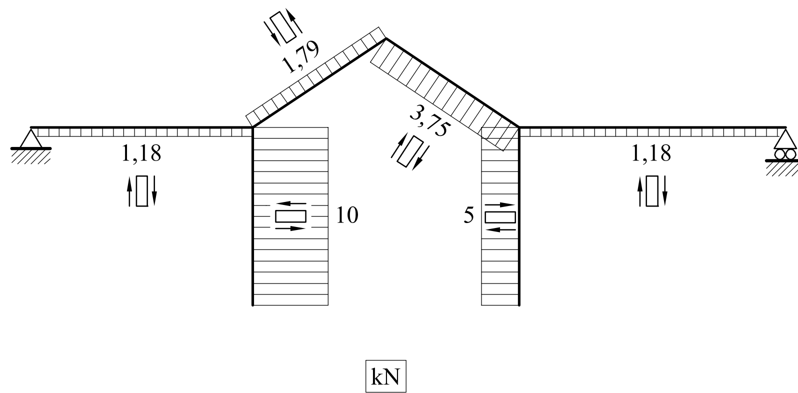


Fig. 3 Ley de esfuerzos cortantes

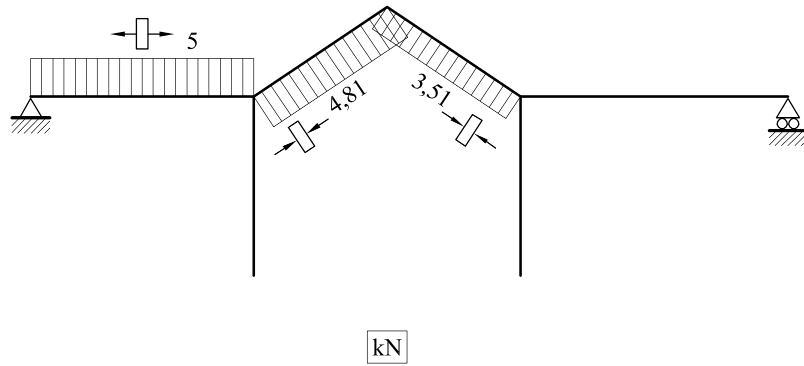


Fig. 4 Ley de esfuerzos axiles

Problema 2.30 *Determinar las leyes de esfuerzos así como las reacciones en la estructura que se acota en la figura1.*

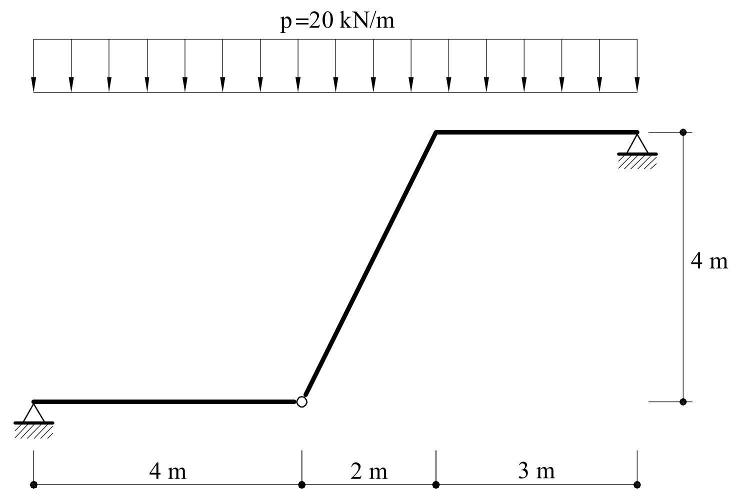


Fig. 1 Pórtico correspondiente al problema 2.30

Solución

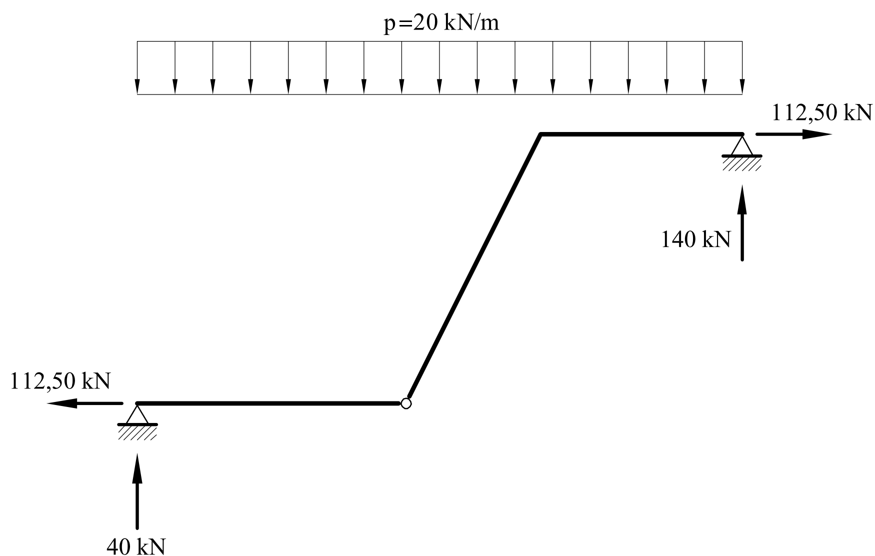


Fig. 2 Reacciones

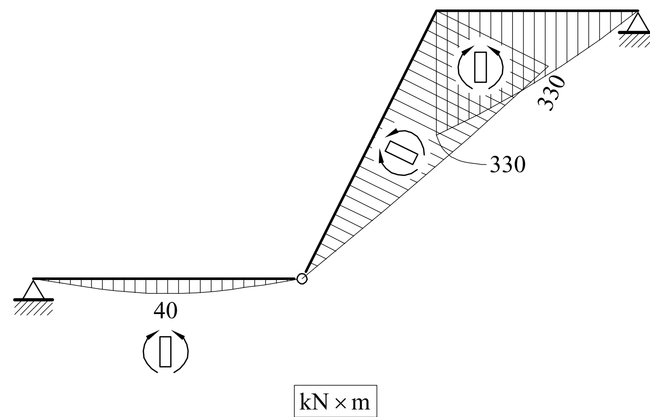


Fig. 3 Ley de momentos flectores

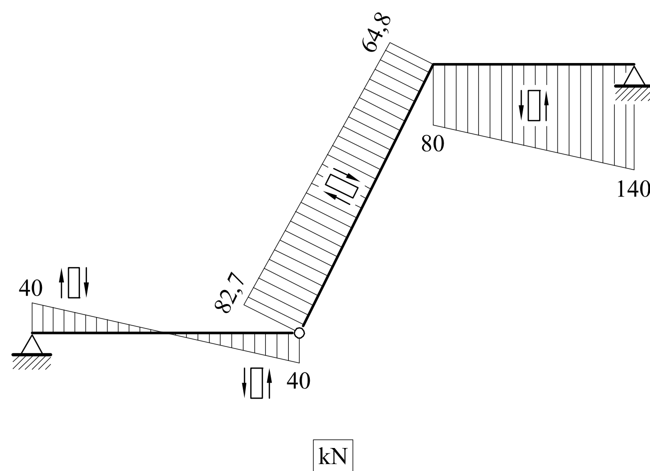


Fig. 4 Ley de esfuerzos cortantes

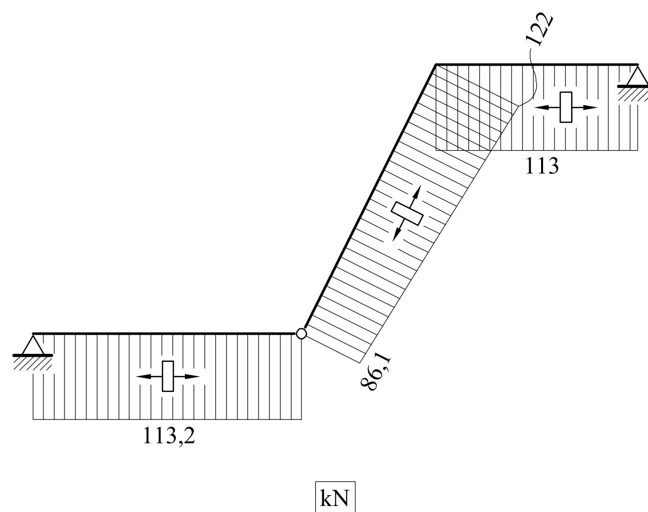


Fig. 5 Ley de esfuerzos axiles

Problema 2.31 *En la estructura que se acota en la figura 1, hallar y dibujar:*

1. *Reacciones*
2. *Ley de momentos flectores*
3. *Ley de esfuerzos cortantes*
4. *Ley de esfuerzos axiles*

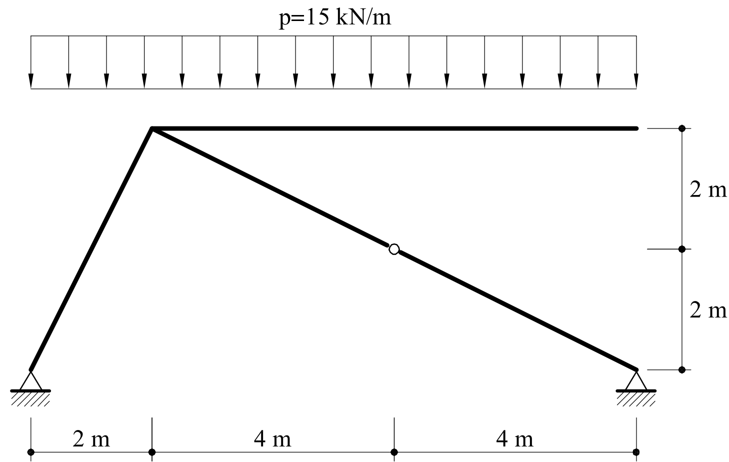


Fig. 1 Pórtico correspondiente al problema 2.31

Solución

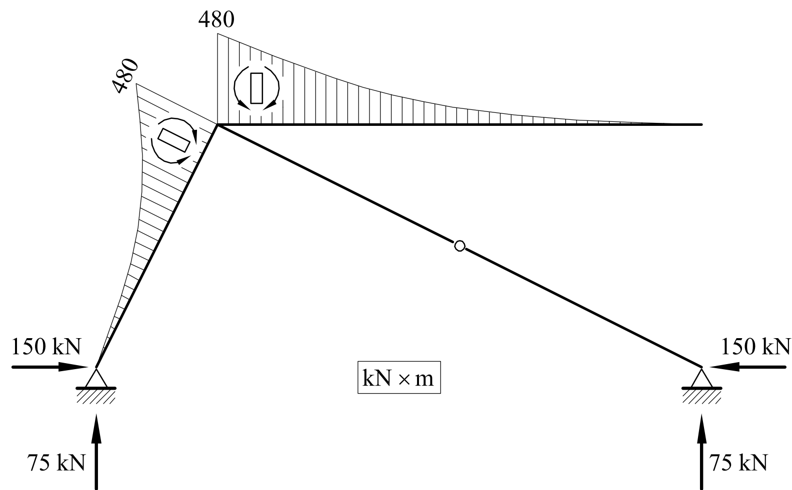


Fig. 2 Ley de momentos flectores y reacciones

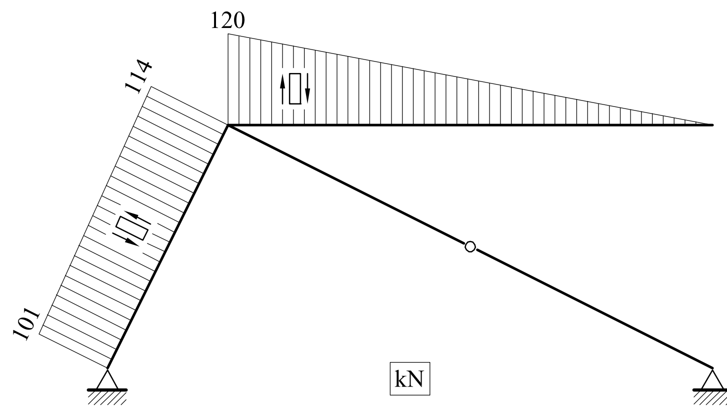


Fig. 3 Ley de esfuerzos cortantes

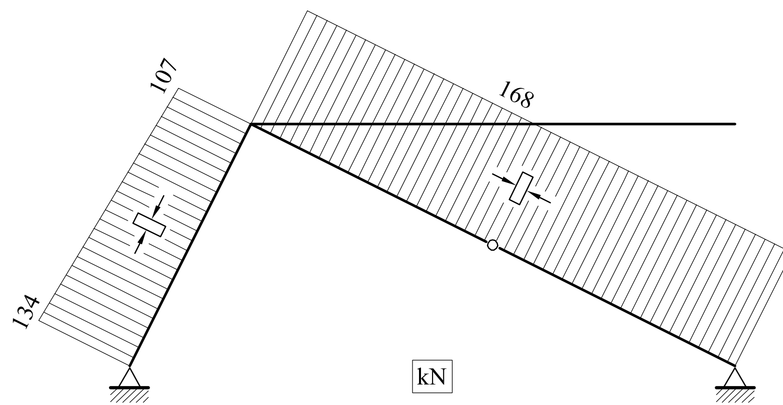


Fig. 4 Ley de esfuerzos axiles

Problema 2.32 *En la estructura que se acota en la figura 1, hallar las reacciones y dibujar las leyes de momentos flectores, esfuerzos cortantes y esfuerzos axiles.*

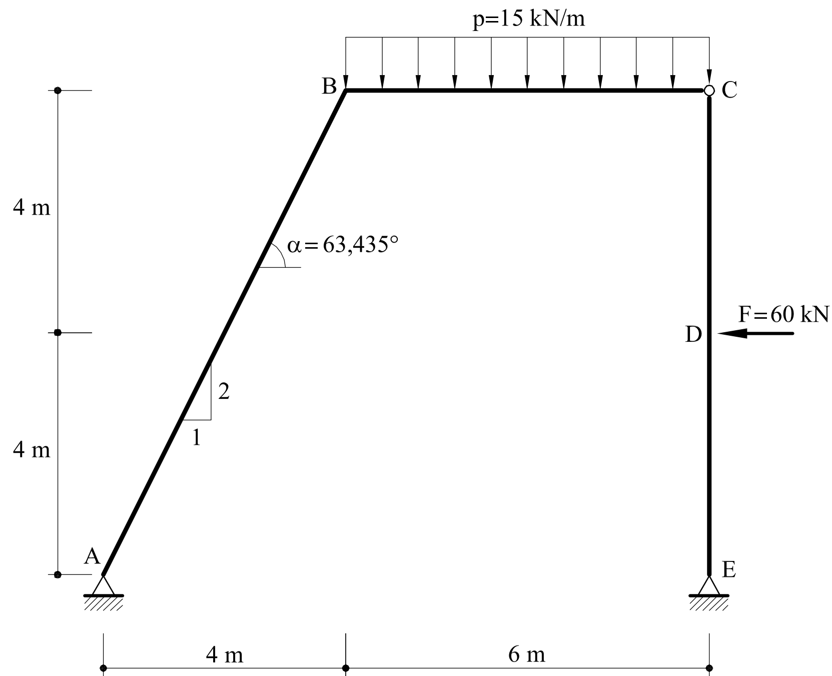


Fig. 1 Pórtico correspondiente al problema 2.32

Solución

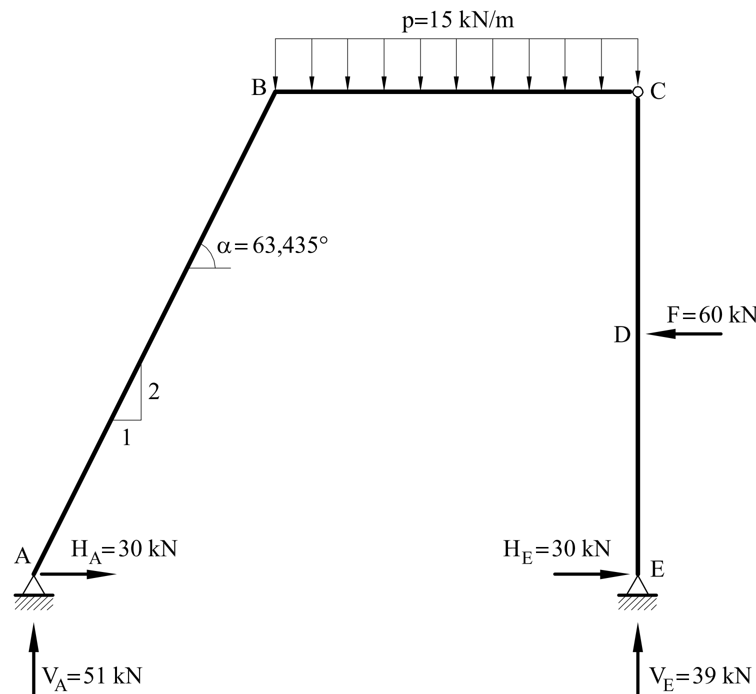


Fig. 2 Reacciones

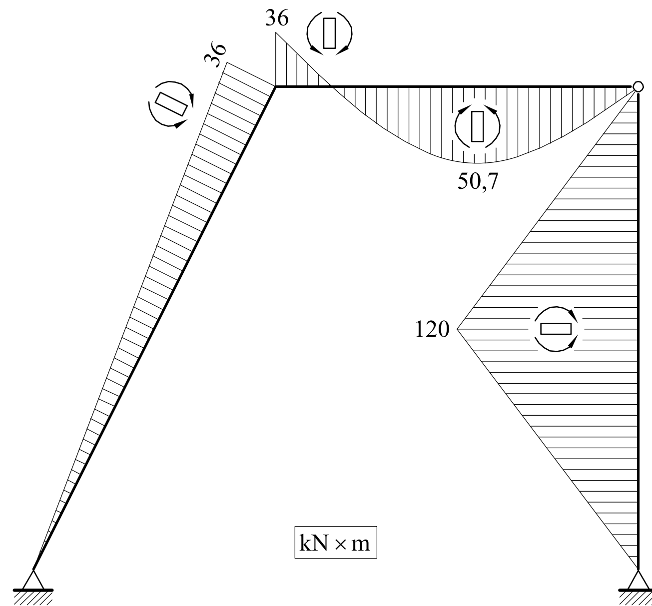


Fig. 3 Ley de momentos flectores

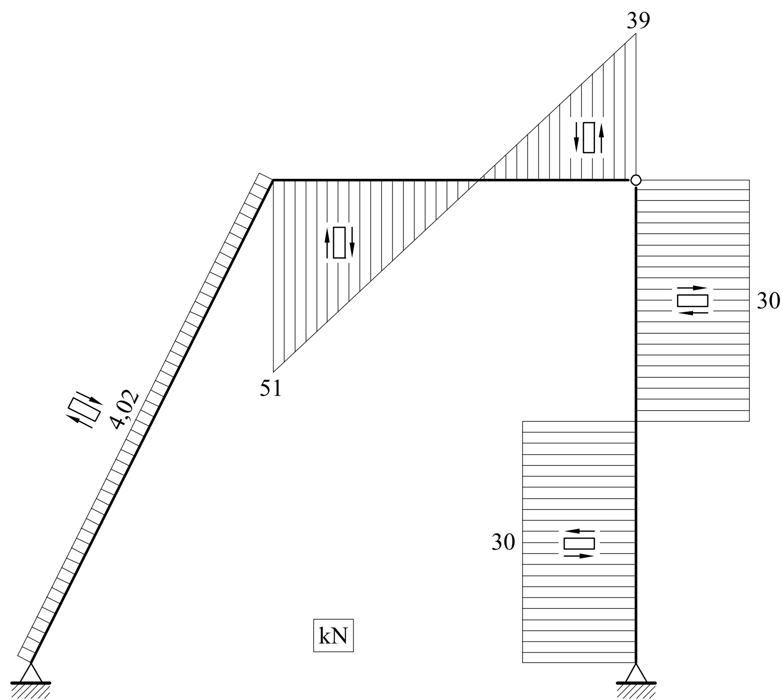


Fig. 4 Ley de esfuerzos cortantes

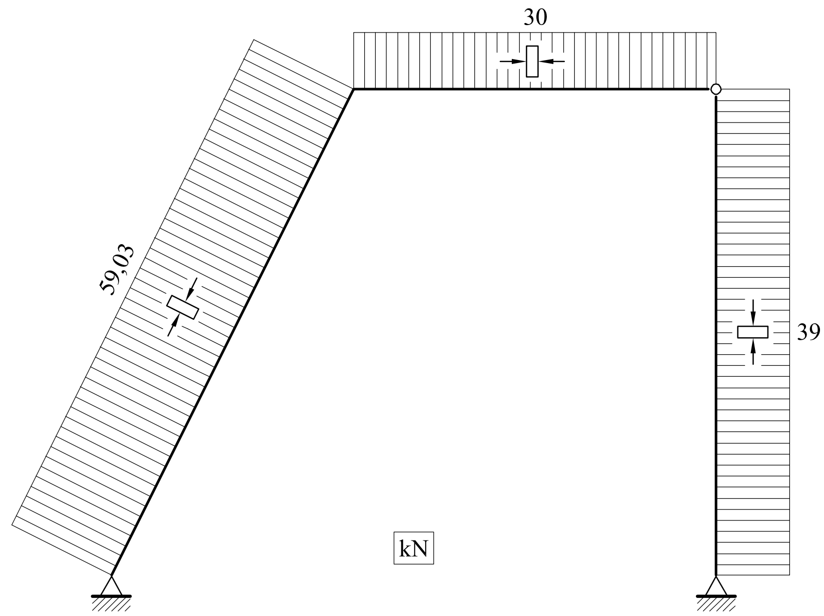


Fig. 5 Ley de esfuerzos axiles

Problema 2.33 *En el pórtico de la figura 1, hallar:*

1. *Reacciones en* A *y en* D
2. *Leyes de esfuerzos*

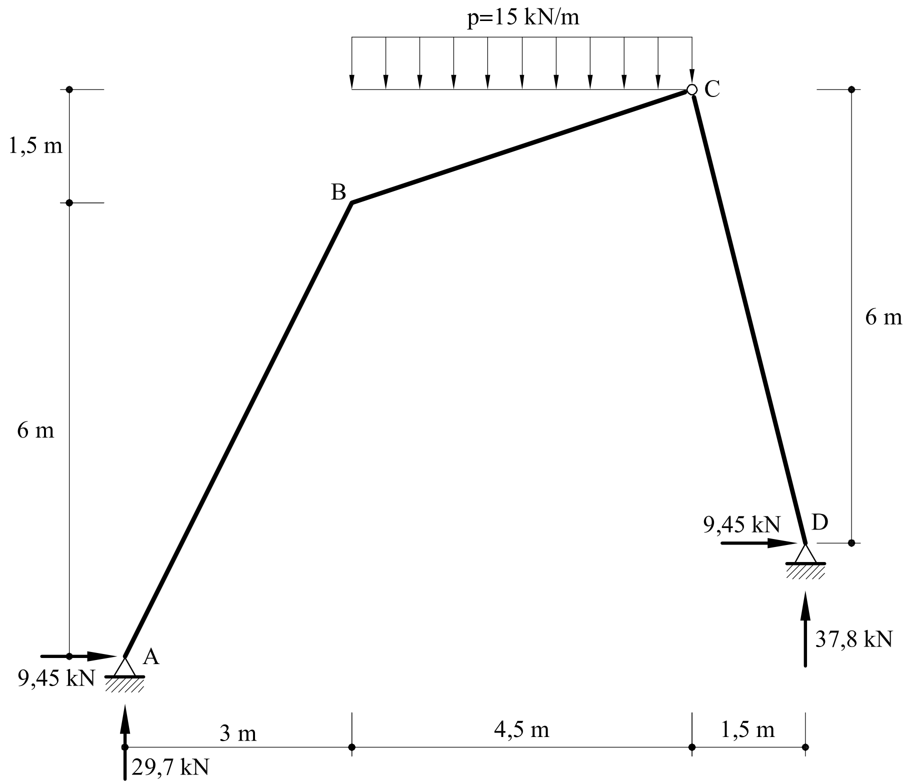


Fig. 1 Pórtico correspondiente al problema 2.33 y reacciones

Solución

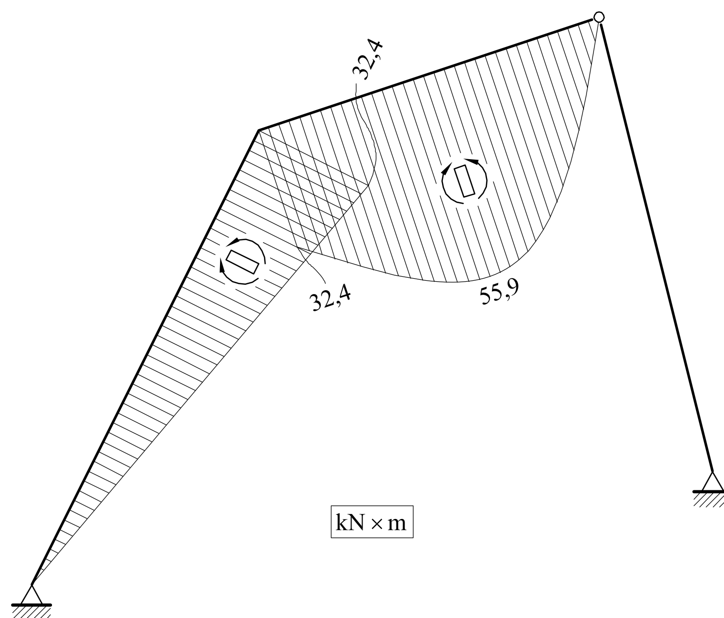


Fig. 2 Ley de momentos flectores

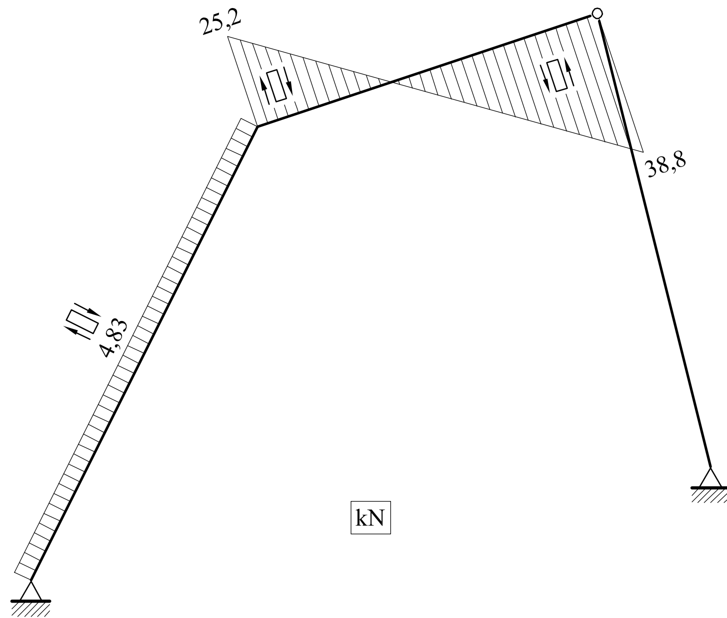


Fig. 3 Ley de esfuerzos cortantes

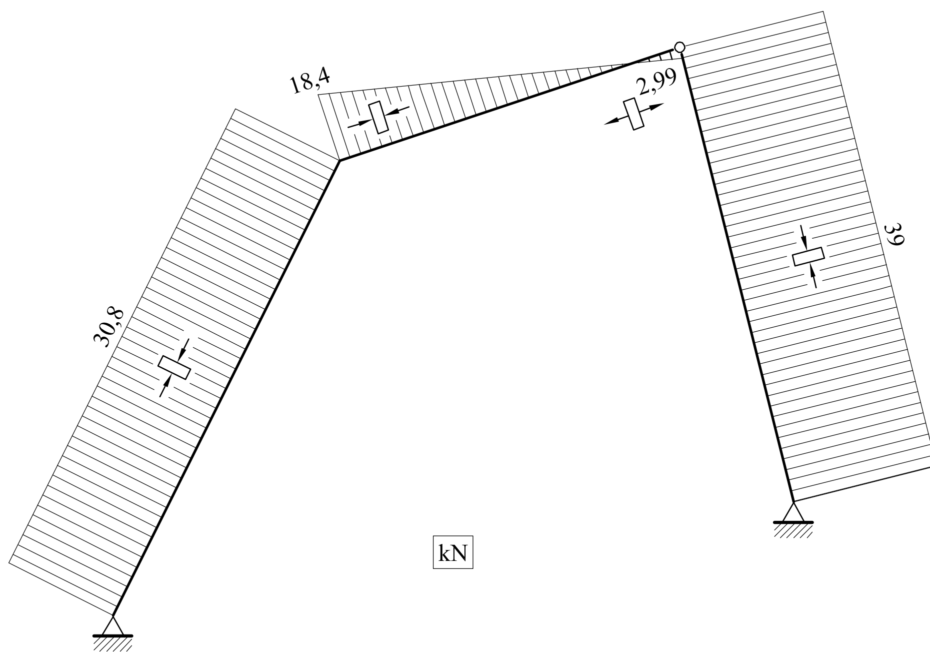


Fig. 4 Ley de esfuerzos axiles

Problema 2.34 *Obtener las leyes de esfuerzos para la estructura de la figura 1*

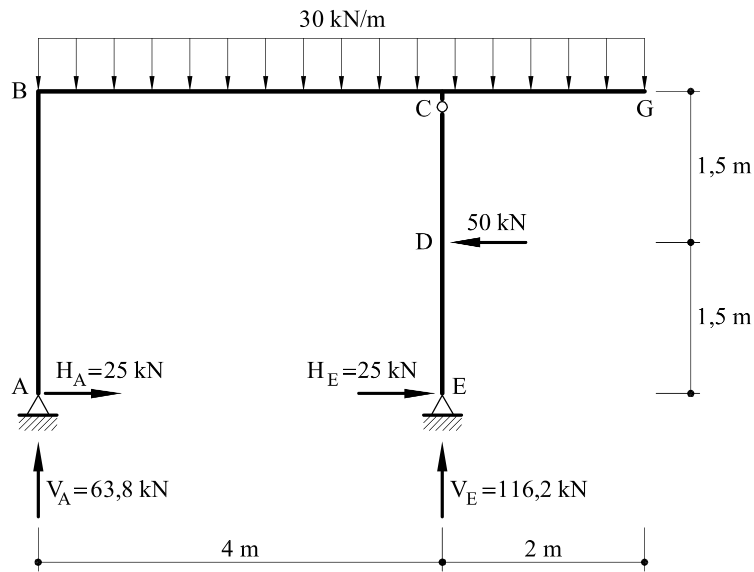


Fig. 1 Pórtico correspondiente al problema 2.34 y reacciones

Solución

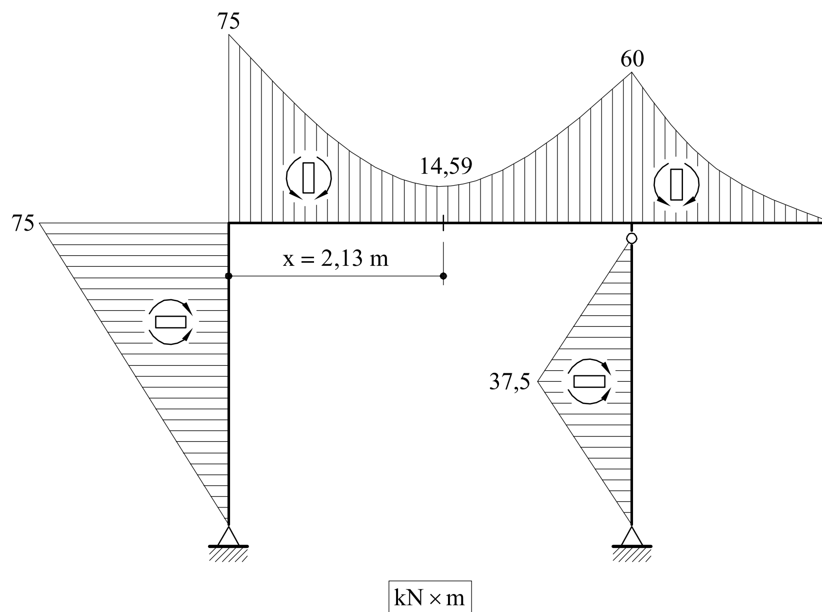


Fig. 2 Ley de momentos flectores

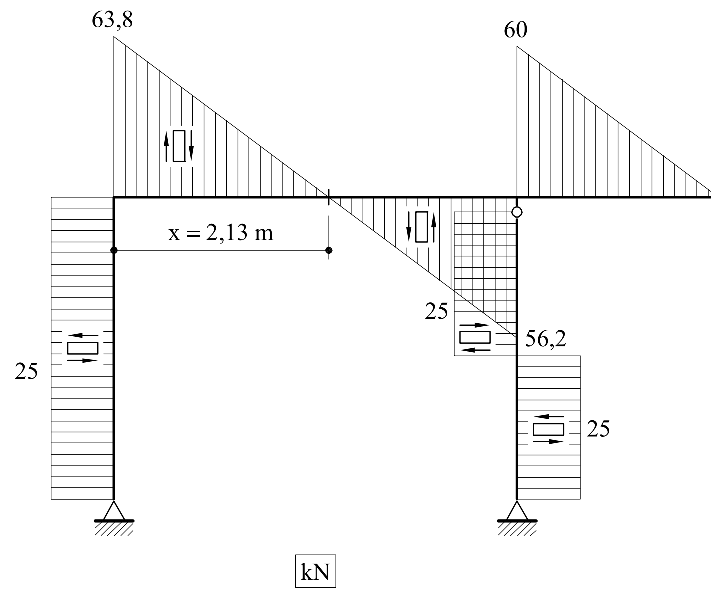


Fig. 3 Ley de esfuerzos cortantes

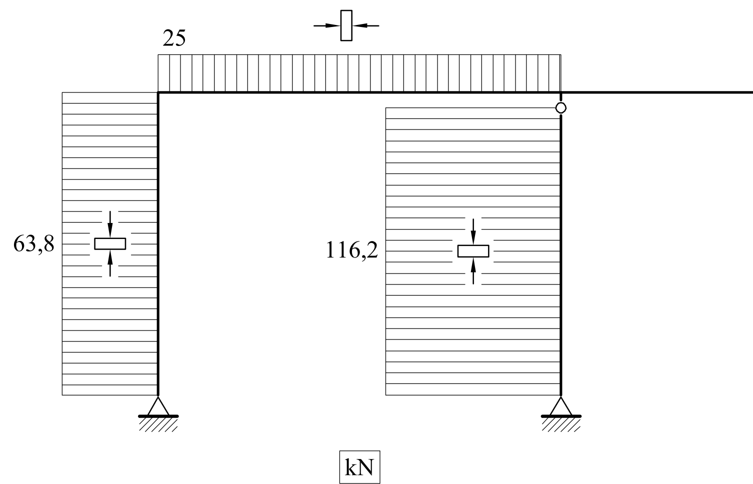


Fig. 4 Ley de esfuerzos axiles

Problema 2.35. *En la estructura que se acota en la figura 1, hallar y dibujar las reacciones y las leyes de esfuerzos.*

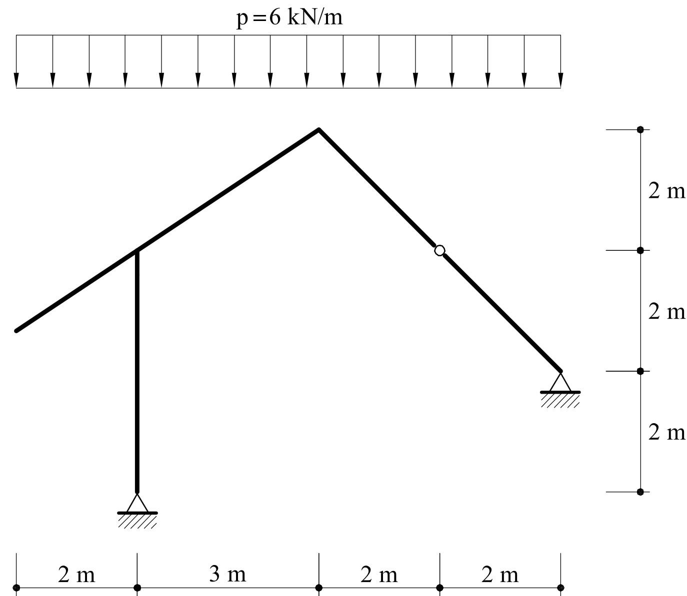


Fig.1 Estructura correspondiente al problema 2.35

Solución

Para determinar las reacciones se imponen las siguientes condiciones (figura 2)

- Momento flector en E igual a cero:

$$2V_F - 2H_F - 6 \times \frac{2^2}{2} = 0$$

es decir:

$$V_F - H_F = 6 \qquad \text{(a)}$$

- Momento en A igual a cero:

$$7V_F + 2H_F - 6 \times 9 \times 2{,}5 = 0$$

es decir:

$$7V_F + 2H_F = 135 \qquad \text{(b)}$$

- Suma de fuerzas verticales igual a cero:

$$V_A + V_F = 54 \qquad \text{(c)}$$

- Suma de fuerzas horizontales igual a cero:

$$H_A = H_F \qquad \text{(d)}$$

Las ecuaciones (a), (b), (c) y (d) forman un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Resolviendo:

$$V_F = 16{,}33\,kN$$
$$H_F = 10{,}33\,kN$$
$$H_A = 10{,}33\,kN$$
$$V_A = 37{,}67\,kN$$

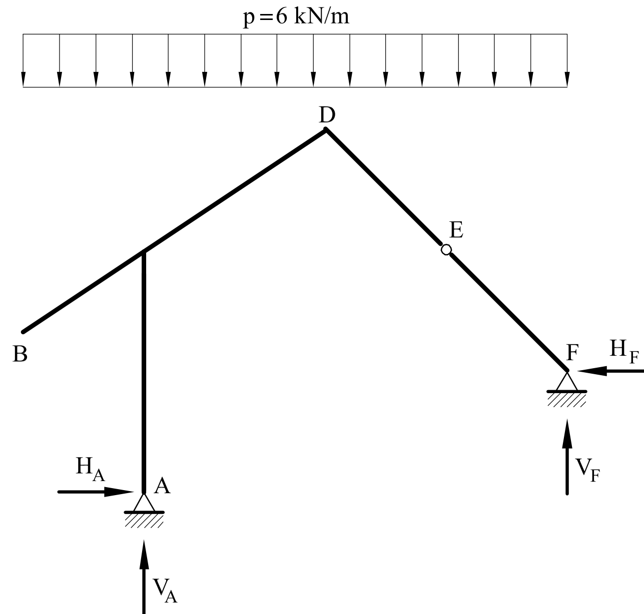


Fig.2 Reacciones en los apoyos

En las figuras 3, 4 y 5 pueden verse representadas las reacciones y las leyes de esfuerzos.

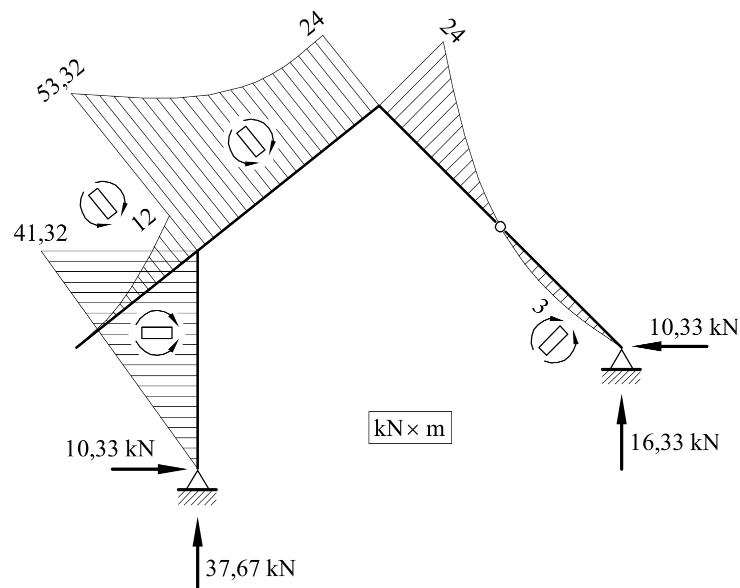


Fig.3 Reacciones y ley de momentos flectores

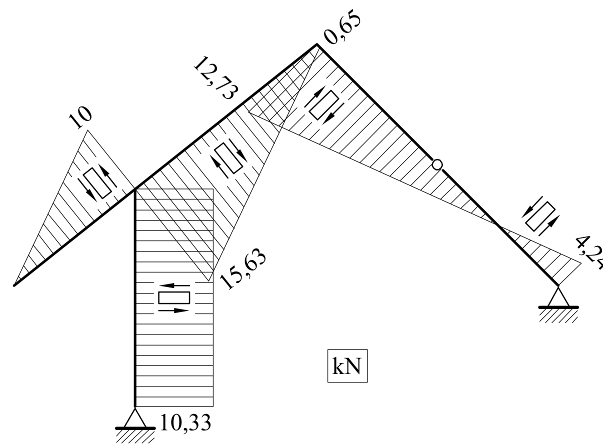


Fig.4 Ley de esfuerzos cortantes

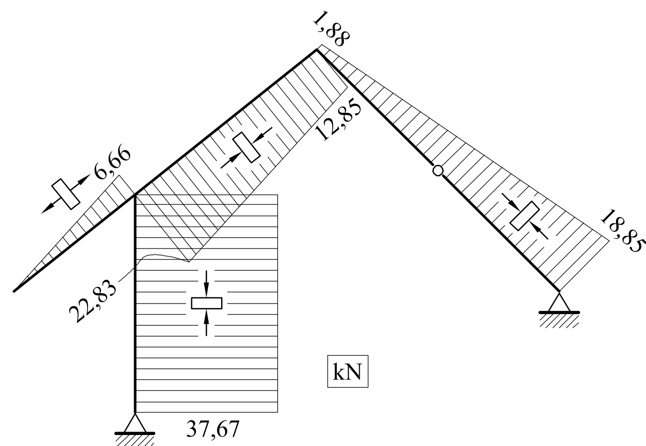


Fig.5 Ley de esfuerzos axiles

Problema 2.36 *En la estructura que se acota en la figura 1, hallar y dibujar las reacciones y las leyes de esfuerzos.*

p = 10 kN/m
4 m
4 m
60 kN
4 m 4 m 4 m

Fig.1 Estructura correspondiente al problema 2.36

Solución

En la figura 2 pueden verse dibujadas las reacciones. Asimismo, en las figuras 3, 4 y 5 se representan, respectivamente, las leyes de momentos flectores, esfuerzos cortantes y esfuerzos axiles.

p = 10 kN/m
60 kN
110 kN
60 kN
30 kN

Fig.2 Reacciones

Fig.3 Ley de momentos flectores

Fig.4 Ley de esfuerzos cortantes

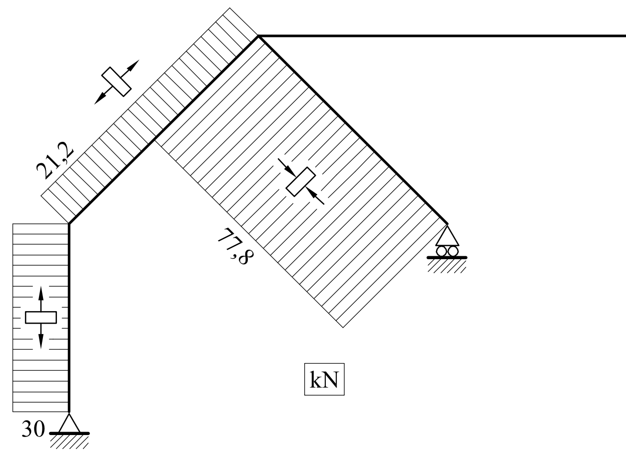


Fig.5 Ley de esfuerzos axiles

Problema 2.37 *En el pórtico que se representa en la figura 1, hallar las reacciones y leyes de esfuerzos.*

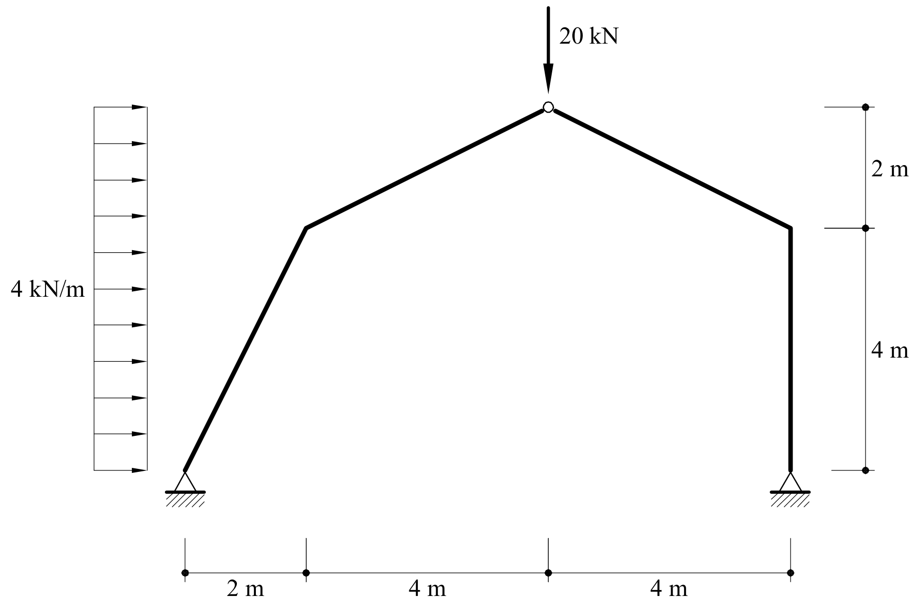


Fig.1 Pórtico correspondiente al problema 2.37

Solución

- Como el momento flector en C es nulo, $\dfrac{V_E}{H_E} = \dfrac{6}{4} = 1,5$
- Tomando momentos respecto a A

$$10V_E - 20\times 6 - 4\times 6\times 3 = 0$$
$$V_E = 19,2\,kN$$
$$H_E = \frac{V_E}{1,5} = 12,8\,kN$$

- Suma de fuerzas horizontales igual a cero:

$$H_A + H_E = 4\times 6$$
$$H_A = 24 - 12,8 = 11,2\,kN$$

- Suma de fuerzas verticales igual a cero, es decir $V_A = 0,8\,kN$

En la figura 2 pueden verse representadas las reacciones

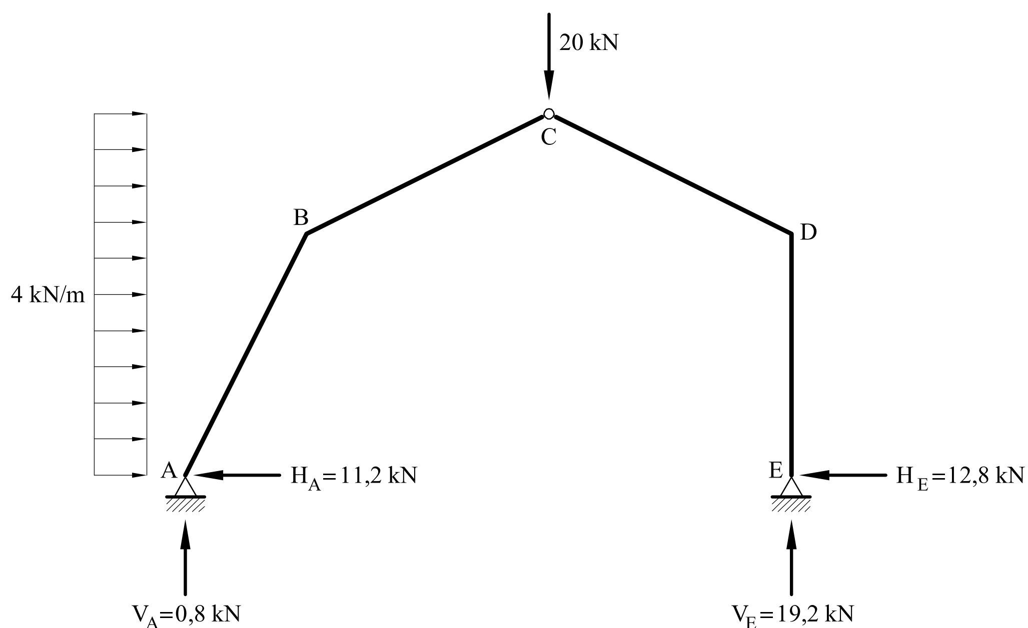


Fig.2 Reacciones

En la figura 3 puede verse representada la ley de momentos flectores

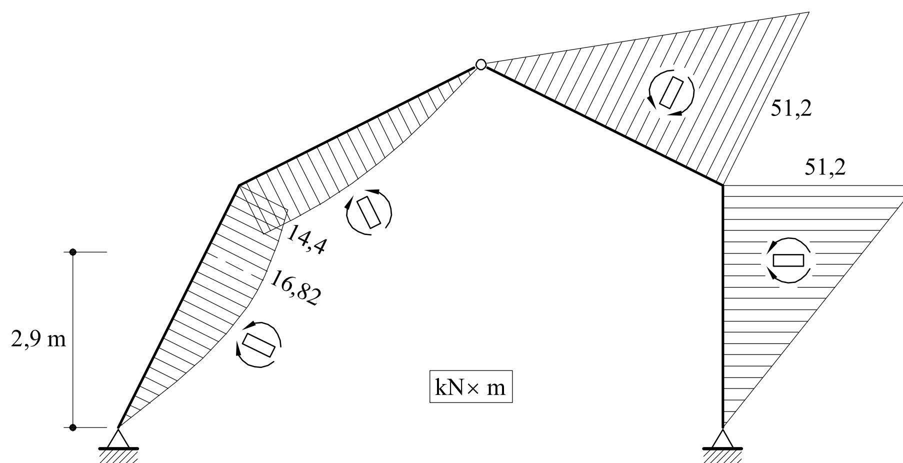


Fig.3 Ley de momentos flectores

En la figura 4 y 5 pueden verse representadas, respectivamente, las leyes de esfuerzos cortantes y esfuerzos axiles.

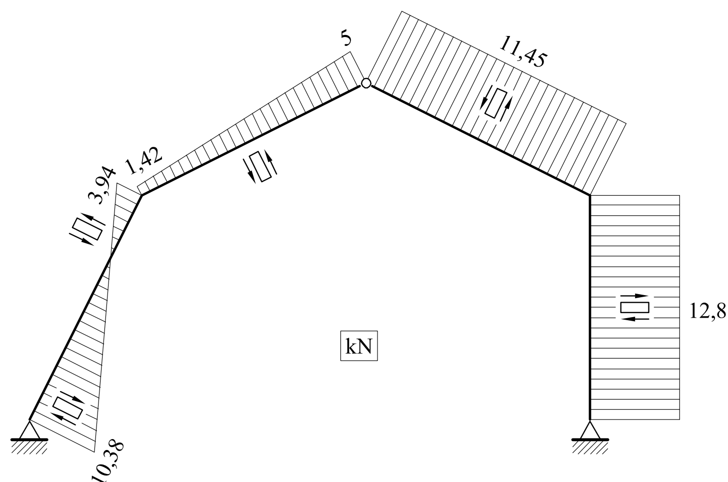


Fig.4 Ley de esfuerzos cortantes

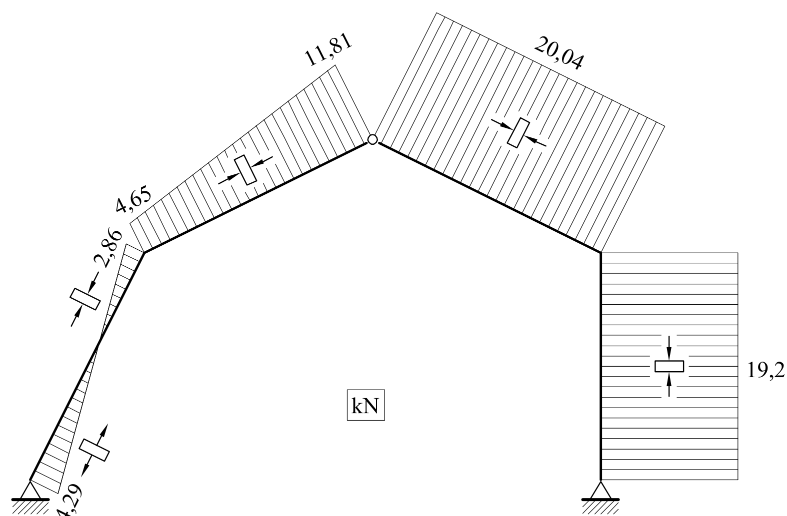


Fig.5 Ley de esfuerzos axiles

Asimismo, en la figura 6 puede verse el equilibrio de fuerzas de las barras *BC* y *AB.*

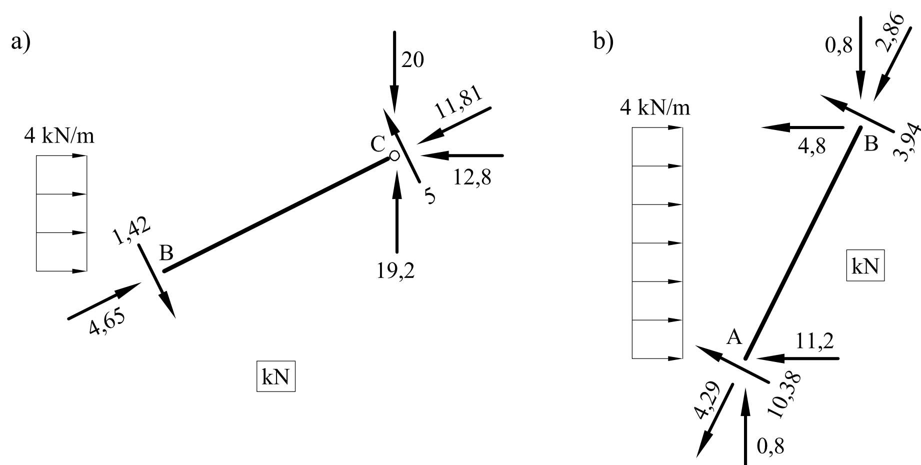


Fig.6 a) Equilibrio de fuerzas de la barra BC. B) Equilibrio de fuerzas de la barra AB

Problema 2.38 *En el pórtico representado en la figura 1, hallar las reacciones y las leyes de esfuerzos.*

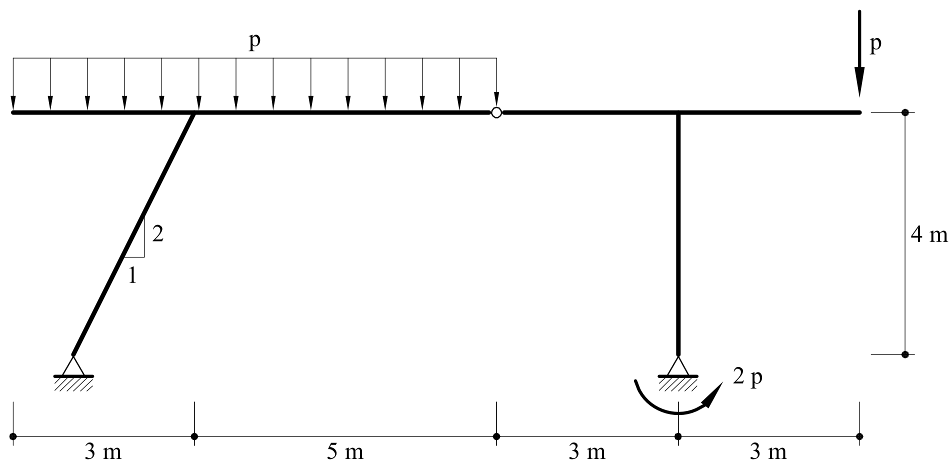


Fig.1 Pórtico correspondiente al problema 2.38

Solución

A partir de las ecuaciones de equilibrio

$$\sum M_c = 0 \Rightarrow -8p \cdot 3 - p \cdot 13 + 2p + 10V_F = 0 \Rightarrow V_F = 3{,}5p$$
$$\sum F_V = 0 \Rightarrow V_C + V_F - 8p - p = 0 \qquad \Rightarrow V_C = 5{,}5p$$
$$\sum M_{fD} = 0 \Rightarrow 3V_F - 4H_F + 2p - 6p = 0 \qquad \Rightarrow H_F = 1{,}625p$$
$$\sum F_H = 0 \Rightarrow H_C - H_F = 0 \qquad \Rightarrow H_C = 1{,}625p$$

En la figura 2, pueden verse representadas las reacciones

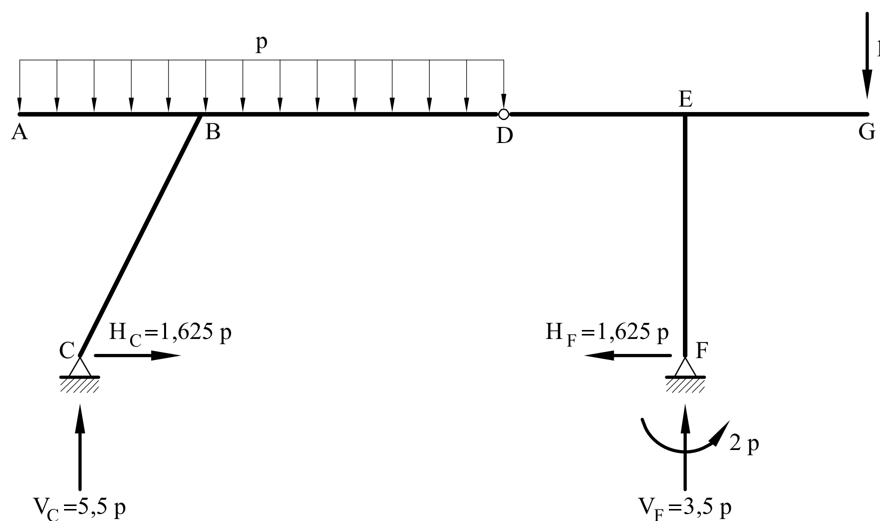


Fig.2 Reacciones

En la figura 3 se dibujan las leyes de momentos flectores

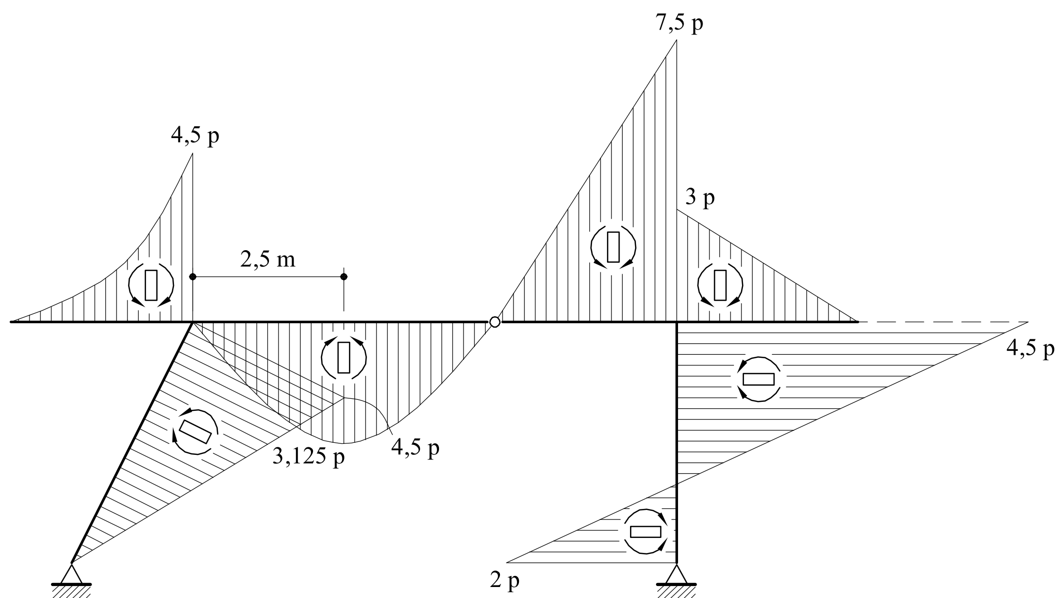


Fig.3 Ley de momentos flectores

En las figuras 4 y 5 se hallan representadas las leyes de cortantes y axiles

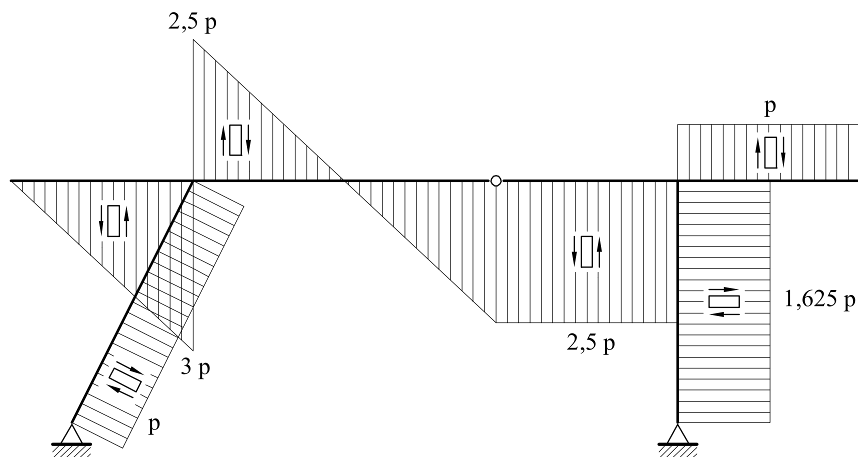


Fig.4 leyes de esfuerzos cortantes

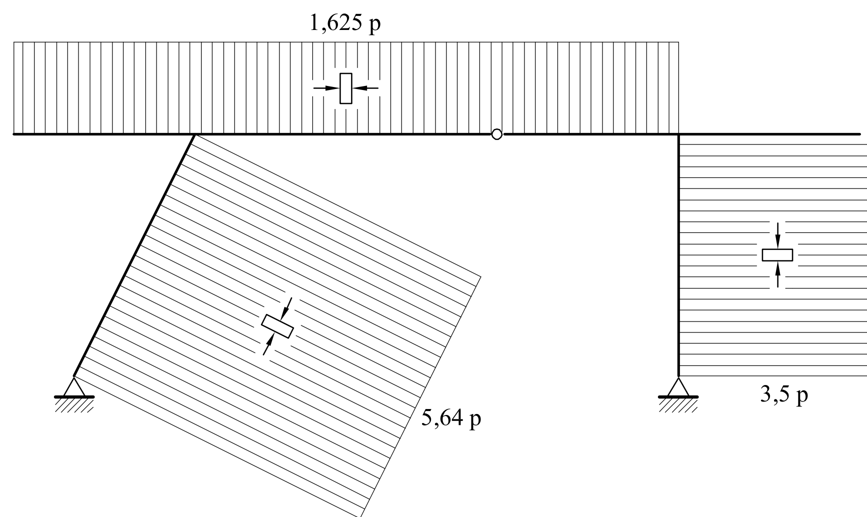


Fig.5 Leyes de esfuerzos axiles

Problema 2.39 *En el pórtico de la figura 1, hallar:*

1. *Reacciones en A y en E*
2. *Ley de momentos flectores cortantes y axiles*

Solución

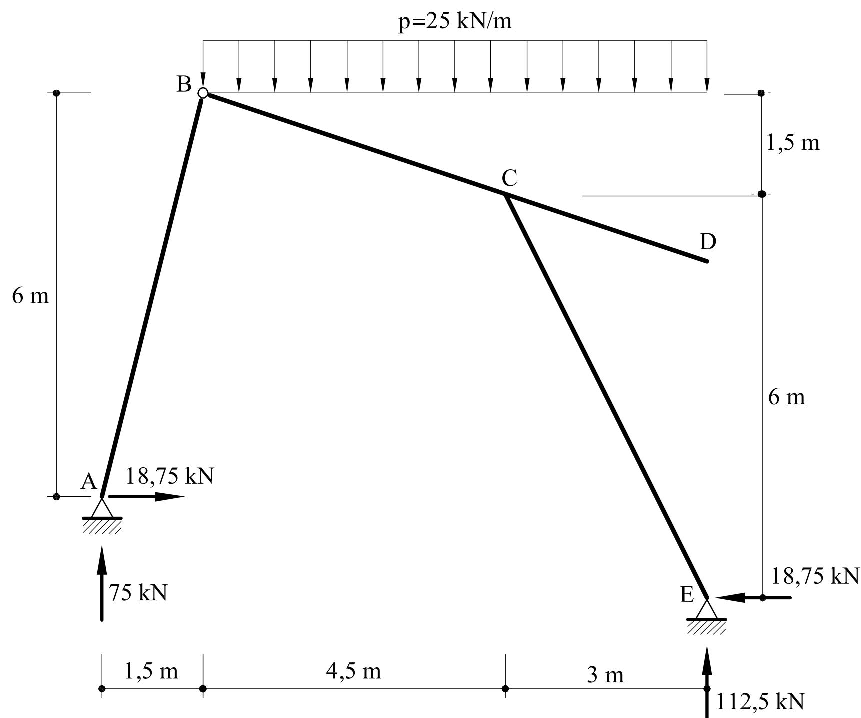


Fig. 1 Pórtico correspondiente al problema 2.39 y reacciones

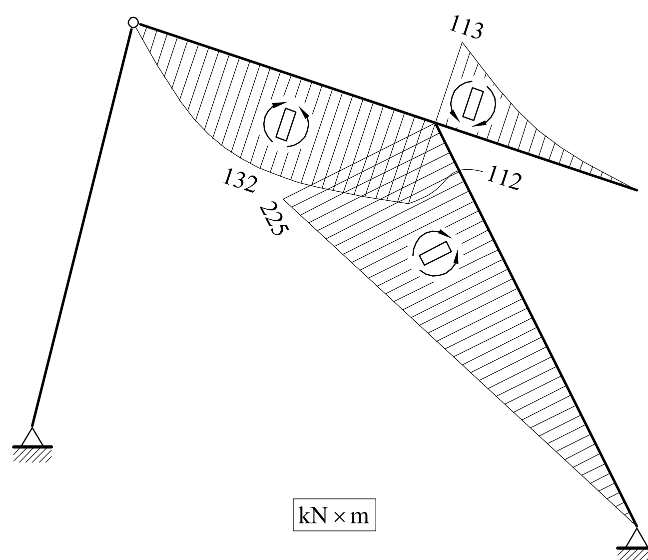


Fig. 2 Ley de momentos flectores

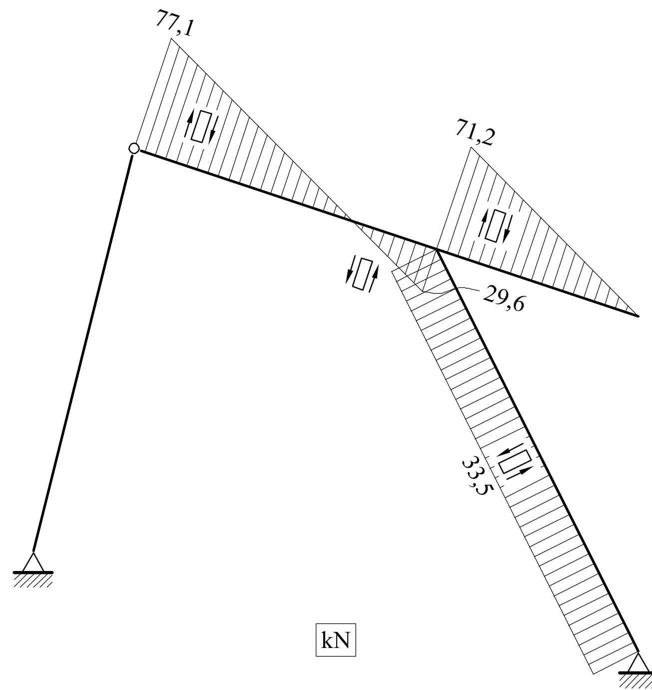


Fig. 3 Ley de esfuerzos cortantes

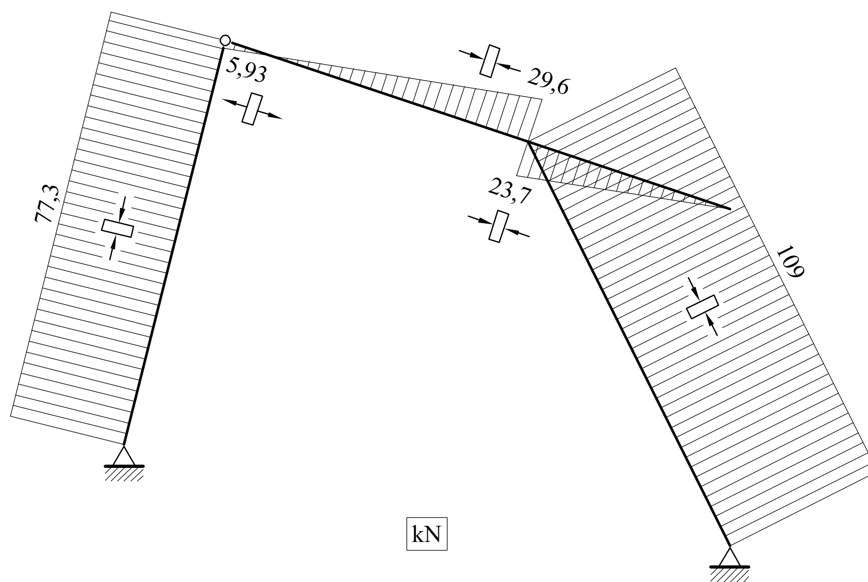


Fig. 4 Ley de esfuerzos axiles

Problema 2.40 *En la estructura que se acota en la figura 1, dibujar:*

- *Reacciones*
- *Leyes de momentos flectores*
- *Leyes de esfuerzos cortantes*
- *Leyes de esfuerzos axiles*

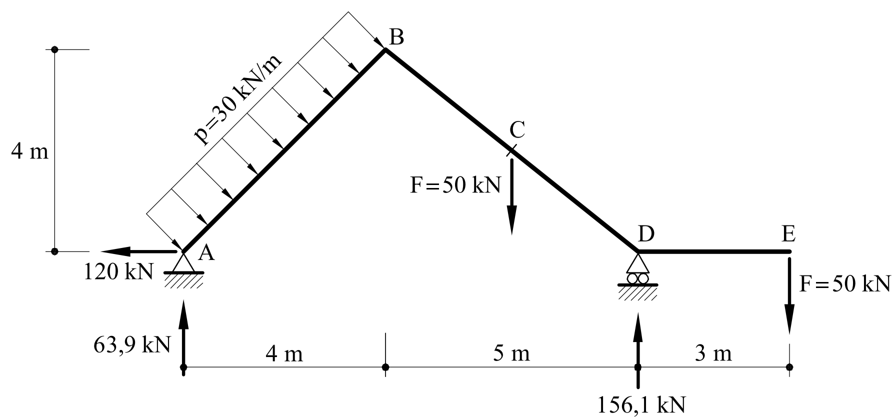


Fig. 1 Pórtico correspondiente al problema resuelto 2.40 y reacciones

Solución

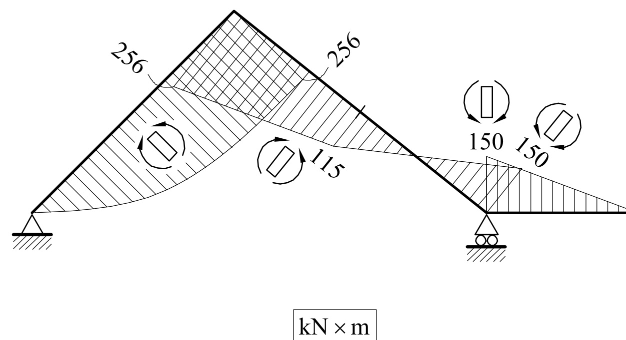


Fig. 2 Ley de momentos flectores

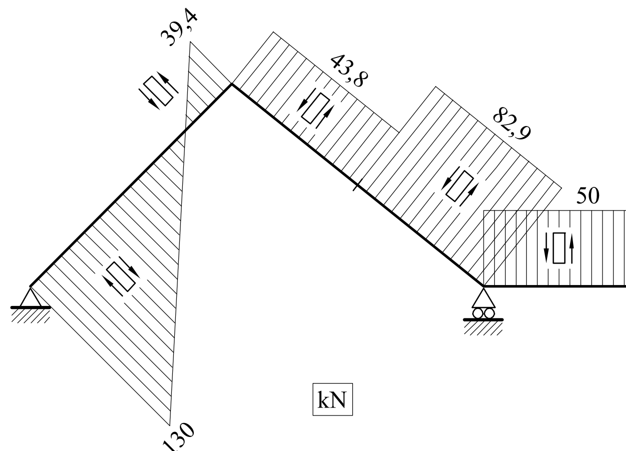


Fig. 3 Ley de esfuerzos cortantes

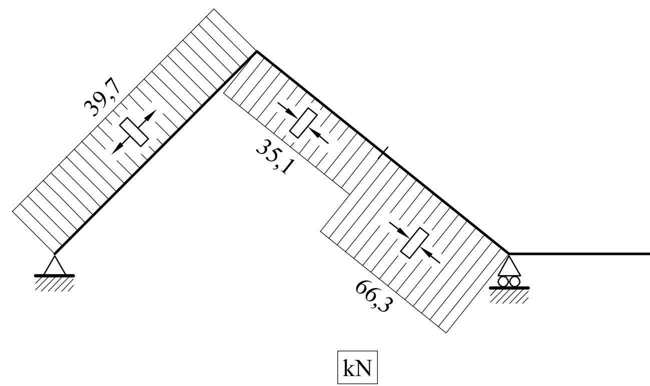


Fig. 4 Ley de esfuerzos axiles

Problema 2.41 *Dada la viga de la figura 1, hallar:*

- *Reacciones en los apoyos*
- *Ley de momentos flectores*
- *Ley de esfuerzos cortantes*
- *Ley de esfuerzos axiles*

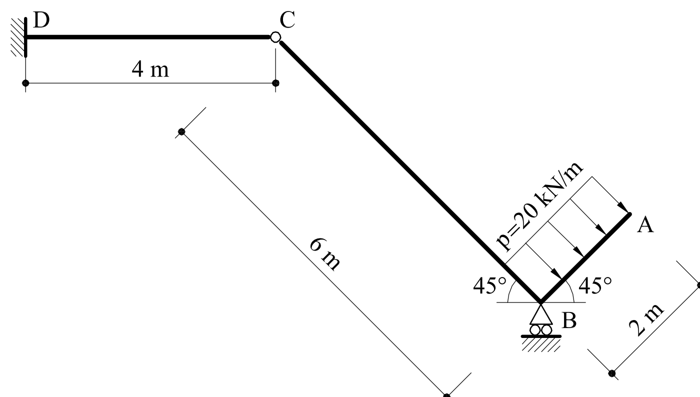


Fig. 1 Pórtico correspondiente al problema 2.41

Solución

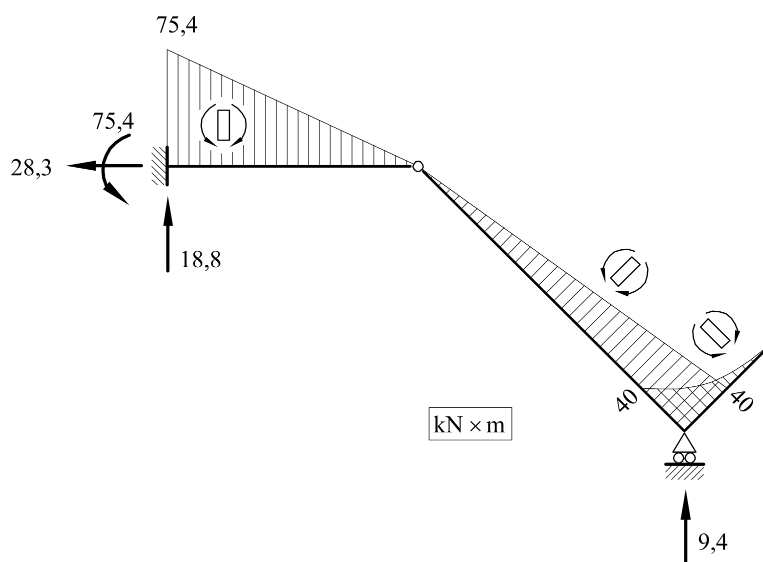


Fig .2 Ley de momentos flectores y reacciones

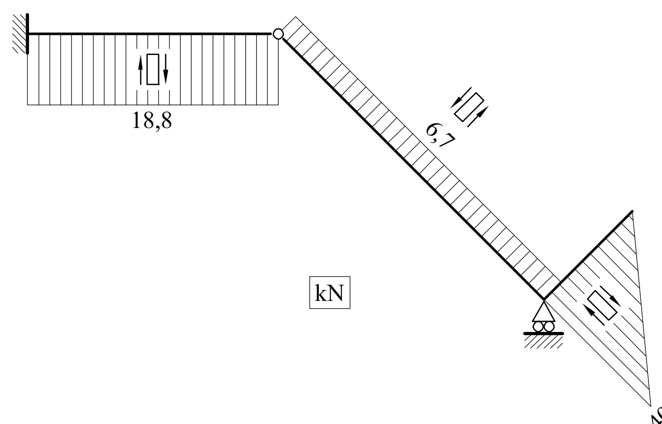


Fig. 3 Ley de esfuerzos cortantes

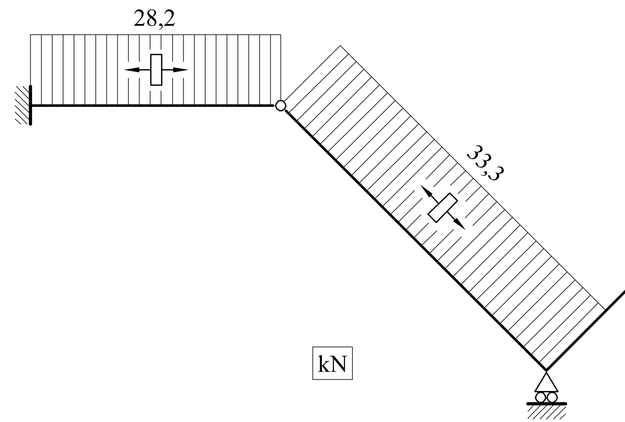


Fig. 4 Ley de esfuerzos axiles

Problema 2.42 *Dada la viga de la figura 1 con las dimensiones y cargas indicadas.*

Se pide:

- *Reacciones en los apoyos.*
- *Ley de momentos flectores.*
- *Ley de esfuerzos cortantes.*
- *Ley de esfuerzos axiles.*

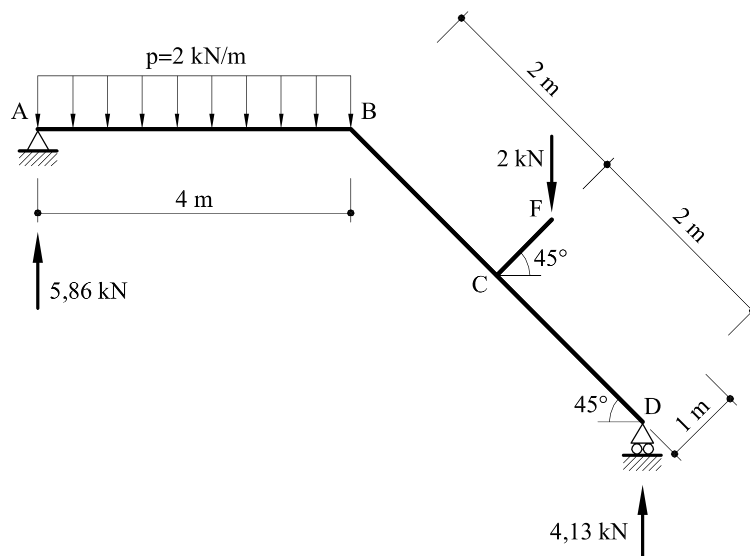


Fig. 1 Pórtico correspondientes al problema 2.42

Solución

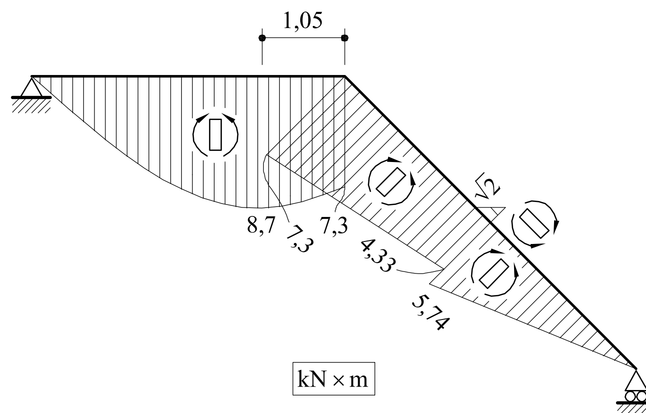


Fig. 2 Ley de momentos flectores

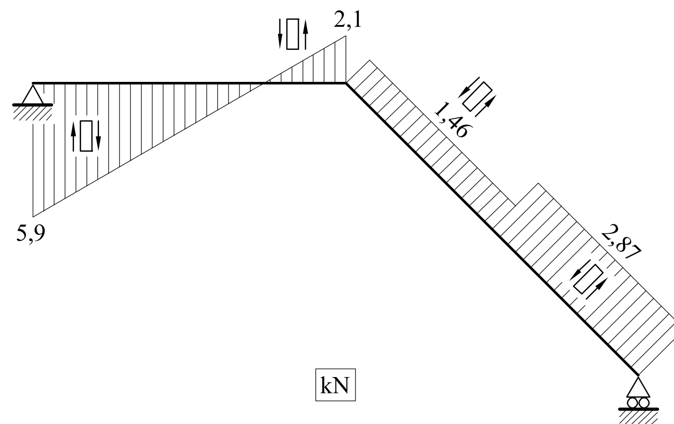


Fig. 3 Ley de esfuerzos cortantes

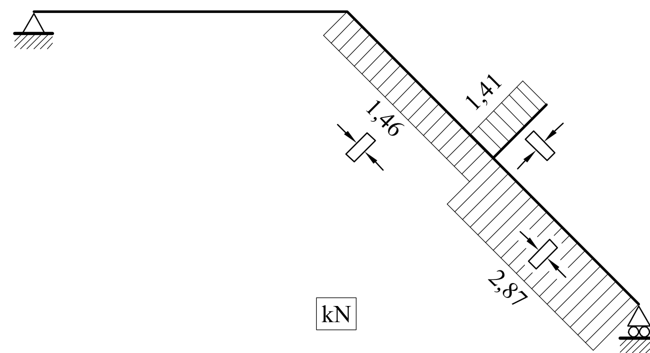


Fig. 4 Ley de esfuerzos axiles

Problema 2.43 *Construir los diagramas de esfuerzos cortantes, momentos flectores y esfuerzos axiles del pórtico indicado en la figura 1*

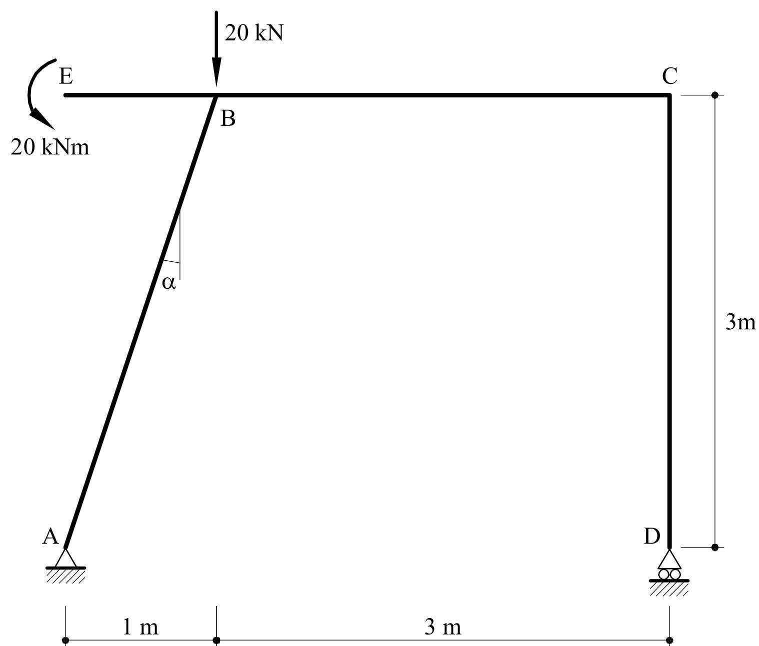


Fig. 1 Pórtico correspondiente al problema 2.43

Solución

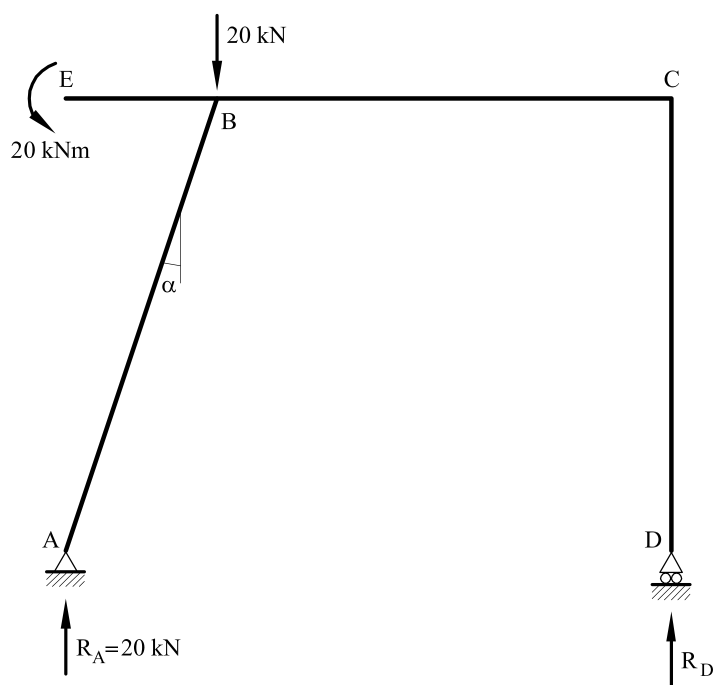


Fig. 2 Reacciones

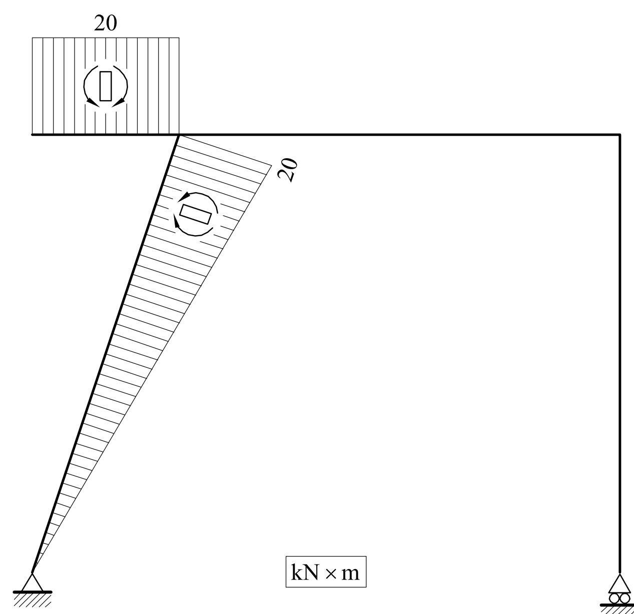


Fig. 3 Ley de momentos flectores

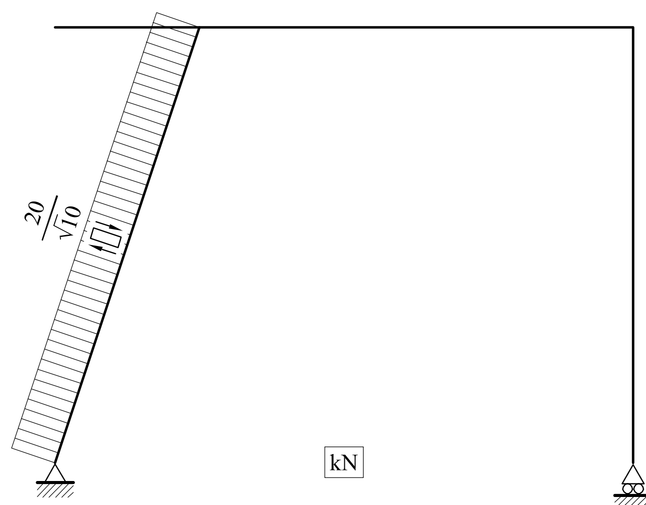


Fig. 4 Ley de esfuerzos cortantes

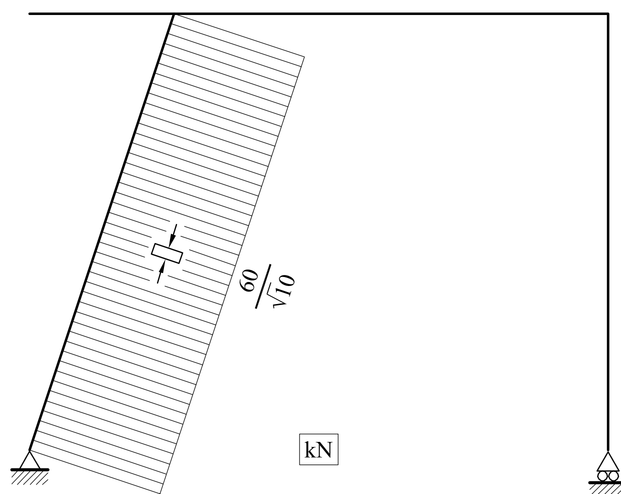


Fig. 5 Ley de esfuerzos axiles

Problema 2.44 *En el pórtico de la figura 1, determinar las reacciones en los apoyos así como dibujar las leyes de momentos flectores, esfuerzos cortantes y esfuerzos axiles.*

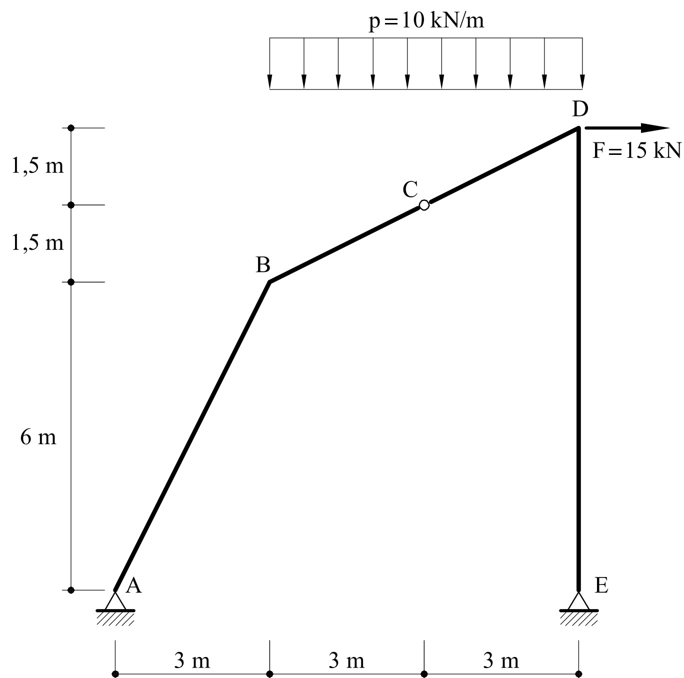


Fig.1 Pórtico correspondiente al problema 2.44

Solución

En las figuras 2, 3, 4 y 5 pueden verse dibujadas, respectivamente, las reacciones, leyes de momentos flectores, leyes de esfuerzos cortantes y leyes de esfuerzos axiles.

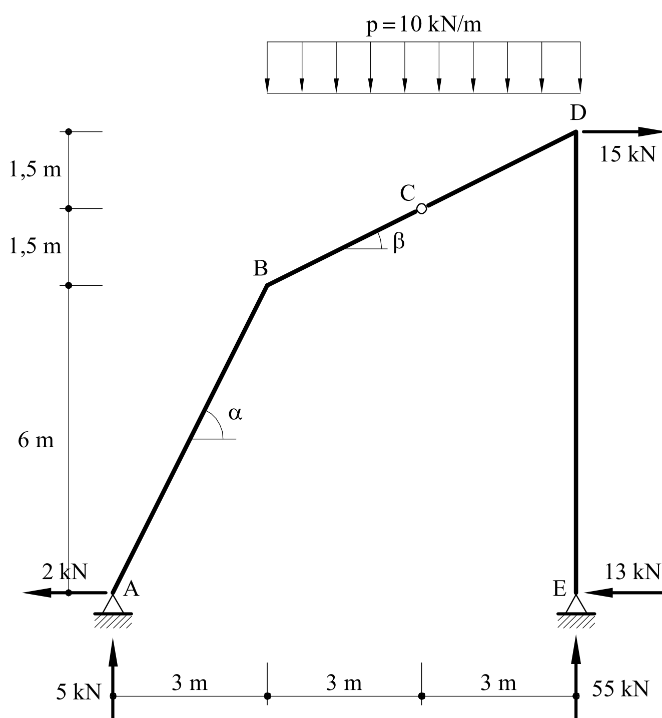


Fig.2 Reacciones

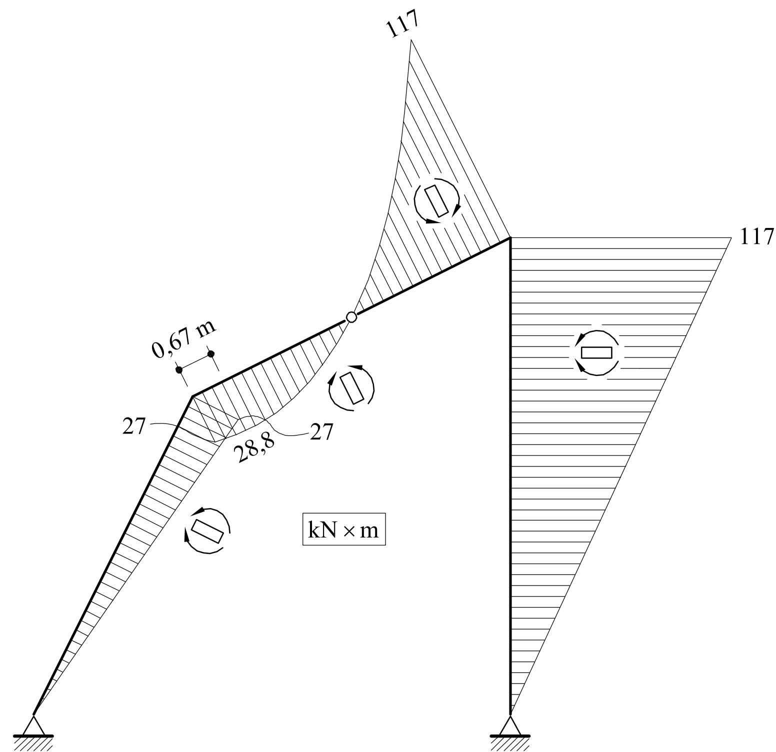


Fig.3 Ley de momentos flectores

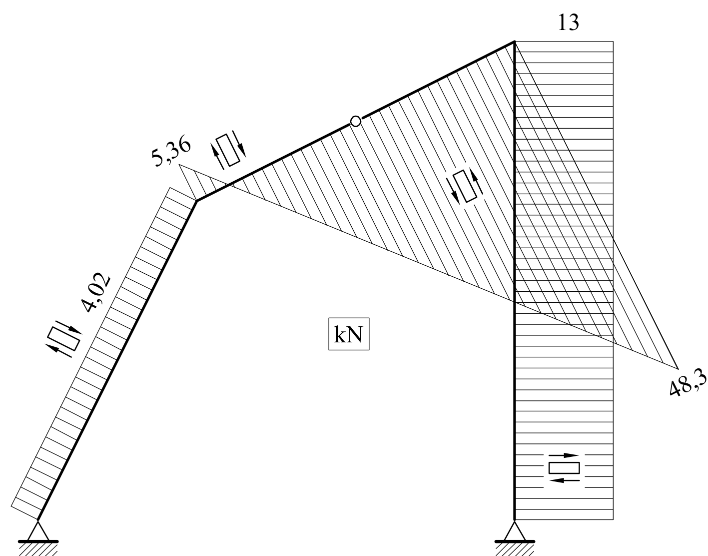


Fig.4 Ley de esfuerzos cortantes

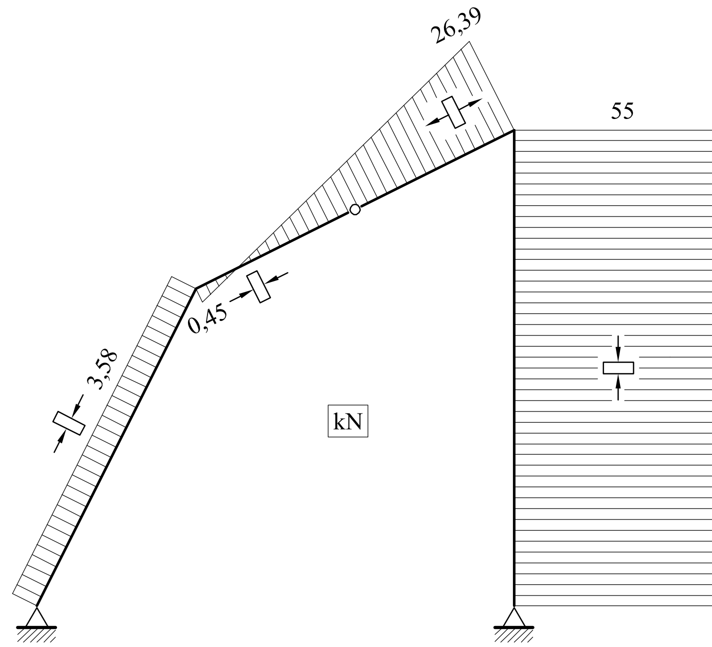


Fig.5 Ley de esfuerzos axiles

Problema 2.45 *Hallar las reacciones y dibujar las leyes de esfuerzos en la estructura de la figura 1.*

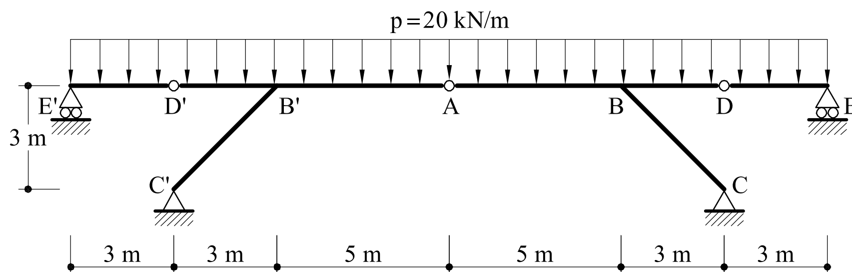


Fig.1 Estructura correspondiente al problema 2.45

Solución

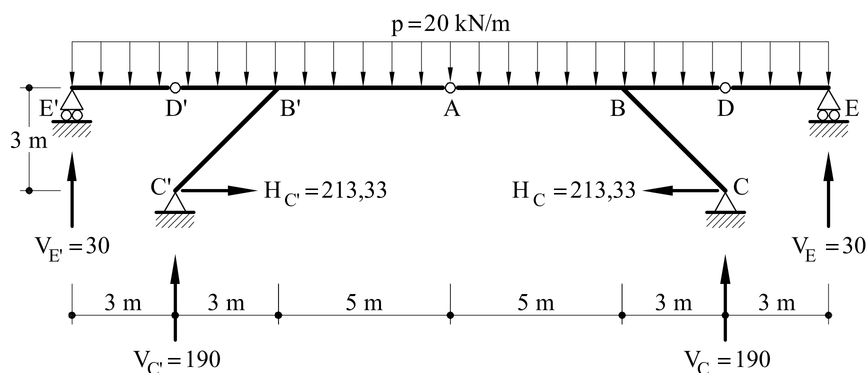


Fig.2 Reacciones

Observando la figura 2,

$$V_E = V_{E'} = 30\,kN$$

$$V_C = V_{C'} = 190\,kN$$

Tomando momentos flectores respecto a *A*

$$-3H_C + 190 \times 8 + 30 \times 11 - 20 \times \frac{11^2}{2} = 0$$

$$H_C = 213{,}33\,kN$$

En la figura 3 se representa la ley de momentos flectores, en la figura 4 la ley de esfuerzos cortantes y en la figura 5 los esfuerzos axiles

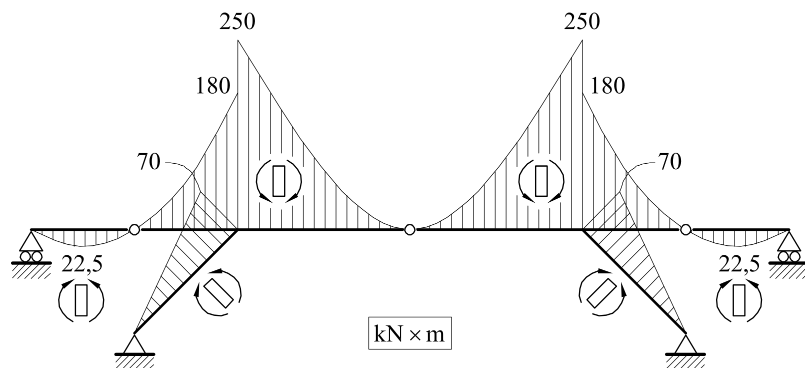


Fig.3 Ley de momentos flectores

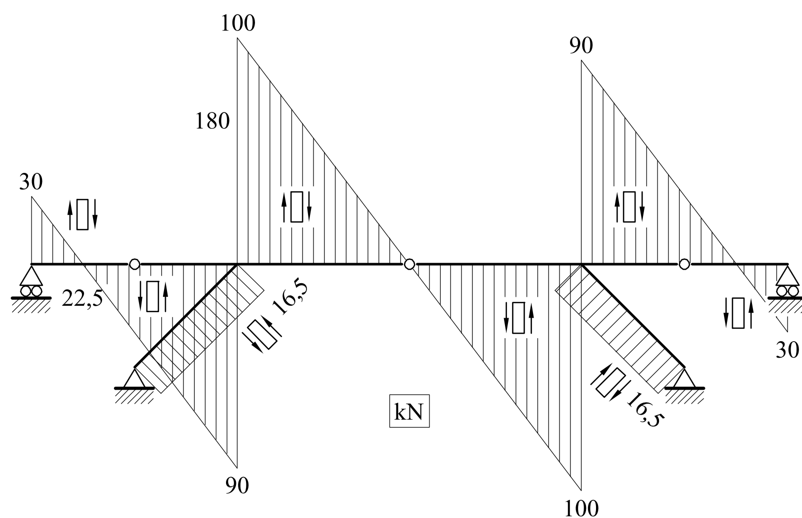


Fig.4 Esfuerzos cortantes

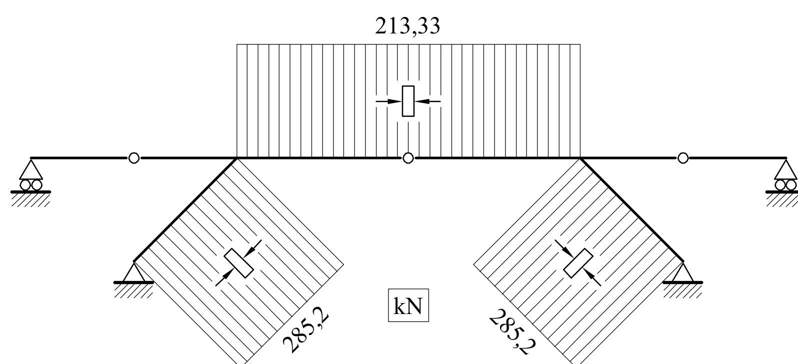


Fig.5 Esfuerzos axiles

Problema 2.46 *En la estructura que se acota en la figura 1, hallar:*

- *Ley de momentos flectores.*
- *Ley de esfuerzos cortantes.*
- *Ley de esfuerzos axiles.*
- *Reacciones*

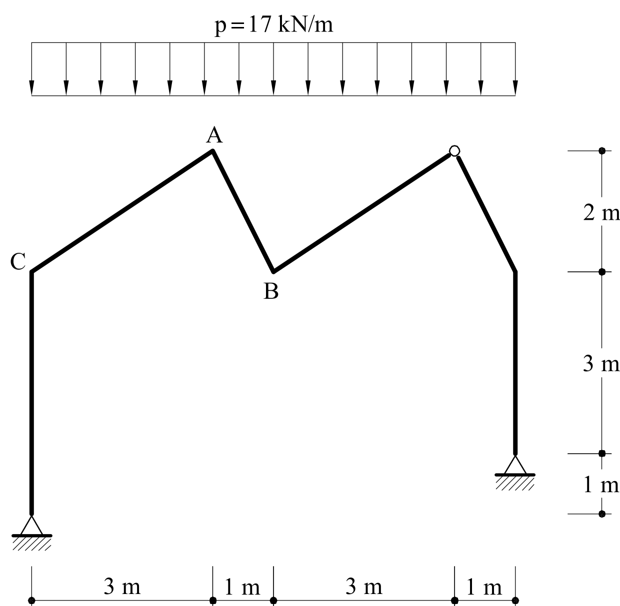


Fig.1 Pórtico correspondiente al problema 2.46

Solución

En las figuras 2, 3 y 4 se representan las leyes de momentos flectores, cortantes y axiles.

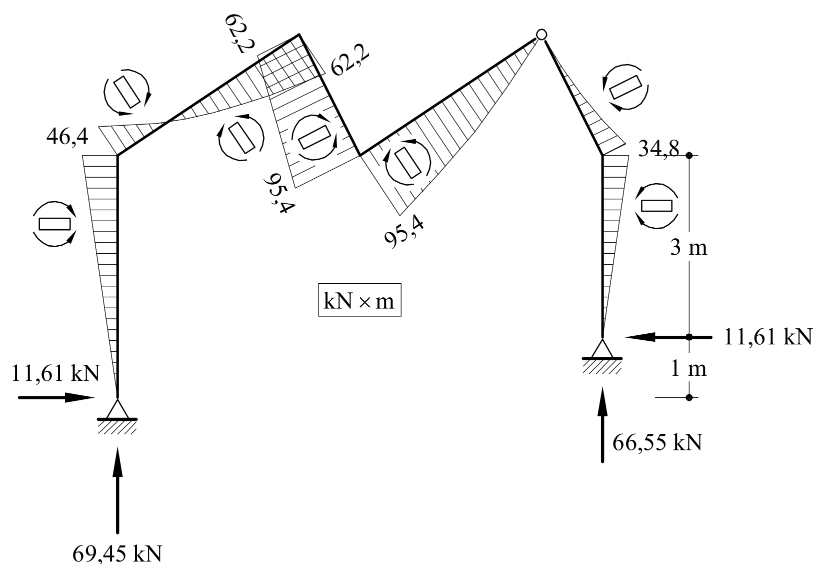


Fig.2 Ley de momentos flectores

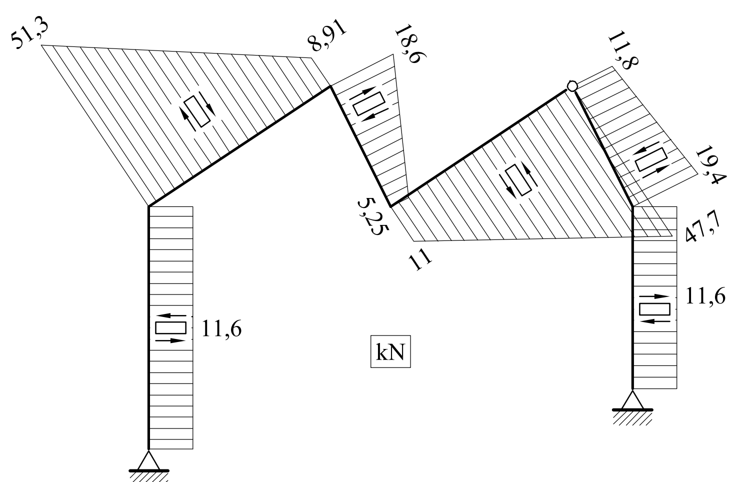


Fig.3 Ley de esfuerzos cortantes

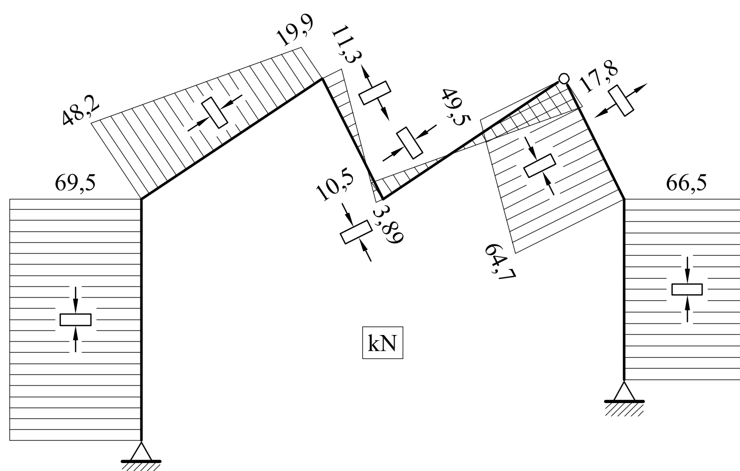


Fig.4 Ley de esfuerzos axiles

Problema 2.47 *En el pórtico que se representa en la figura 1, hallar: Reacciones, ley de momentos flectore, ley de esfuerzos cortantes y ley de esfuerzos axiles.*

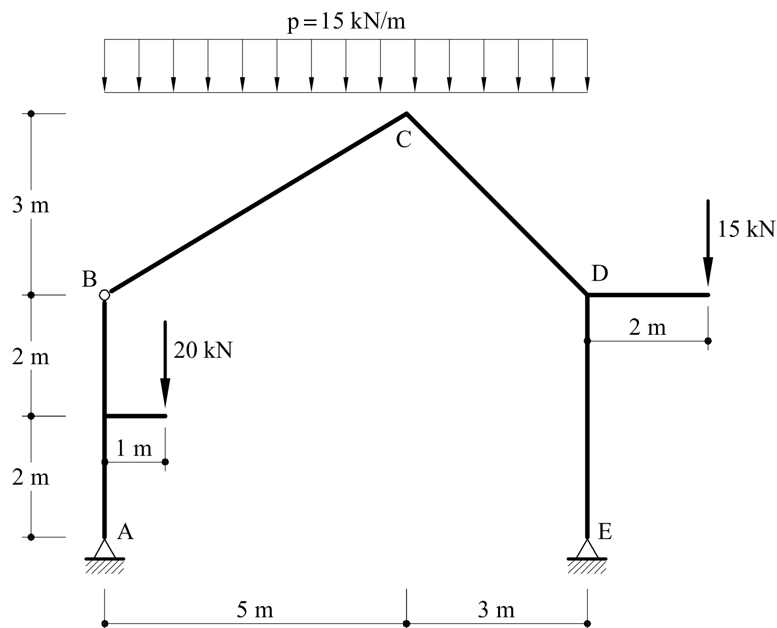


Fig.1 Pórtico correspondiente al problema 2.47

Solución

En la figura 2 pueden verse representadas las reacciones. En la figura 3 la ley de momentos flectores. En la figura 4 se dibuja la ley de esfuerzos cortantes y en la figura 5 la ley de esfuerzos axiles.

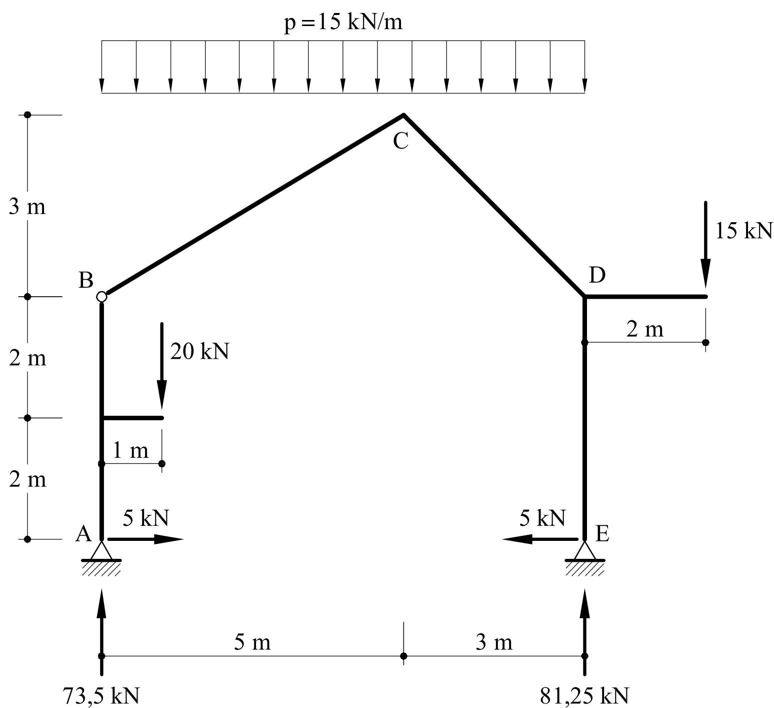


Fig.2 Reacciones

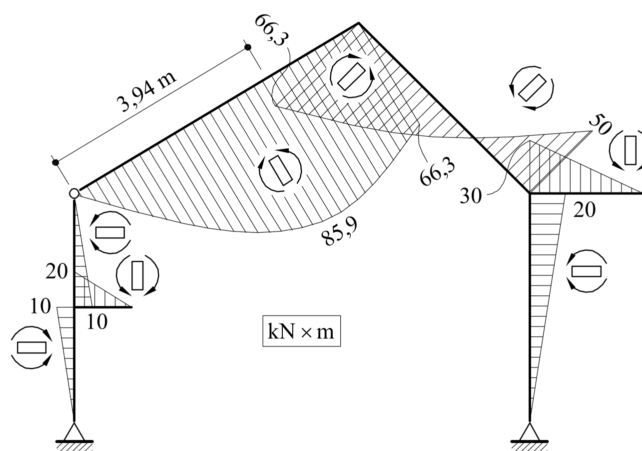


Fig.3 Leyes de momentos flectores

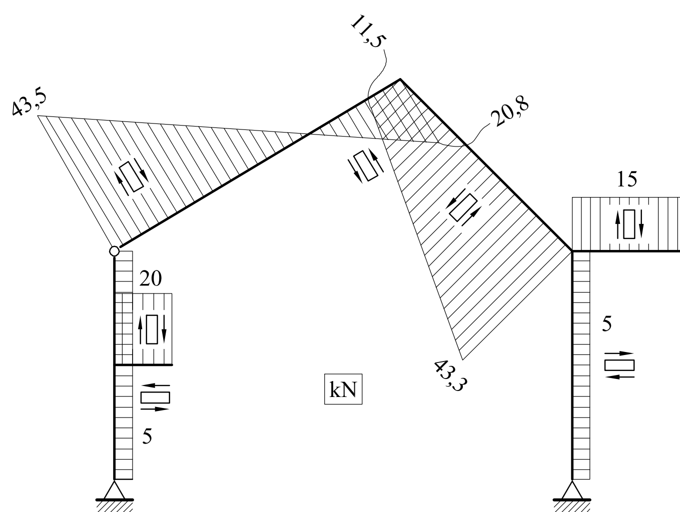


Fig.4 Ley de esfuerzos cortantes

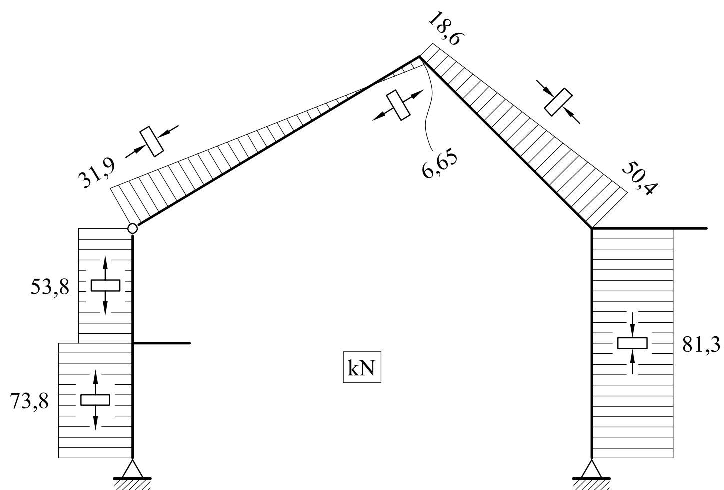


Fig. 5 Ley de esfuerzos axiles

Problema 2.48 *En la estructura isostática que se representa en la figura 1, hallar:*

- *Reacciones en los apoyos*
- *Ley de momentos flectores*
- *Ley de esfuerzos cortantes*
- *Ley de esfuerzos axiles*

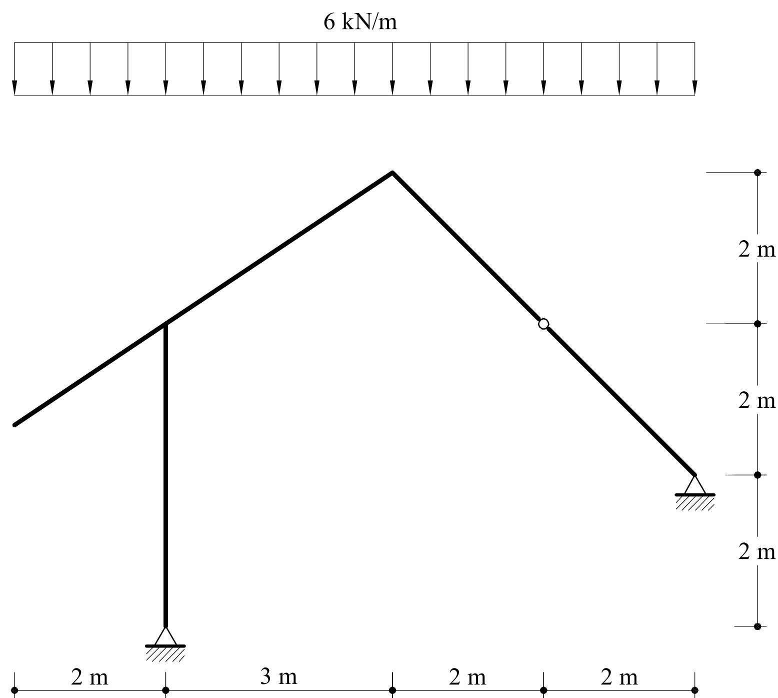


Fig. 1 Pórtico correspondiente al problema 2.48

Solución

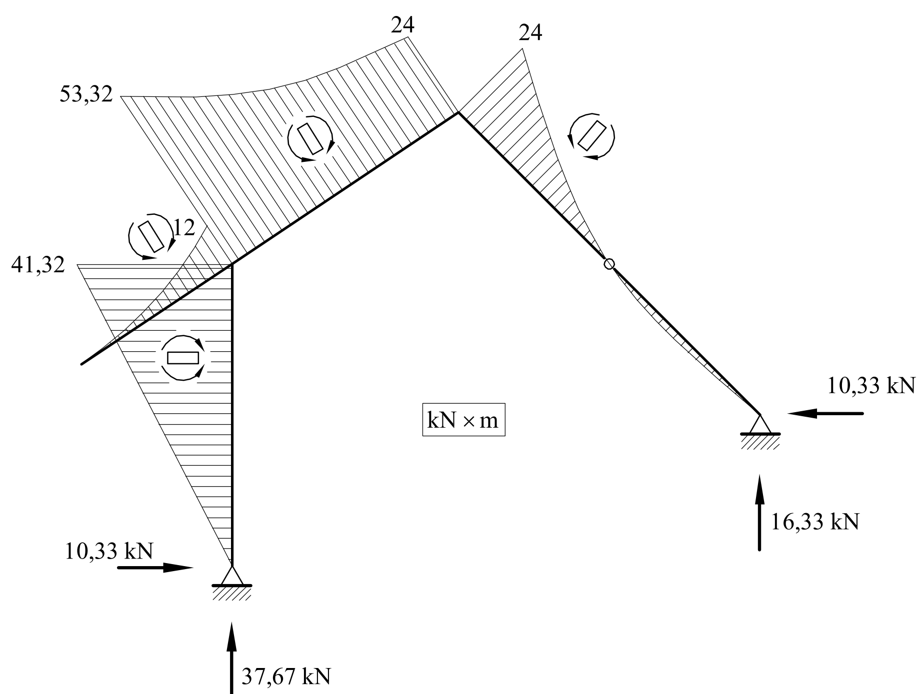


Fig .2 Ley de momentos flectores y reacciones

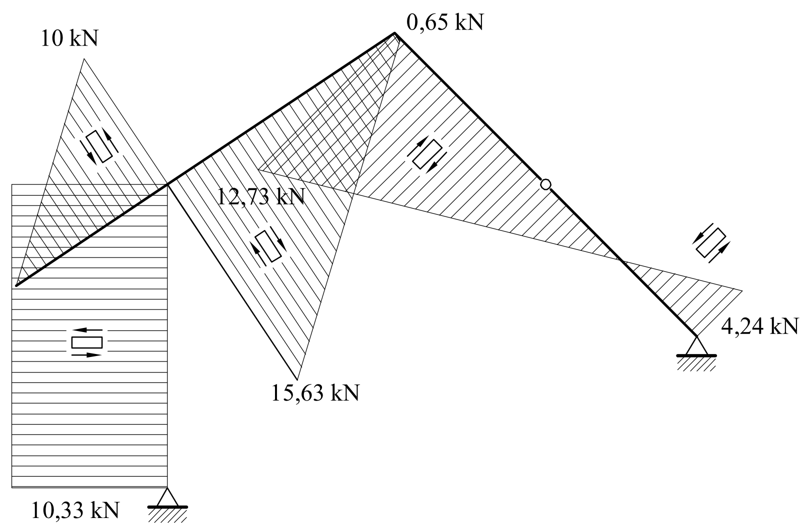


Fig. 3 Ley de esfuerzos cortantes

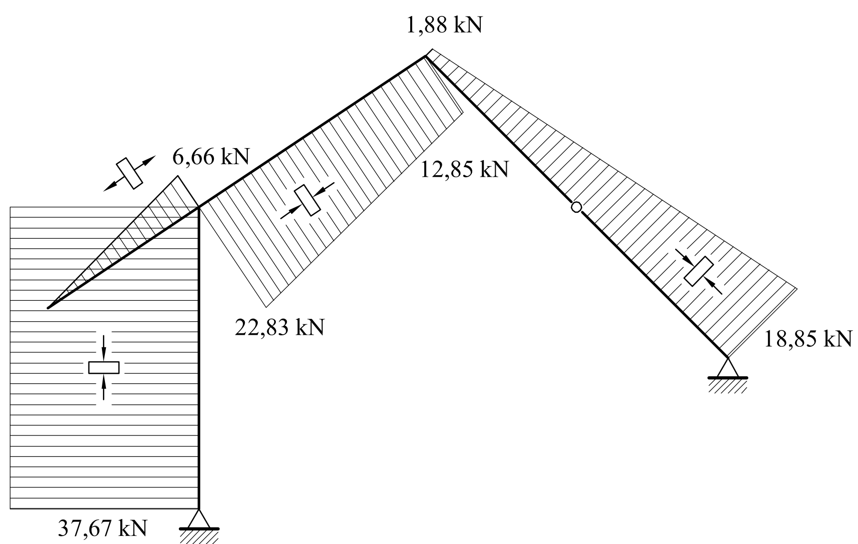


Fig. 4 Ley de esfuerzos axiles

Problema 2.49 *En el pórtico que se acota en la figura 1, hallar:*

- *Ley de momentos flectores*
- *Ley de esfuerzos cortantes*
- *Ley de esfuerzos axiles*

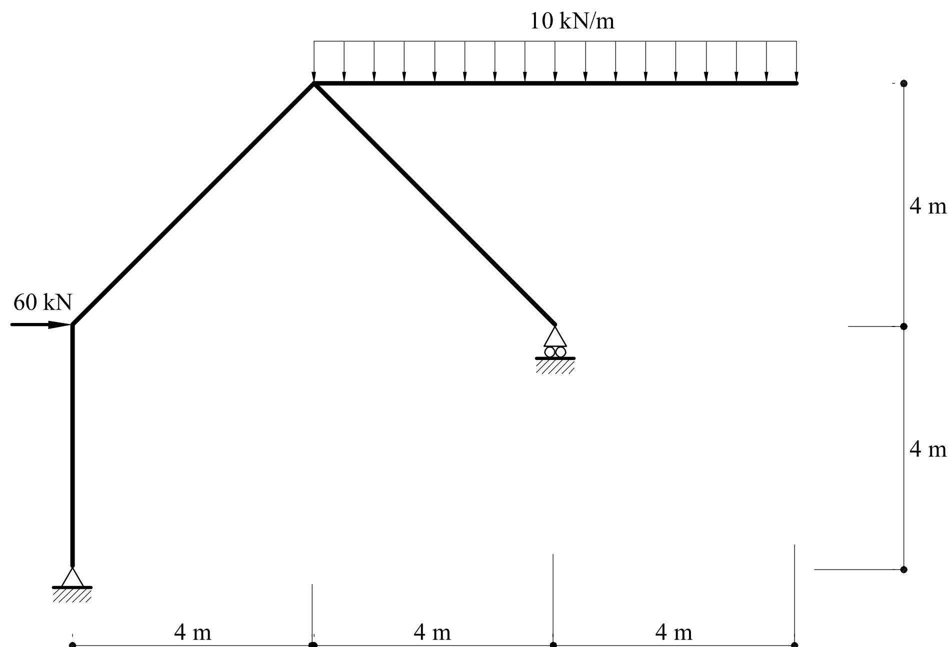


Fig. 1 Pórtico correspondiente al problema 2.49

Solución

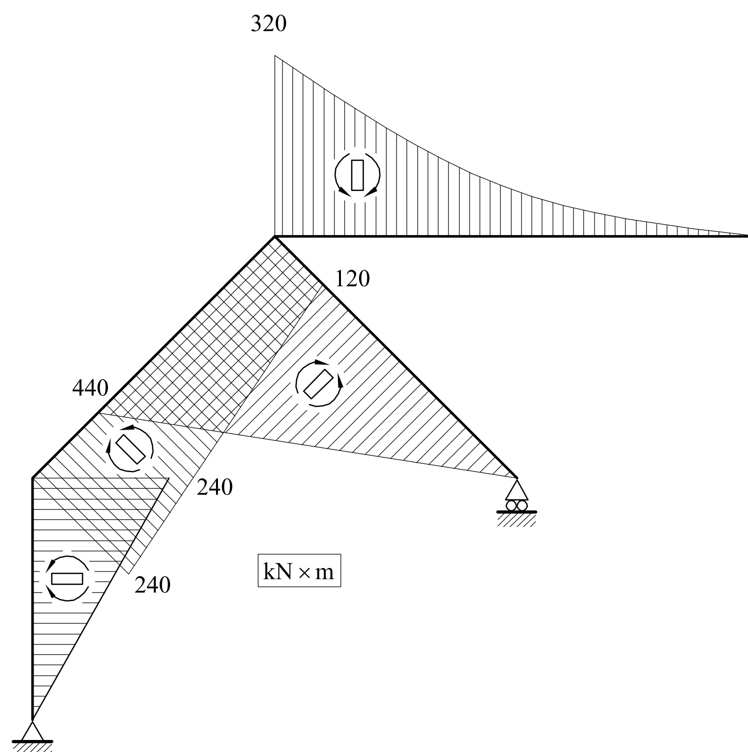


Fig .2 Ley de momentos flectores

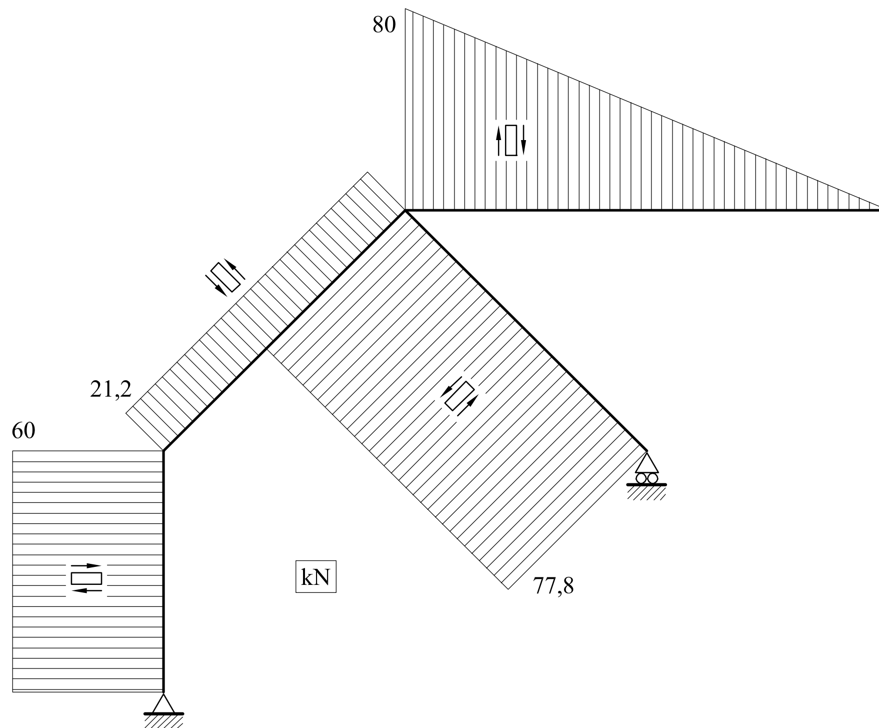


Fig. 3 Ley de esfuerzos cortantes

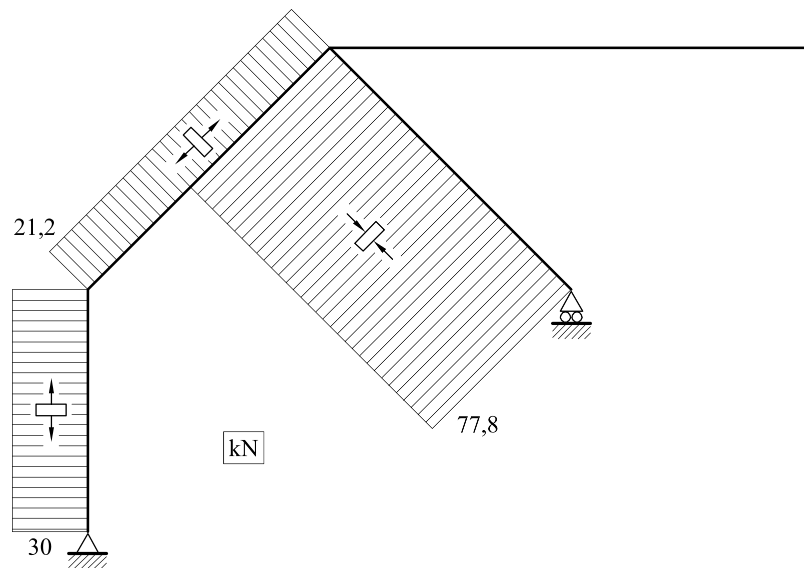


Fig. 4 Ley de esfuerzos axiles

Problema 2.50 *Dado P y r de la figura 1, construir los diagramas de N, Q, y M_f.*

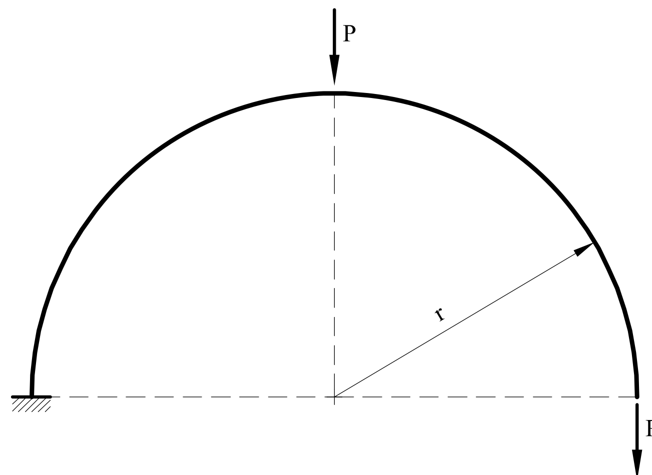


Fig. 1 Arco correspondiente al problema resuelto 2.50

Solución

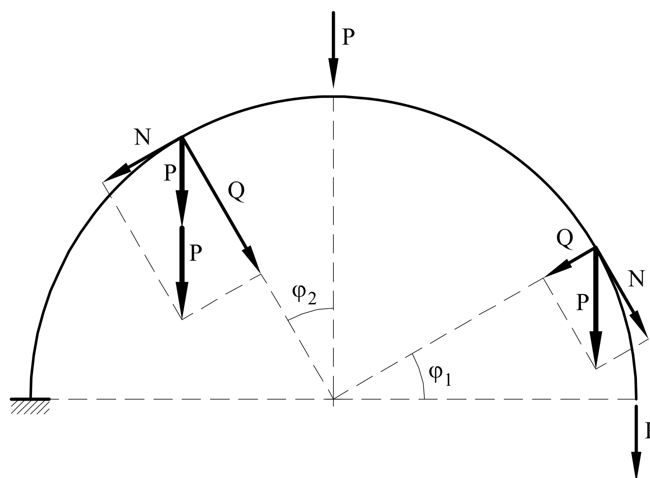


Fig. 2 Reacciones y tramos de barra.

Determinamos *N*, *Q* y M_f por tramos de la barra.

En el primer tramo: $0 \leq \varphi_1 \leq \dfrac{\pi}{2}$.

$$N = P\cos\varphi_1; \qquad Q = Psen\varphi_1; \qquad M_f = Pr(1-\cos\varphi_1);$$

En el segundo tramo: $0 \leq \varphi_2 \leq \dfrac{\pi}{2}$.

$N = -2Psen\varphi_2;$ $Q = 2P\cos\varphi_2;$ $M_f = Pr(1 + 2sen\varphi_2);$

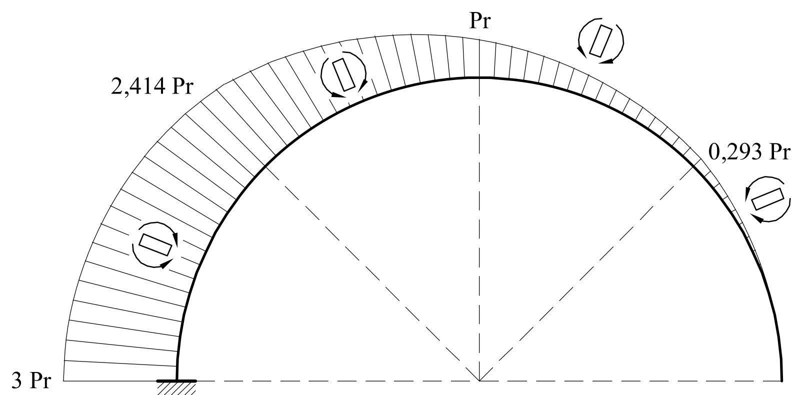


Fig. 3 Ley de momentos flectores

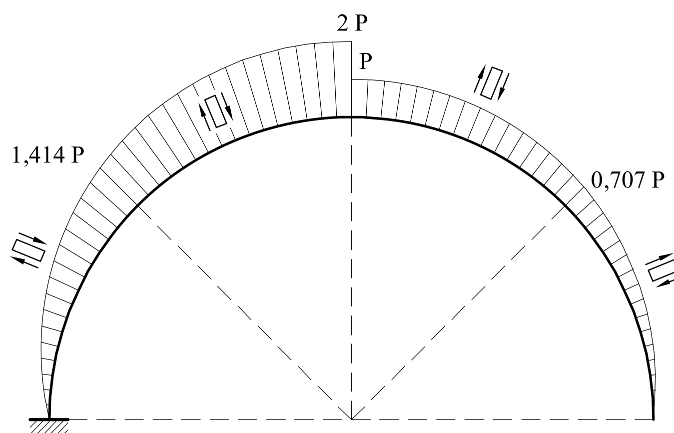


Fig. 4 Ley de esfuerzos cortantes

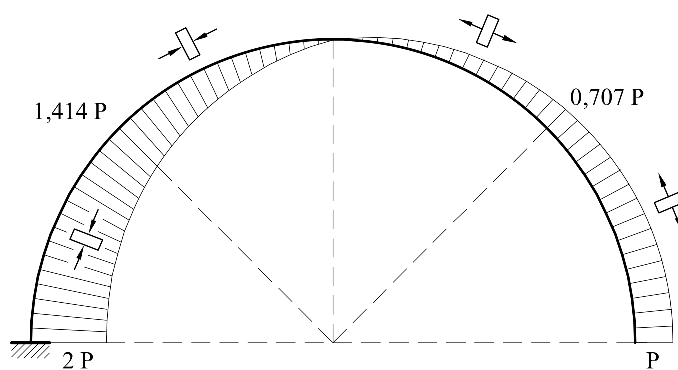


Fig. 5 Ley de esfuerzos axiles

Problema 2.51 *En la estructura de la figura 1, construir los diagramas del esfuerzo axil N, del esfuerzo cortante Q y del momento flector M_f.*

La carga se distribuye uniformemente sobre la tangente al arco.

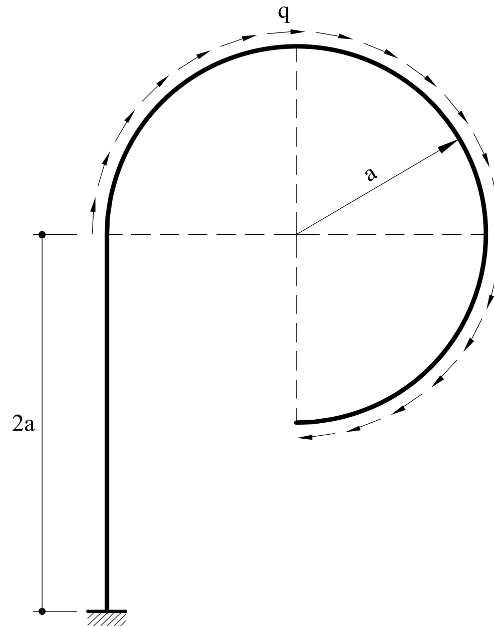


Fig. 1 Arco correspondiente al problema resuelto 2.51

Solución

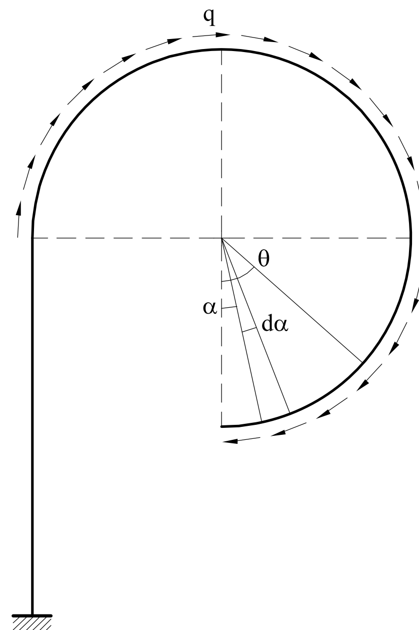


Fig. 2 Reacciones y tramos de barras

$$dN = qRd\alpha \times \cos(\theta - \alpha)$$
$$dQ = -qRd\alpha \times \sin(\theta - \alpha)$$

$$dM_f = qRd\alpha \times \left[R - R\cos(\theta - \alpha)\right] = qR^2\left[1 - \cos(\theta - \alpha)\right]d\alpha$$

$$N = qR\int_0^\theta \cos(\theta - \alpha)d\alpha = qR\sin\theta$$

$$Q = -qR\int_0^\theta \sin(\theta - \alpha)d\alpha = -qR(1 - \cos\theta)$$

$$M_f = qR^2\left[\int_0^\theta d\alpha - \int_0^\theta \cos(\theta - \alpha)d\alpha\right] = qR^2\theta - qR^2\sin\theta = -qR^2(-\theta + \sin\theta)$$

Para $\dfrac{\pi}{2}$:

$$N = qR$$

$$Q = -qR$$

$$M_f = qR^2\left(-\frac{\pi}{2} + 1\right)$$

Para π :

$$N = 0$$

$$Q = -qR(1 + 1) = -2qR$$

$$M = -3{,}14qR^2$$

Para $\dfrac{3\pi}{2}$:

$$N = -qR$$

$$Q = -qR$$

$$M_f = qR^2(-4{,}712 - 1) = -5{,}712qR^2$$

Problema 2.52 *En la estructura de la figura 1 construir los diagramas del esfuerzo axil N, del esfuerzo cortante Q y del momento flector M_f.*

La carga se distribuye uniformemente sobre la proyección horizontal.

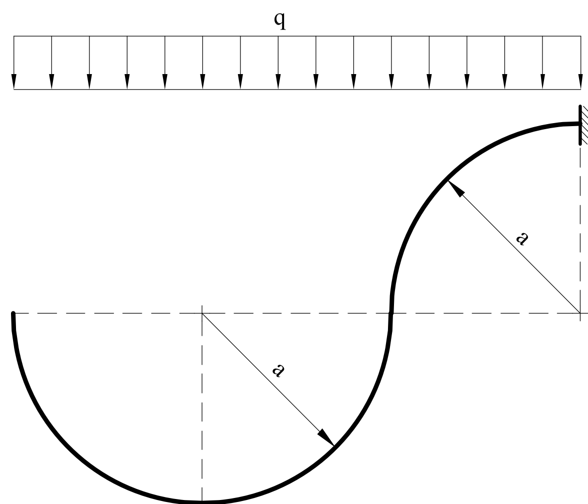


Fig. 1 Arco correspondiente al problema resuelto 2.52

Solución

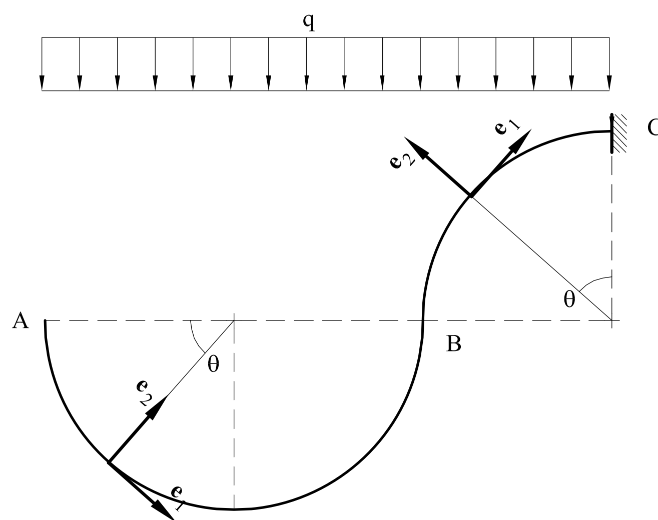


Fig. 2 Tramos de barras

Tramo AB:

$$N = -qa(1 - \cos\theta)\cos\theta$$
$$Q = qa(1 - \cos\theta)\sin\theta$$
$$M_f = -qa^2(1 - \cos\theta)^2 / 2$$

Tramo BC:

$$N = \left[2qa + qa(1-\sin\theta)\right]\sin\theta$$
$$Q = \left[2qa + qa(1-\sin\theta)\right]\cos\theta$$
$$M_f = -\frac{qa^2}{2}(1-\sin\theta)^2 - 2qa^2 - 2qa^2(1-\sin\theta)$$

Problema 2.53 *En la estructura de la figura 1 construir los diagramas del esfuerzo axil N, del esfuerzo cortante Q y del momento flector M_f.*

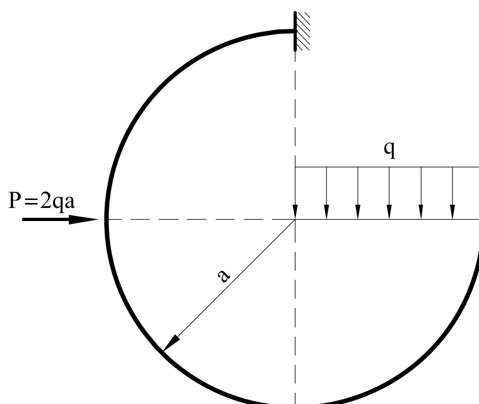


Fig. 1 Arco correspondiente al problema resuelto 2.53

Solución

$$\left(M_f\right)_{\max} = 3p/2$$

$$Q_{\max} = 2p$$

$$N_{\max} = 2p$$

Problema 2.54 *En la estructura de la figura 1 construir los diagramas del esfuerzo axil N, del esfuerzo cortante Q y del momento flector* M_f.

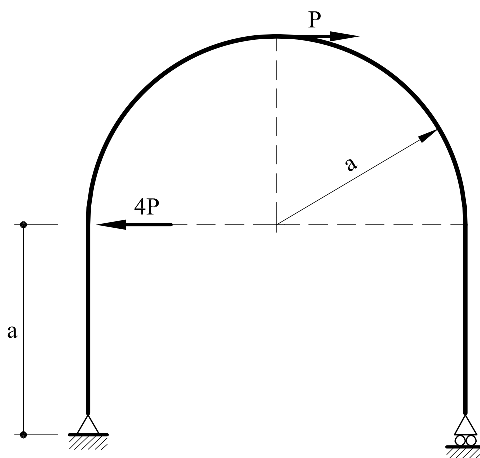


Fig. 1 Arco correspondiente al problema 2.54

Solución

$$N_{\max} = P$$

$$Q_{\max} = 3P$$

Problema 2.55 *En la estructura de la figura 1 construir los diagramas del esfuerzo axil N, del esfuerzo cortante Q y del momento flector M_f.*

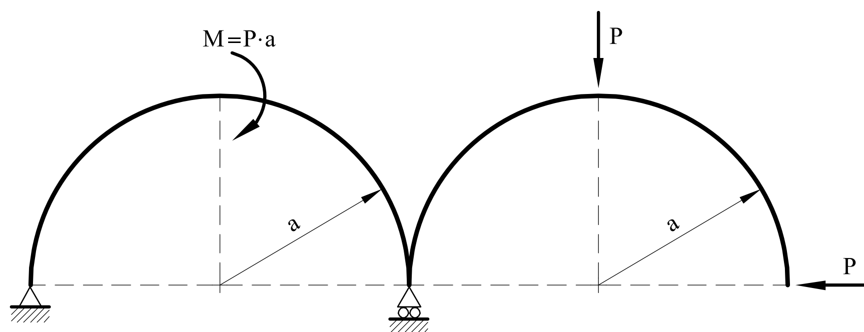


Fig. 1 Arco correspondiente al problema 2.55

Solución

$M_{max} = 2Pa$

$Q_{max} = P\sqrt{2}$

$N_{max} = P\sqrt{2}$

Problema 2.56 *En la estructura de la figura 1 costruir los diagramas del esfuerzo axil N, del esfuerzo cortante Q y del momento flector M_f.*

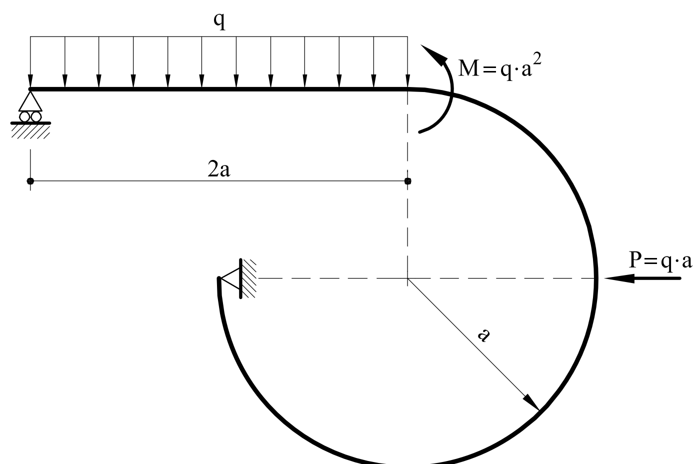


Fig. 1 Arco correspondiente al problema resuelto 2.56

Solución

$$M_{\max} = 2{,}414\, qa^2$$
$$N_{\max} = qa\sqrt{2}$$
$$Q_{\max} = qa\sqrt{2}$$

Capítulo 3:
Esfuerzo axil

Problema 3.1 *Una pieza de hormigón de 6 m. de longitud, tiene una sección rectangular de dimensiones 0,3 × 0,4 m^2. En su centro de gravedad se aplica una fuerza F.*

Determinar:

a) Valor máximo de F si las tensiones no pueden superar los 12,7 Mpa.
b) Movimiento Δ de un extremo de la pieza respecto al otro.
c) Energía de deformación de la pieza.

Nota: El módulo de elasticidad del hormigón se tomará igual a E_h = 30 GPa.

Solución

La sección de hormigón valdrá

$$\mathrm{A} = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12\ m^2$$

Las tensiones valdrán

$$\sigma = \frac{F}{A} = 12{,}7\ MPa$$

de donde:

$$F = \sigma A = 12{,}7\ MPa \times 0{,}12\ m^2 = 1524\ kN$$

El movimiento Δ de un extremo respecto al otro vale

$$\Delta = \frac{FL}{EA} = \frac{1524 kN \times 6m}{30 GPa \times 0{,}12 m^2} = 2{,}54\, mm$$

En cuanto a la energía elástica,

$$W_N = \frac{1}{2}\int_0^6 \frac{N^2}{EA} ds = \frac{1}{2}\frac{N^2 L}{EA} = \frac{1}{2}\ \frac{1524^2\ kN^2 \times 6\, m}{30\, GPa \times 0{,}12\ m^2} = 1935{,}48\ \ julios$$

Problema 3.2 *Un pilar de hormigón de 40 metros de altura y 2 m^2 de sección está sometido a su propio peso. El peso específico del hormigón es de 25 kN/m^3. Se desea saber el valor de las máximas tensiones de compresión así como el acortamiento del pilar. El módulo de elasticidad vale E = 30 GPa*

Solución

La fuerza repartida por unidad de longitud valdrá $p_1 = -25 \times 2 = -50\ kN/m$, con lo cual la ley de esfuerzos axiles se escribe (figura 1)

$$N = 50(40 - x_1)$$

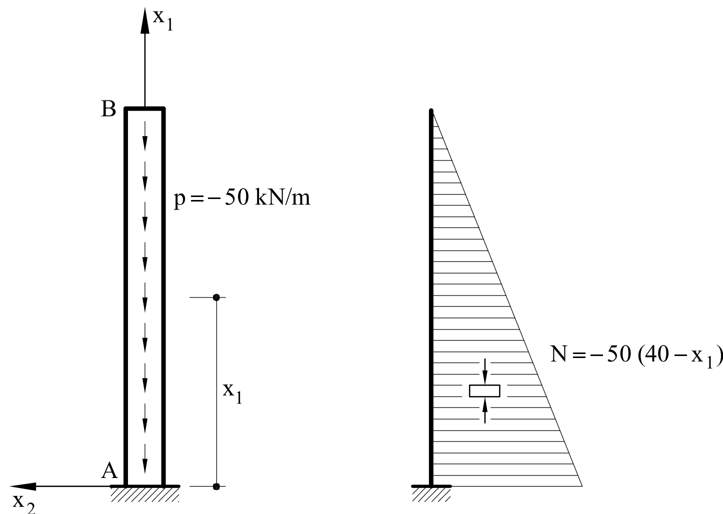


Fig. 1 Cargas y esfuerzos axiles

Las máximas tensiones se producirán en el punto *A*, valiendo

$$\sigma_A = \frac{-50 \times 40}{2} = -1000\ \frac{kN}{m^2} = -1\ MPa \quad (compresión)$$

El movimiento del punto *B* (acortamiento en este caso) valdrá

$$v_{1B} = \int_0^{40} \frac{N}{EA}\, dx_1 = \int_0^{40} \frac{-50\,(40 - x_1)}{30 \times 10^6 \times 2}\, dx_1 = -0{,}667 \times 10^{-3}\ metros = -0{,}667\ mm$$

Problema 3.3 *La barra de la figura 1 tiene forma de dos troncos de cono iguales de radios r = 20 cm y 2r, longitud L = 6 m, unidos por sus bases mayores. La barra está sometida a fuerzas P = 60 kN de tracción aplicadas en sus extremos.*
Conociendo el módulo de elasticidad E = 200 GPa se desea conocer el alargamiento de la barra.

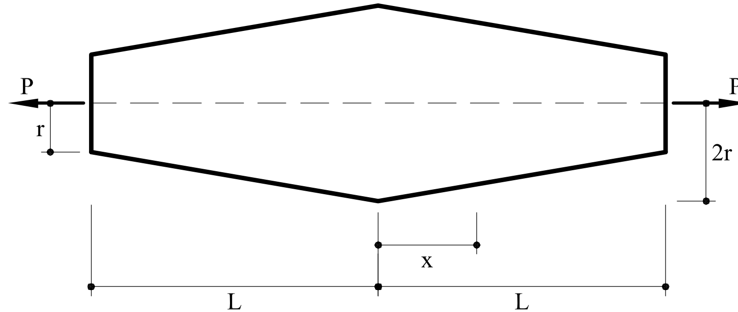


Fig. 1 Pieza de sección variable correspondiente al problema 3.3

Solución

La variación de la sección con *x* vale

$$A = \pi r^2 \left(2 - \frac{x}{L}\right)^2$$

Por tanto, el alargamiento valdrá

$$\Delta = 2\int_0^L \frac{P\,dx}{EA} = \frac{2P}{E}\int_0^L \frac{dx}{\pi r^2 (2 - x/L)^2} = \frac{PL}{\pi r^2 E}$$

y sustituyendo:

$$\Delta = \frac{60\,kN \times 6\ m}{\pi \times (0{,}2\,m)^2 \times 200 \times 10^6\ kN/m^2} = 14{,}32 \times 10^{-6}\, m$$

Problema 3.4 *La viga que se representa en la figura 1 está sometida a una fuerza externa F de valor F = 500 kN. Hallar:*

a) Ley de esfuerzos axiles
b) Movimiento del punto B
c) Energía de deformación de toda la barra

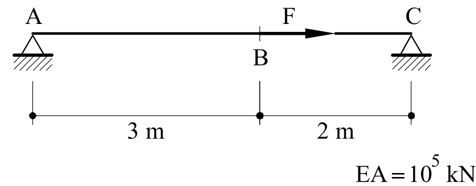


Fig. 1 Viga correspondiente al problema resuelto 3.4

Solución

Se libera el apoyo *C* y en su lugar se coloca una fuerza de valor H_C (ver figura 2)

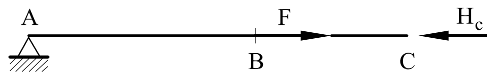


Fig. 2 Esquema de fuerzas en la viga.

La ley de esfuerzos axiles se escribe:

$$N\Big|_A^B = F - H_C$$

$$N\Big|_B^C = -H_C$$

Con lo cual, el movimiento del punto *C* será:

$$\delta_C = \frac{(F - H_C)\times 3}{EA} + \frac{-H_C \times 2}{EA}$$

y dado que δ_C debe ser nulo, se obtiene:

$$H_C = 0{,}6\,F = 300\ kN$$

Por lo tanto, la ley de esfuerzos axiles se escribe:

$$N\Big|_A^B = 0{,}4\,F = 200\ kN$$

$$N\Big|_B^C = -0{,}6\ F = -300\ kN$$

El movimiento del punto *B* valdrá

$$\delta_C = \frac{0{,}4\ F \times 3}{EA} = \frac{0{,}4 \times 500 \times 3}{10^5} = 6 \times 10^{-3}\ m = 6\ mm$$

La energía de deformación valdrá:

$$W = \frac{1}{2}\int_0^5 \frac{N^2}{EA}\,ds = \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{\left(N\Big|_A^B\right)^2 ds}{EA} + \frac{1}{2}\int_3^5 \frac{\left(N\Big|_B^C\right)^2 ds}{EA} = \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{(200)^2\,ds}{10^5} + \frac{1}{2}\int_3^5 \frac{(-300)^2\,ds}{10^5} = 1{,}5 \times 10^3\ julios$$

Problema 3.5 *Una barra prismática de eje vertical tiene sus extremos fijos rígidamente y soporta un peso P en un punto B.*

Calcúlese el esfuerzo normal en ambos trozos de la barra.

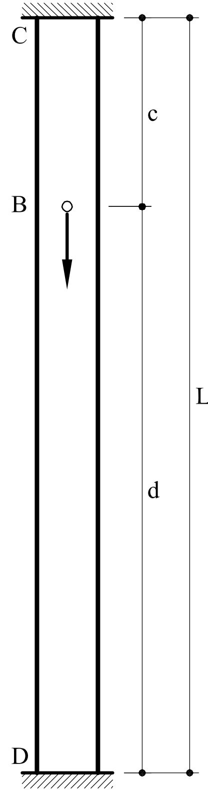


Fig. 1 Barra prismática

Solución

Liberando el apoyo *C* aparecerá una fuerza *F*. La ley de esfuerzos axiles valdrá (fig. 2)

$$N\Big|_{B}^{C} = F$$

$$N\Big|_{B}^{D} = F - P$$

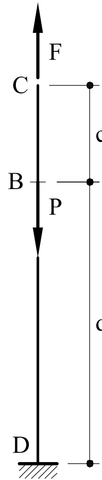


Fig. 2 Fuerzas actuantes en la barra

El movimiento vertical de *C* (el cual debe ser nulo) vale:

$$\Delta_C = \frac{N\Big|_B^C c}{EA} + \frac{N\Big|_B^D d}{EA} = \frac{1}{EA}\left[Fc + (F-P)d\right] = 0$$

Es decir

$$F = P\frac{d}{L}$$

y los esfuerzos axiles

$$N\Big|_B^C = P\frac{d}{L} \qquad\qquad N\Big|_B^D = P\left(\frac{d}{L} - 1\right)$$

Problema 3.6 *Una pieza de hormigón armado tiene las siguientes características:*

- *Área de la sección de hormigón:* A_C
- *Área de la sección de acero:* A_S
- *Módulo de elasticidad del hormigón:* E_C
- *Módulo de elasticidad del acero:* E_S

Si el acortamiento que experimenta por retracción el hormigón en masa es ε_C , demostrar que el acortamiento de la pieza de hormigón armado, por efecto de la retracción, vale:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_C \frac{1}{1+n\varphi}$$

siendo:

$$n = \frac{E_S}{E_C}$$

$$\varphi = \frac{A_S}{A_C}$$

Determinar asimismo las tensiones que se producen en el hormigón y en el acero como consecuencia de la retracción.

Solución

Al no poderse acortar libremente el hormigón aparecerá un esfuerzo de tracción de valor *N*. Por equilibrio en el acero aparecerá también un esfuerzo de compresión cuyo valor será también *N*.
El acortamiento del hormigón valdrá

$$\in_t = \in_C - \frac{N}{E_C A_C}$$

El acortamiento del acero será:

$$\in_t = \frac{N}{E_S A_S}$$

Dado que ambos acortamientos deben ser iguales se obtiene

$$N = \in_C \frac{E_S A_S}{1+n\varphi}$$

Sustituyendo:

$$\in_t = \in_C \frac{1}{1+n\varphi}$$

Problema 3.7 *La pieza de la figura 1 tiene la parte BC con un área de valor 3A y un coeficiente de dilatación lineal α. El trozo CD tiene una sección 2A y un coeficiente de dilatación lineal 3α. Si el módulo de elasticidad es constante, determinar el valor del esfuerzo axil así como el movimiento del punto C cuando se produce un incremento térmico de valor t.*

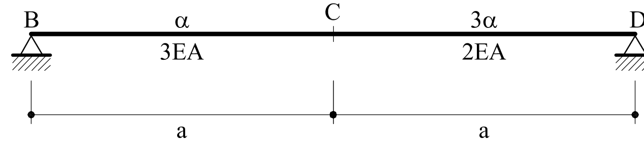


Fig. 1 Viga correspondiente al problema resuelto 3.7

Solución

Se libera el apoyo *D* y se coloca una fuerza de compresión de valor *F*. El movimiento total del punto *D*, δ^t, será igual a la suma del alargamiento de origen térmico δ^{nt} y al originado por la fuerza *F*. Es decir:

$$\delta^t = \delta^{nt} + \delta$$

siendo

$$\delta^{nt} = \alpha\ at + 3\alpha\ at = 4\alpha\ at$$

$$\delta = -\frac{Fa}{3EA} - \frac{Fa}{2EA} = -\frac{5}{6}\frac{Fa}{EA}$$

y puesto que δ^t debe ser cero:

$$F = \frac{24}{5} EA\,\alpha\, t$$

Por lo que respecta al movimiento horizontal del punto *C*, su valor será (positivo hacia la derecha)

$$\delta_C = \delta_C^{nt} + \delta_C = \alpha\ a\,t - \frac{Fa}{3EA} = -\frac{3}{5}\alpha\ a\,t$$

Problema 3.8 *Dos piezas rectas AB y CD están separadas una distancia* δ. *Mediante la aplicación de una fuerza F en C se unen ambas piezas, y una vez unidas se sueldan. Posteriormente se retira la fuerza F.*

Hallar el esfuerzo axil en AB y en CD .

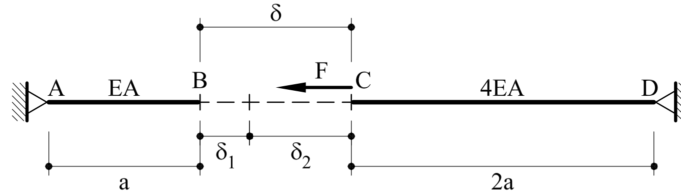


Fig. 1 Piezas rectas correspondientes al problema resuelto 3.8

Solución

Una vez unidos los puntos *B* y *C* y eliminada la fuerza *F*, el trozo *AB* tendrá un esfuerzo axil de valor *N*. El axil en *CD* debe ser también igual a *N* por equilibrio.

El alargamiento de *AB* debido a *N* valdrá

$$\delta_1 = \frac{N\,a}{EA}$$

El alargamiento de *CD* debido a *N* valdrá

$$\delta_2 = \frac{N\,2a}{4EA}$$

y dado que $\delta = \delta_1 + \delta_2$ se obtiene:

$$N = \frac{2EA}{3a}\delta$$

y además:

$$\delta_1 = \frac{2\delta}{3}$$

y

$$\delta_2 = \frac{\delta}{3}$$

Problema 3.9 *Sobre un soporte vertical de hormigón armado actúa una fuerza centrada y vertical de 1000 kN. El soporte de 2,5 metros de altura es de sección recta, cuadrada de 30 cm. de lado, y está armado con ocho redondos verticales de 20 mm. de diámetro, según se indica en la figura 1. De esta forma, la sección neta de hormigón es de 875 cm^2 y la del acero de 25 cm^2. Teniendo en cuenta que los módulos de elasticidad del hormigón y del acero son 25 GPa y 210 GPa, repectivamente,*

Hallar

a) *Tensiones a que está sometido el hormigón y el acero*
b) *Acortamiento del soporte por efecto de la fuerza aplicada*

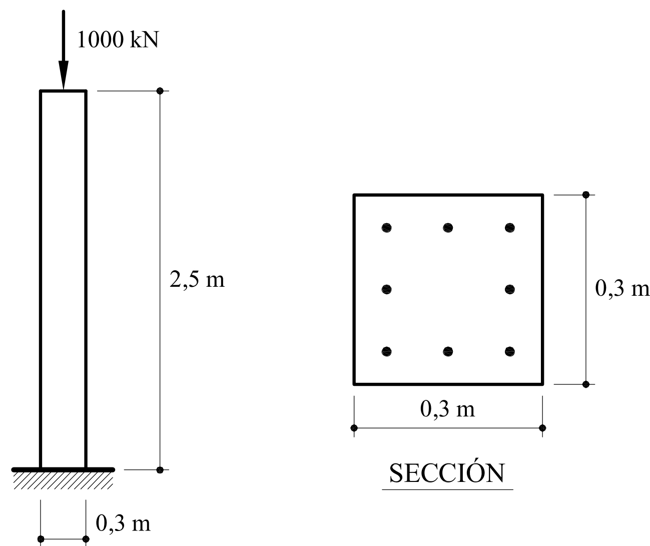


Fig. 1 Soporte y sección de hormigón armado

Solución

La sección mixta reducida al hormigón vale

$$A^* = A_h + A_a \frac{E_a}{E_h} = 875 + 25 \times \frac{210}{25} = 1085\ cm^2$$

Las tensiones en el hormigón y en el acero valdrán respectivamente

$$\sigma_h = \frac{1000\ kN}{1085\ cm^2} = 9{,}21\ MPa$$

$$\sigma_a = \frac{1000\ kN}{1085\ cm^2} \times \frac{210}{25} = 77{,}42\ MPa$$

El acortamiento valdrá

$$\Delta = \frac{\sigma_h}{E_h} L = \frac{9{,}21\ MPa}{25000\ MPa} \times 2{,}5\ m = 0{,}000921\ m = 0{,}921\ mm$$

Problema 3.10 *Una pieza recta está constituida por una viga de hormigón de sección cuadrada de 20 cm de lado, pretensada por unos cables de sección* $\omega = 0{,}5\ cm^2$ *cada uno.*

Hallar

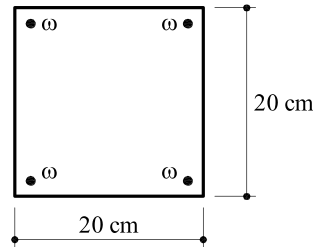


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 3.10

a) *La tensión con que se debe tensar cada cable para que la pieza recta pueda soportar una tracción de 80 kN, quedando entonces el hormigón a una compresión de 0,4 MPa, con el fin de evitar fisuras por donde el aire ambiente pueda atacar el acero.*

b) *Cuando actúa esta fuerza, la tensión a que está sometida el cable.*

NOTA: Tomar la relación $E_a / E_h = 7$

Solución

La sección homogeneizada vale

$$A^* = 20 \times 20 + \left(\frac{E_a}{E_h} - 1 \right) \times 4 \times 0{,}5 = 412\ cm^2$$

Si F es la fuerza de pretensión de cada cable, la tensión en el hormigón después de pretensar valdrá

$$\sigma_h^1 = \frac{4\ F}{412} = 0{,}00971\ F \quad (compresión)$$

Cuando, posteriormente, se aplica una fuerza de 80 kN, aparecen unas sobretensiones de valor

$$\sigma_h^2 = \frac{80\ kN}{412\ cm^2} = 0{,}19417\ kN/cm^2 \quad (tracción)$$

Como debe quedar una compresión remanente de 0,4 Mpa = 0,04 kN/cm^2 , deberá verificarse:

0,00971 F- 0,19417 =0,04

Es decir:

$F = 24{,}12\ kN$

La tensión final de los cables valdrá:

$$\sigma_a = \frac{F}{\omega} - \frac{4\,F}{A^*}\frac{E_a}{E_h} + \frac{80\ kN}{412\ cm^2}\times\frac{E_a}{E_h} = \frac{24{,}12}{0{,}5} - \frac{24{,}12\times 4}{412}\times 7 + \frac{80}{412}\times 7 = 47{,}96\ kN/cm^2 = 479{,}6\ MPa$$

Problema 3.11 *Una pieza de hormigón postensado está formada por una barra recta de hormigón de 5 metros de luz y sección cuadrada de 40 × 40 cm^2 y un cable de acero (también de 5 metros de longitud) de 1,5 cm^2 de sección y situado en el centro de gravedad de la sección de hormigón. Para construir dicha pieza se sigue el siguiente proceso:*

- *Se construye la pieza de hormigón dejando una vaina de 1,5 cm^2 en su centro de gravedad.*
- *Una vez fraguado el hormigón se introduce el cable y se postensa con una fuerza de postensado de valor F = 180 kN*

Se pide:

1. *Tensiones finales en el hormigón (en MPa)*
2. *Acortamiento del hormigón (en MPa)*
3. *Energía de deformación de la parte de hormigón (en julios)*

Posteriormente, a lo largo del tiempo (y sin que medie acción externa alguna) se produce un acortamiento del hormigón por retracción de valor por unidad de longitud $\in_r = 0{,}00035$

Se pide:

4. *Tensiones finales en el hormigón (en MPa).*
5. *Tensiones finales en el acero (en MPa).*

$E_a = 210\ GPa$ $\qquad$ $E_h = 30\ GPa$

Solución

La sección de hormigón vale $A_h = 1598{,}5\ cm^2$

1) Las tensiones en el hormigón valdrán

$$\sigma_h^1 = \frac{180\ kN}{1598{,}5\ cm^2} = 1{,}1261\ MPa$$

2) El acortamiento del hormigón vale

$$\Delta_h = \frac{\sigma_h^1}{E_h} L = \frac{1{,}1261\ MPa}{30\ GPa} \times 5m = 0{,}1877\ mm$$

3) Energía de deformación del hormigón

$$W_h = \frac{1}{2}\frac{N^2 L}{EA} = \frac{1}{2}\frac{(180\ kN)^2 \times 5\ m}{30\ GPa \times 1598{,}5\ cm^2} = 16{,}89\ julios$$

4) Como consecuencia de la retracción del hormigón, se producirá una deformación $\in_r$ que no será compatible con la deformación del acero. Por ello, se producirá una deformación mecánica de valor $\in$ (figura 1)

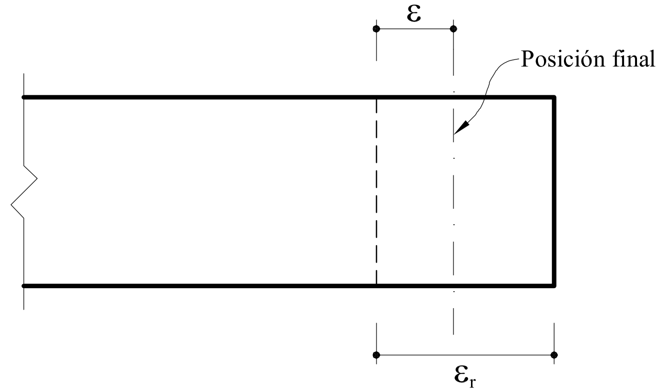


Fig. 1 Deformación del hormigón

La deformación del hormigón $\in$ valdrá (alargamiento)

$$\frac{\Delta N}{E_h A_h}$$

La deformación del acero valdrá (acortamiento)

$$\frac{\Delta N}{E_a A_a}$$

Sumando:

$$\Delta N\left(\frac{1}{E_h A_h}+\frac{1}{E_a A_a}\right)=\in_r$$

Sustituyendo valores

$$\Delta N = 10{,}953\ kN$$

con lo cual la fuerza final que actúa en el acero vale

$$F_f = 180 - 10{,}953 = 169{,}05\ kN$$

Las tensiones finales en el hormigón valdrán

$$\sigma_h^2 = \frac{169{,}05\ kN}{1598{,}5\ cm^2} = 1{,}06\ MPa$$

5) Las tensiones finales en el acero valen

$$\sigma_a^2 = \frac{169{,}05\ kN}{1{,}5\ cm^2} = 1\,127\ MPa$$

Problema 3.12 *Una pieza de hormigón pretensado de longitud L = 5 metros, y sección cuadrada de 0,4 × 0,4 m^2 se construye de la siguiente forma:*

1. *Se tensan cuatro cables de sección ω cada uno a una tensión $\sigma_{a1} = 800\ MPa$.*
2. *Una vez tensados los cables, se hormigona.*
3. *Una vez endurecido el hormigón se cortan los cables por AA' y BB' (ver fig. 1).*

Determinar:

a) *Sección ω de cada uno de los cables de forma que la tensión final en el hormigón sea de 5 Mpa.*
b) *Tensión final en cada uno de los cables.*
c) *Energía elástica del conjunto.*

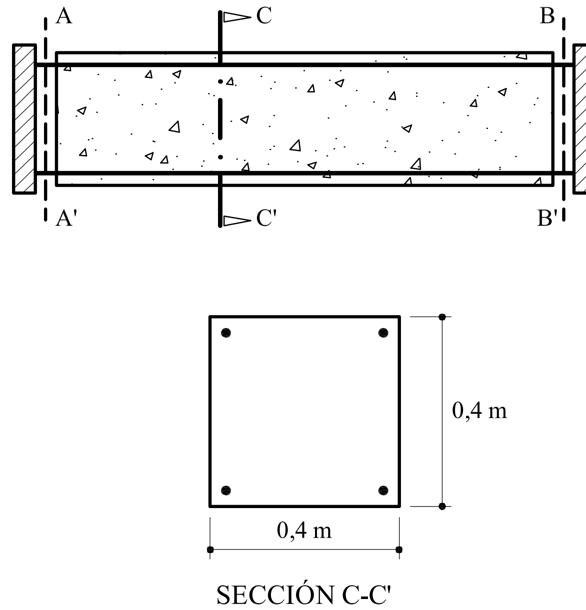


Fig. 1 Pieza de hormigón

Una vez se ha fabricado la pieza, se aplica una fuerza F de compresión de 260 kN.

Hallar:

d) *Tensión final en el hormigón y en los cables.*
e) *Energía elástica total.*

Se descarga la fuerza F de compresión y el conjunto se somete a un incremento de temperatura de valor t = 30ºC. Determinar los incrementos de tensión que se producen como consecuencia de dicha variación térmica.

$$E_a = 210\ GPa$$
$$E_h = 30\ GPa$$
$$\alpha_a = 1{,}2 \times 10^{-5}\ {}^{o}C^{-1}$$
$$\alpha_h = 10^{-5}\ {}^{o}C^{-1}$$

Solución

El área mecánica (referida al hormigón) de la sección una vez cortados los cables vale

$$A^* = 40\,cm \times 40\,cm + (\frac{210}{30} - 1)\,4\omega = 1600 + 24\omega$$

a) Cuando se cortan los cables, aparece en la sección mixta un esfuerzo axil de valor

$$\mathrm{P} = 4 \times 800\ MPa \times \omega\ cm^2 = 320\ \omega\ kN$$

con lo cual la tensión en el hormigón valdrá

$$\sigma_h^1 = \frac{\mathrm{P}}{A^*} = \frac{320\ \omega}{1600 + 24\ \omega}$$

Igualando $\sigma_h^1 = 5\ MPa = 0{,}5\ kN/cm^2$, se obtiene $\omega = 2{,}6\ cm^2$

b) Cuando se cortan los cables, se produce una pérdida de tensión en el acero de valor

$$\Delta\sigma_a^1 = \frac{\mathrm{P}}{A^*}\frac{E_a}{E_h} = 5 \times 7 = 35\ MPa$$

Por lo tanto, la tensión final en cada cable valdrá

$$\sigma_a^1 = 800 - 35 = 765\ MPa$$

c) La energía elástica valdrá

$$W = \frac{L}{2}\left(\frac{\sigma_h^2 A_h}{E_h} + \frac{\sigma_a^2 A_a}{E_a}\right)$$

y como

$$L = 5\ m$$
$$\sigma_h = 5\ MPa = 5 \times 10^6\ N/m^2$$
$$A_h = 0{,}4 \times 0{,}4 - 4 \times 2{,}6 \times 10^{-4} = 0{,}15896\ m^2$$
$$E_h = 30\ GPa = 30 \times 10^9\ N/m^2$$
$$\sigma_a = 765\ MPa = 765 \times 10^6\ N/m^2$$
$$A_a = 4\omega = 4 \times 2{,}6 \times 10^{-4} = 0{,}00104\ m^2$$
$$E_a = 210\ GPa = 210 \times 10^9\ N/m^2$$

Sustituyendo:

$$W = 7\ 576{,}8\ julios$$

d) Debido a la fuerza de compresión de $F = 260\ kN$ se producirán unas variaciones de tensión de valor

$$\Delta\sigma_h^2 = \frac{F}{A^*} = \frac{260\ kN}{1662{,}4\ cm^2} = 1{,}564\ MPa$$

$$\Delta\sigma_a^2 = 7\sigma_h^2 = 7 \times 1{,}564 = 10{,}95\ MPa$$

Por lo tanto, las tensiones valdrán

$$\sigma_h^2 = \sigma_h^1 + \Delta\sigma_h^2 = 5 + 1{,}564 = 6{,}564\ MPa$$

$$\sigma_a^2 = \sigma_a^1 - \Delta\sigma_a^2 = 765 - 10{,}95 = 754{,}05\ MPa$$

e) Energía elástica: Sustituyendo en la expresión del apartado c)

$$W' = 7\ 610{,}45\ julios$$

Cuando se produce la variación térmica, si no existiera unión entre el hormigón y el acero, las deformaciones de origen térmico valdrían:

$$\in_a^t = 30 \times 1{,}2 \times 10^{-5} = 36 \times 10^{-5}$$

$$\in_h^t = 30 \times 1 \times 10^{-5} = 30 \times 10^{-5}$$

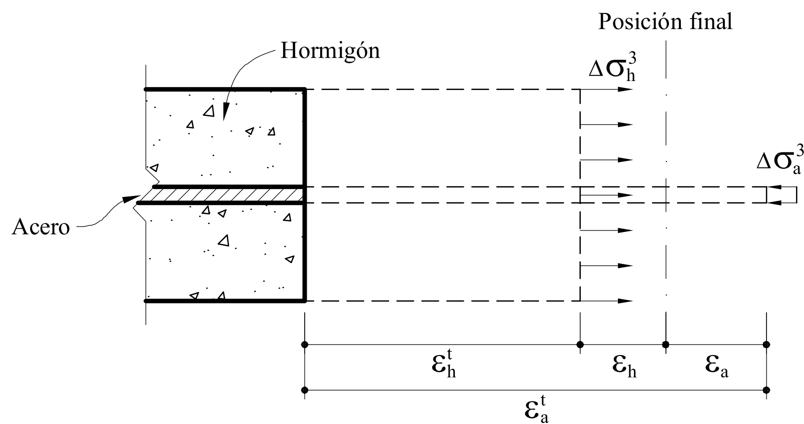


Fig. 2 Deformaciones producidas por la variación térmica

Al ser ambas deformaciones distintas, aparecerán unas deformaciones de tipo mecánico $\in_a$ y $\in_h$ (ver figura 2) de forma que la deformación final sea la misma. Es decir

$$\in_h^t + \in_h = \in_a^t - \in_a$$

O sea

$$30 \times 10^{-5} + \frac{\Delta\sigma_h^3}{E_{ha}} = 36 \times 10^{-5} - \frac{\Delta\sigma_a^3}{E_a}$$

Además, por equilibrio:

$$\Delta\sigma_a^3 A_a = \Delta\sigma_h^3 A_h$$

Resolviendo:

$$\Delta\sigma_h^3 = 0{,}079\ MPa \quad (tracción)$$

$$\Delta\sigma_a^3 = 12{,}12\ MPa \quad (compresión)$$

Problema 3.13 *La sección de hormigón que se representa en la figura 1 se postensa en dos fases:*

- *En la primera, se tensan los tendones 1 y 2 con una fuerza F , anclándose a continuación.*
- *En la segunda, se tensan los tendones 3 y 4 con la misma fuerza F , anclándose a continuación.*

Si se desea que la máxima tensión en el hormigón sea de 10 Mpa y en los tendones de postensar sea de 500 Mpa.

Hallar:

a) Valor de la fuerza F
b) Área ω de cada uno de los tendones
c) Tensión final en cada uno de los tendones 1,2,3 y 4
d) Tensión en el hormigón después de realizada la primera fase de postensado

$$E_h = 35\ GPa$$
$$E_a = 210\ GPa$$

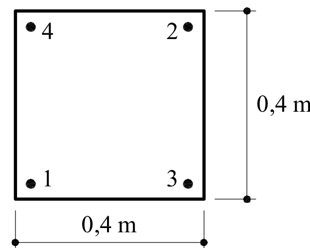


Fig. 1 Sección de hormigón armado

Solución

En la primera fase, las tensiones en el hormigón y en el acero valdrán

$$\sigma_h^1 = \frac{2F}{40\times 40-4\omega} \le 10\ MPa = 1\ kN/cm^2$$

$$\sigma_a^1 = \frac{F}{\omega} \le 500\ MPa = 50\ kN/cm^2$$

En la segunda fase, las fuerzas F actúan sobre la sección mixta de hormigón y acero, con un área mecánica

$$A^* = 1600 - 2\omega + \left(\frac{E_a}{E_h} - 1\right) 2\omega = 1600 + 8\omega$$

Después de realizada la segunda fase, las tensiones en los distintos elementos valdrán

- En el hormigón

$$\sigma_h^2 = \sigma_h^1 + \frac{2F}{A^*} = \frac{2F}{40\times 40 - 4\omega} + \frac{2F}{1600 + 8\omega} \le 1 kN/cm^2$$

- En los tendones 1 y 2

$$\sigma_{a12}^2 = \sigma_a^1 - \frac{2F}{A^*}\frac{E_a}{E_h} = \frac{F}{\omega} - \frac{2F}{1600 + 8\omega}\, 6 \le 50\, kN/cm^2$$

- En los tendones 3 y 4

$$\sigma_{a34}^2 = \frac{F}{\omega} \le 50\, kN/cm^2$$

Las ecuaciones relevantes son la primera y la tercera. Representan un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolviendo:

$$F = 403{,}5\ kN$$
$$\omega = 8{,}07\ cm^2$$

La tensión en el hormigón después de realizada la primera fase valdrá

$$\sigma_h^1 = \frac{2F}{40\times 40 - 4\omega} = \frac{2\times 403{,}5}{1600 - 4\times 8{,}07} = 0{,}515\ kN/cm^2 = 5{,}15\ MPa$$

Problema 3.14 *Se da la pieza prismática de la figura 1, en la cual se efectúa un pretensado con unos cables de secciones* ω_1 *y* ω_2*. La tensión en el hormigón al final del proceso de pretensado es uniforme y vale 10 MPa. Sabiendo que en los cables de igual sección el esfuerzo de pretensado es el mismo, calcular las fuerzas de pretensado en cada uno de los cables.*

$$\omega_1 = 10\ cm^2$$
$$\omega_2 = 15\ cm^2$$
$$n = \frac{E_a}{E_h} = 10$$

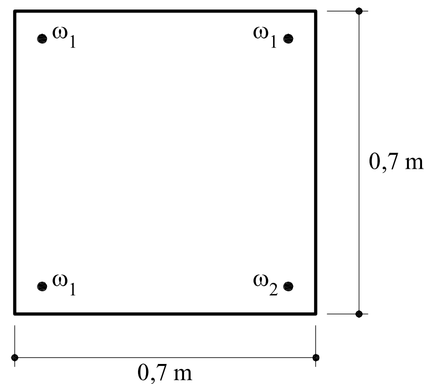


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 3.14

Solución

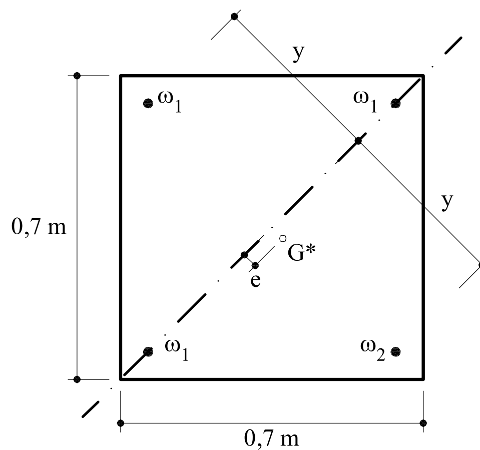


Fig. 2 Centros de gravedad

Centro de gravedad mecánico (figura 2):

$$9\ \omega_2 y - 9\ \omega_1 y = \left[70 \times 70 + 9\left(3\omega_1 + \omega_2\right)\right] e$$

$$e = \frac{9\left(\omega_2 - \omega_1\right) y}{4900 + 405} = 8{,}483 \times 10^{-3}\ y$$

- Por equilibrio

$$3F_1 + F_2 = N$$

- Además N debe pasar por G^*

$$(F_2 - F_1)y = e(3F_1 + F_2)$$
$$(F_2 - F_1)y = 8{,}483 \times 10^{-3}\, y(3F_1 + F_2)$$
$$\frac{F_2}{F_1} = 1{,}03422$$

- Por otro lado

$$\sigma_h = \frac{N}{(4900 + 405)\, cm^2} = 10\ MPa \Rightarrow N = 5305\ kN \Rightarrow F_1 = 1315\ kN$$
$$F_2 = 1360\ kN$$

Problema 3.15 *La pieza recta de la figura 1 tiene 4 metros de longitud y su sección recta es un cuadrado de 30 cm. de lado. En dos de sus caras opuestas se produce un incremento de temperatura de valor* $\Delta t = 20ºC$*, de tal forma que produce una distribución de temperaturas en la sección tal como muestra la figura 1.*
Admitiendo que se cumple la hipótesis de Navier, y que $\alpha = 10^{-5}\ ºC^{-1}$ *y* $E_h = 35$ *GPa,*

Hallar

a) *Tensiones que se producen en la sección*
b) *Incremento (o decremento) de longitud de la pieza.*

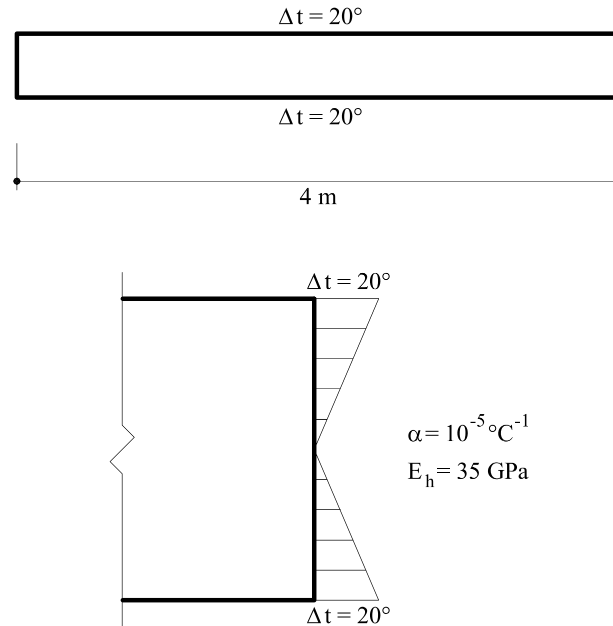


Fig. 1 Barra sometida a esfuerzos térmicos

Solución

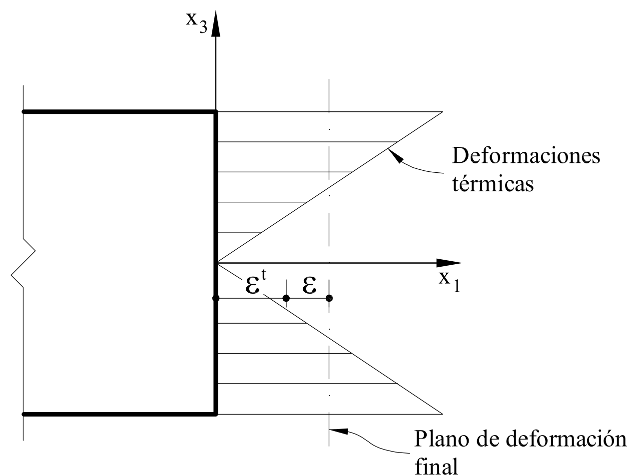


Fig. 2 Deformaciones

a) La sección debe permanecer plana, por lo que la suma de las deformaciones térmicas más las mecánicas debe estar en un plano (ver figura 2)

Por lo tanto:

$$\in^{t} + \in = k$$

Siendo *k* una constante a determinar. Además (se usarán las unidades *kN* y *m*):

$$\in^{t} = \frac{\Delta\, t}{0{,}15\ m}\alpha\ x_3 = 133{,}33\times 10^{-5}\, x_3$$

$$\in = \frac{\sigma(x_3)}{E_h} = \frac{\sigma(x_3)}{35\times 10^{6}\ kN/m^{2}}$$

Sustituyendo:

$$133{,}33\times 10^{-5}\, x_3 + \frac{\sigma(x_3)}{35\times 10^{6}} = k$$

$$\sigma(x_3) = 35\times 10^{6}\, k - 46.666{,}67\ x_3$$

Además, por equilibrio de fuerzas

$$\int_0^{0,15} \sigma(x_3)\, dx_3 = 0$$

Es decir:

$$\int_0^{0,15} \left(35\times 10^{6}\, k - 46.666{,}67\ x_3\right) dx_3 = 5{,}25\times 10^{6}\, k - 525 = 0$$

o sea,

$k = 10^{-4}$

con lo cual

$$\sigma(x_3) = 3.500 - 46.666{,}67\ x_3$$

con lo cual, las máximas tensiones de tracción se producen en $x_3 = 0$ y valen

$$(\sigma_t)_{\max} = 3.500\ kN/m^{2} = 3{,}5\ MPa$$

y las máximas de compresión para $x_3 = 0{,}15\ m$:

$$(\sigma_c)_{\max} = 3.500 - 46.666{,}67\times 0{,}15 = -3.500\ kN/m^{2} = -3{,}5\ MPa$$

b) Las deformaciones en $x_3 = 0$ valen

$$\in = \frac{3.500}{35 \times 10^{6}} = 10^{-4}$$

Por lo tanto, el alargamiento de la pieza valdrá:

$$\Delta L = \in L = 4 \times 10^{-4}\, m = 0{,}4\ mm$$

Problema 3.16 *En la estructura de la figura 1, la pieza AB es de longitud indefinida e infinitamente rígida. Sobre ella, actúa una fuerza vertical de valor F = 200 kN.*
Las piezas verticales están articuladas en sus dos extremos, y tienen una sección de 5 cm² y un módulo de elasticidad E = 2×10⁵ MPa.

Hallar

a) *Para x = 3,5 m esfuerzos en las barras verticales.*
b) *Valor de x para que la barra CD no tenga esfuerzos. En este caso hallar los esfuerzos en las otras barras.*
c) *Valor de x para que el esfuerzo en GH sea de 50 kN de compresión. Valor de los esfuerzos en las otras dos barras.*

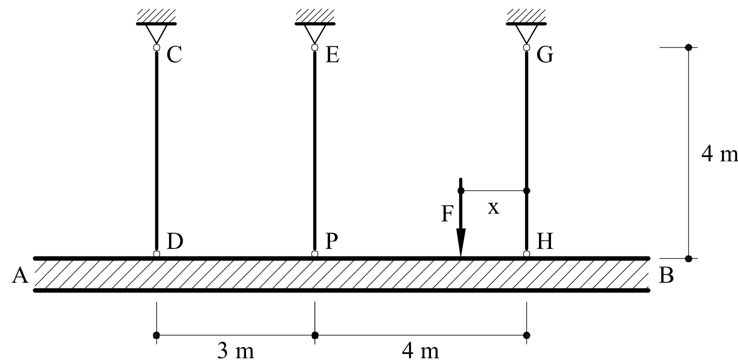


Fig. 1 Estructura del problema 3.16

Solución

a) Dado que la pieza *AB* es infinitamente rígida, las posiciones finales de los puntos *D, P* y *H* estarán sobre una recta, por lo que los alargamientos de las barras cumplirán la relación (ver figura 2)

$$\frac{\Delta L_{EP} - \Delta L_{CD}}{3} = \frac{\Delta L_{GH} - \Delta L_{CD}}{7}$$

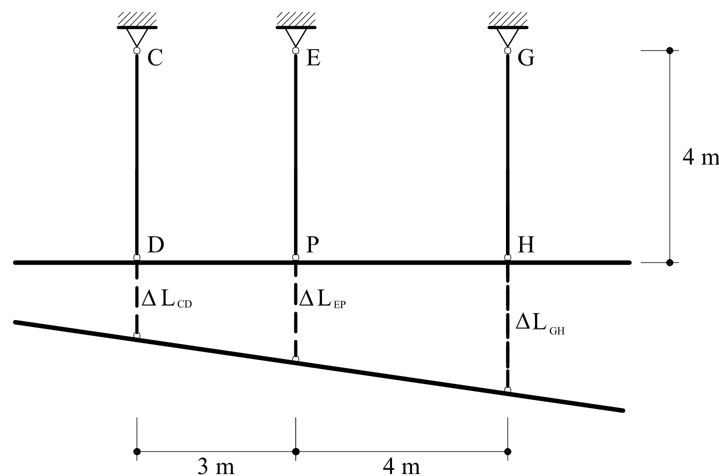


Fig. 2 Alargamientos de las barras

Por otro lado, (se usarán las unidades kN y m)

$$\Delta L_{CD} = \frac{N_{CD}\ 4}{E_{CD}\ A_{CD}} = \frac{N_{CD}}{25000}$$

$$\Delta L_{EP} = \frac{N_{EP}\ 4}{E_{EP}\ A_{EP}} = \frac{N_{EP}}{25000}$$

$$\Delta L_{GH} = \frac{N_{GH}\ 4}{E_{GH} A_{GH}} = \frac{N_{GH}}{25000}$$

Además:

- Por equilibrio de fuerzas:

$$N_{CD} + N_{EP} + N_{GH} = 200\ kN$$

- Por equilibrio de momentos:

$$7N_{CD} + 4N_{EP} = 3{,}5 \times 200 = 700$$

Con lo cual se obtiene

$N_{CD} = 62{,}2\ kN$ $N_{EP} = 66{,}2\ kN$ $N_{GH} = 71{,}6\ kN$

b) Si $N_{CD} = 0$ es preciso modificar únicamente la ecuación de momentos quedando ésta última:

$4\ N_{EP} = 200\ x$

con lo cual,

$x = 1{,}2\ m$ $N_{EP} = 60\ kN$ $N_{GH} = 140\ kN$

c) Si $N_{GH} = -50\ kN$, la ecuación de momentos queda:

$7\ N_{CD} + 4\ N_{EP} = 200\ x$

por lo que

$x = 7{,}59\ m$ $N_{CD} = 172{,}7\ kN$ $N_{EF} = 77{,}3\ kN$

Problema 3.17 *Un prisma mecánico de sección variable, longitud L = 30 m, y eje recto vertical tiene el extremo superior empotrado. En el extremo inferior está aplicada una carga P = 150 kN.*
Conociendo la tensión admisible $\sigma = 120\ MPa$*, el módulo de elasticidad*

$E = 200\ GPa$ *y el peso específico del material* $\gamma = 78\ kN/m^3$ *, se pide calcular:*

1. *El área de la sección recta del empotramiento, si el prisma es un sólido de igual resistencia.*
2. *El volumen del prisma mecánico.*
3. *El alargamiento total*
4. *Energía de deformación.*

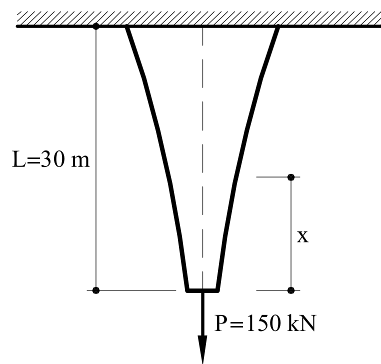


Fig. 1 Pieza sometida a esfuerzo axil

Solución

a) Se trata de determinar la expresión del área del prisma en función de *x* de forma que, sometido a su propio peso y a una fuerza *P*, las tensiones sean constantes en todo el cuerpo.

Si *A(x)* es el área, las tensiones valdrán

$$\sigma = \frac{\int_0^x \gamma\, A(\xi) d\xi + P}{A(x)}$$

es decir,

$$\frac{d\,A(x)}{dx}\sigma = \gamma\, A(x)$$

y resolviendo la ecuación diferencial

$$A = A_0\, e^{\gamma\, x/\sigma}$$

siendo $$A_0 = \frac{P}{\sigma}$$

o sea:

$$A = \frac{P}{\sigma} e^{\gamma x / \sigma}$$

b) El volumen del prisma, supuesto espesor unidad valdrá

$$V = \int_0^{30} \frac{P}{\sigma} e^{\gamma x / \sigma} dx = \frac{P}{\gamma} e^{\gamma x / \sigma} \Big|_0^{30} = 0{,}0379 \ m^3$$

c) El alargamiento total valdrá:

$$\Delta = \int_0^{30} \frac{\sigma}{E} dx = \frac{\sigma \ L}{E} = 0{,}018 \ m$$

d) La energía de deformación se escribirá:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \frac{\sigma^2}{E} dV = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} V = \frac{(120 \ MPa)^2}{2 \times 200 \ GPa} \times 0{,}0379 \ m^3 = 1{,}3644 \ julios$$

Problema 3.18 *Una losa rígida de forma cuadrada está sostenida horizontalmente en los vértices por cuatro tirantes verticales iguales.*

Determínese los esfuerzos originados en los cuatro tirantes por una carga F que actúa en un punto de una diagonal.

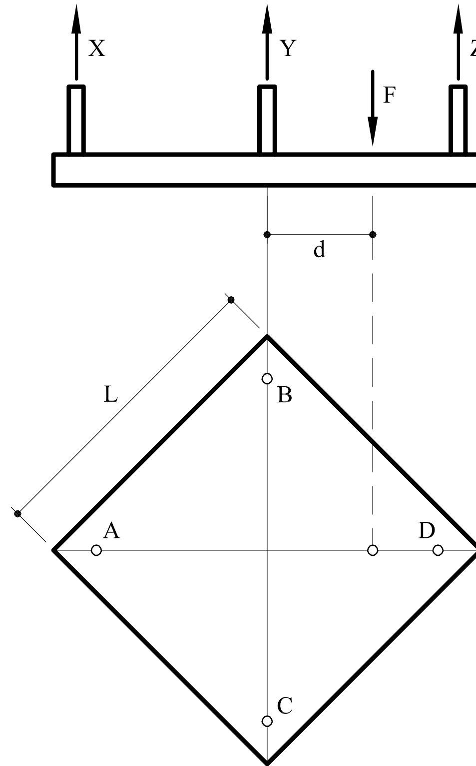


Fig. 1 Losa correspondiente al problema 3.18

Solución

Por simetría los esfuerzos en *B* y en *C* serán iguales. La losa rígida se mantiene plana, por lo que los movimientos verticales de *B* y *C* serán la semisuma de los de *A* y *D*. Además, como todos los tirantes son iguales, la misma relación que en los desplazamientos se cumplirá con los esfuerzos, es decir:

$$2\mathrm{Y} = \mathrm{X} + \mathrm{Z}$$

Por equilibrio de fuerzas

$$\mathrm{X} + 2\mathrm{Y} + \mathrm{Z} = F$$

Tomando momentos respecto a la recta que pasa por *B* y por *C*

$$\frac{L\sqrt{2}}{2}\left(-\mathrm{X} + \mathrm{Z}\right) - Fd = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$X = F\left(\frac{1}{4} - \frac{d}{L\sqrt{2}}\right)$$

$$Y = \frac{F}{4}$$

$$Z = F\left(\frac{1}{4} + \frac{d}{L\sqrt{2}}\right)$$

Capítulo 4:
Momento flector

Problema 4.1 *La viga de la figura 1a) tiene la sección que se representa en la figura 1b). Hallar el valor máximo de la carga* p *de forma que las tensiones no sobrepasen los 200 MPa.*

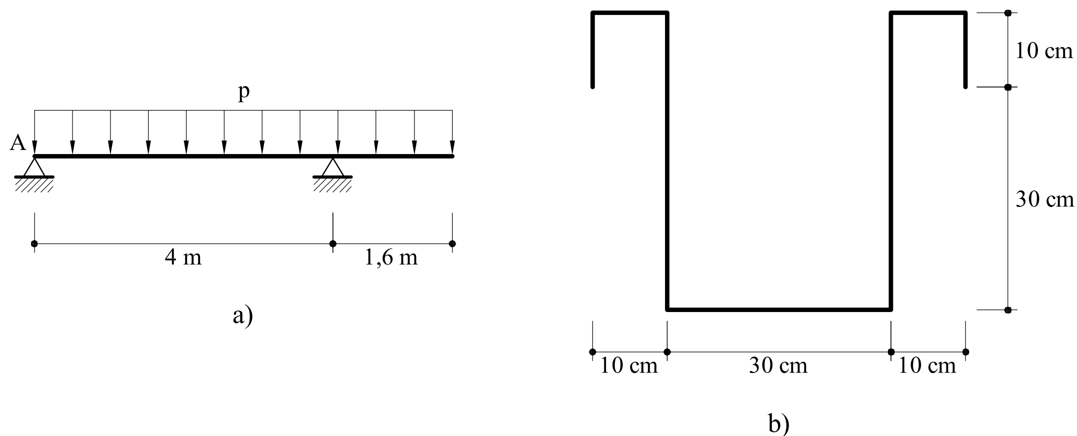


Fig. 1 Viga y Sección del problema 4.1

Solución

Las características geométricas de la sección valen

A = 150 cm^2
y_g= 19,33 cm
I = 35266,7 cm^4

La ley de momentos flectores se indica en la figura 2

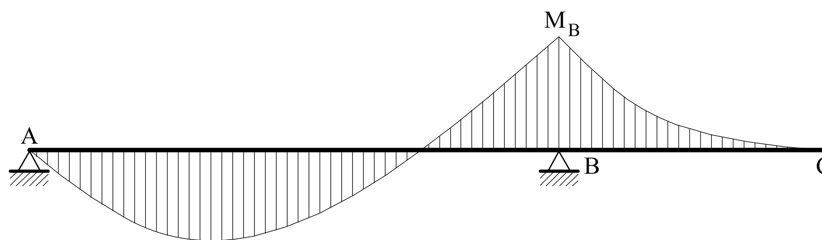


Fig. 2 Ley de momentos flectores

El momento flector en B vale

$$M_{fB} = p\frac{(1{,}6)^2}{2} = 1{,}28\ p$$

Se halla la reacción en A

$$4R_A = p\frac{4^2}{2} - 1{,}28p = (8 - 1{,}28)p \Rightarrow R_A = 1{,}68\ p$$

La ley de momentos flectores se escribe

$$M_f = 1{,}68 px - p\frac{x^2}{2}$$

y el valor máximo:

$$M_{fmáx} = M(x = 1{,}68) = \left(1{,}68^2 - \frac{1{,}68^2}{2}\right)p = 1{,}41\,p$$

La tensión máxima valdrá

$$\sigma_{\max} = \frac{M\ y}{I}$$

Se homogeinizan las unidades:

Si $p \Rightarrow kN/m \quad \Rightarrow \quad M = kN \times m$

$I = 35266{,}7 \times 10^{-8}\ \mathrm{m}^4$

$z_g = 20{,}67 \times 10^{-2}$ m

$\sigma_{\max} = 200\ MPa = 200 \times 10^3\ kN/m^2$

$$\sigma_{\max} = \frac{My}{I}$$

Sustituyendo,

$$200 \times 10^3 = \frac{1{,}41\ p\ 20{,}67 \times 10^{-2}}{35266{,}7 \times 10^{-8}}$$

$$200 = \frac{1{,}41 \times 20{,}67\ p}{35266{,}7 \times 10^{-3}}$$

$$p = \frac{200 \times 35{,}2667}{1{,}41 \times 20{,}67} = 242\ kN/m$$

Problema 4.2 *Determinar las magnitudes de las cargas admisibles que actuan sobre la viga de las dimensiones dadas. (* $\sigma_{trac} = 48\ MPa,\ \sigma_{com} = 120\ MPa$ *)*

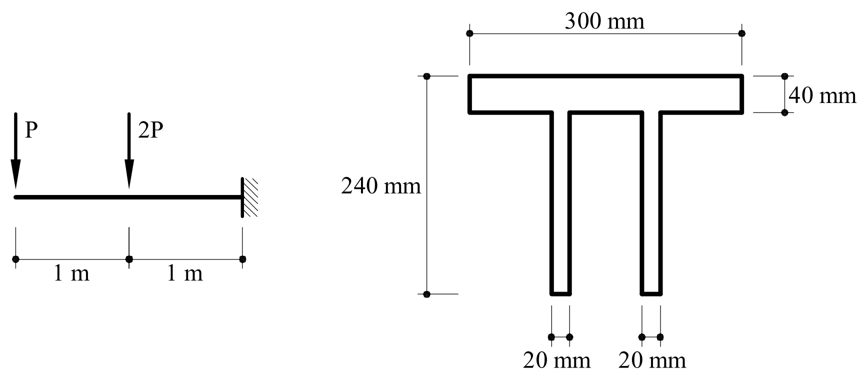


Fig. 1 Viga y sección del problema 4.2

Solución

En la figura 2 puede verse la posición del centro de gravedad de la sección.
El momento de inercia respecto a un eje horizontal que pasa por el c.d.g. vale

$I = 0{,}9739 \times 10^{-4}\ m^4$

y el área

$A = 2 \times 10^{-2}\ m^2$

El momento flector en el empotramiento vale $M_f = 4\ p$ y tracciona la fibra superior de la sección. Por lo tanto, las tensiones en la fibra superior valdrán (máximas de tracción)

$$\sigma_t = \frac{4\ P}{0{,}9739 \times 10^{-4}} \times 0{,}068$$

Las tensiones en la fibra inferior valdrán (máximas de compresión)

$$\sigma_c = \frac{4\ P}{0{,}9739 \times 10^{-4}} \times 0{,}172$$

Igualando

$$\sigma_t = 48\ MPa = 48000\ kN/m^2$$
$$\sigma_c = 120\ MPa = 120000\ kN/m^2$$

se obtiene

$P_1 = 17{,}19\ kN$ $\qquad\qquad$ $P_2 = 17\ kN$

El valor de P será el menor de los dos. Por lo tanto,

$P = 17\ kN$

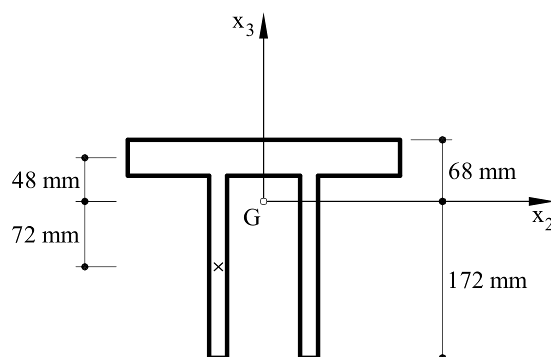


Fig. 2 Posición del centro de gravedad

Problema 4.3 *La sección recta de la viga de la figura 1 está formada por una doble T (IPN) que también se representa en la figura. Estando la viga en carga se suelda a la misma una platabanda de 10 cm. de longitud y 1 cm. de espesor a cada ala de la doble T. Realizada la soldadura, se eliminan las cargas de la viga.*

Determinar el valor de la máxima tensión normal que aparece en la sección del punto B cuando se quitan las cargas.

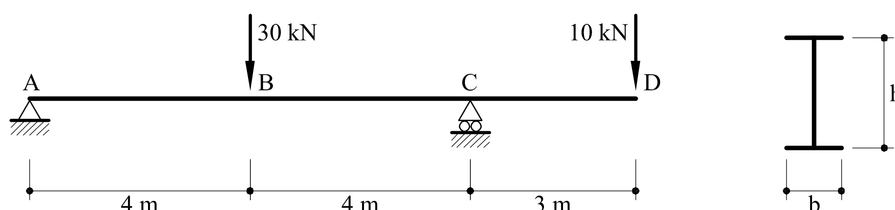


Fig. 1 Viga y sección del problema 4.3

Características de una sección IPN 200

- *Canto h = 20 cm*
- *Anchura de las alas: b = 10 cm*
- *Módulo resistente: W = 194 cm³*
- *Momento de inercia: I = 1940 cm⁴*

Solución

El momento flector en *B* vale M_{fB}= 45 *kNm*.

Las tensiones máximas en el punto *B* valdrán

$$\sigma = \frac{M_{fB}}{W} = \frac{45\ kNm}{194\ cm^3} = 231{,}96\ MPa$$

Seguidamente se sueldan sendas platabandas de *1 cm×10 cm* en cada ala. El nuevo momento de inercia valdrá

$$I' = 1940 + 2 \times 10 \times 1 \times 10{,}5^2 = 4145\ cm^4$$

Cuando se quitan las cargas aparecerán unas tensiones (en las alas de la subsección *IPN 200*) de valor

$$\sigma' = \frac{45\ kNm}{4145\ cm^4} \times 10cm = 108{,}56\ MPa$$

Por lo tanto las máximas tensiones residuales valen:

$$\sigma_{RES} = \sigma - \sigma' = 231{,}96 - 108{,}56 = 123{,}4\ MPa$$

Problema 4.4 *Una sección de hormigón de forma cuadrada de 80 cm de lado tiene un hueco circular de 10 cm de radio. El hormigón tiene un módulo de elasticidad de 2×10⁴ MPa y una tensión normal admisible, tanto a tracción como a compresión de 16 MPa.*

El hueco se rellena de acero de módulo de elasticidad 2×10⁵ MPa y de tensión normal admisible, tanto a tracción como a compresión, de 120 Mpa, de tal manera que se supone que acero y hormigón trabajan solidariamente unidos.

Sobre la sección conjunta se aplica un momento flector M que lleva la dirección y sentido del semieje positivo Gx_2.

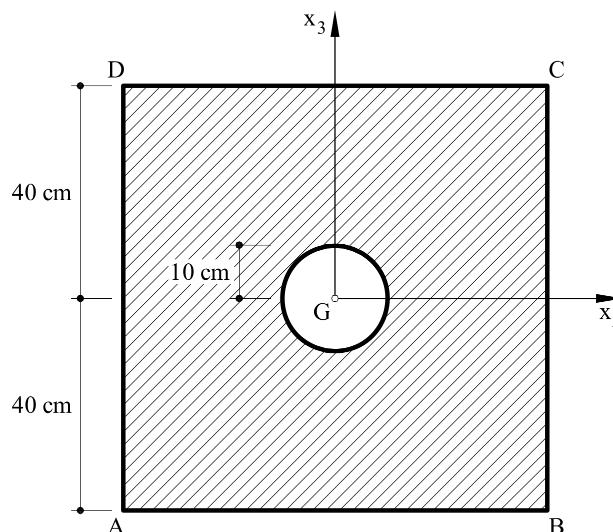


Fig. 1 Sección mixta del problema 4.4

Se pide:

Valor máximo de M que puede soportar la sección.

Solución

El momento de inercia de la sección mixta (referido al hormigón vale)

$$I^* = 3{,}484 \times 10^{-2}\ m^4$$

Las máximas tensiones en el hormigón valdrán

$$\sigma_n = \frac{M}{3{,}484 \times 10^{-2}} \times 0{,}4 = 16\ MPa = 16000\ kN/m^2$$

y en el acero

$$\sigma_a = \frac{M}{3{,}484 \times 10^{-2}} \times 0{,}1 \times 10 = 120\ MPa = 120000\ kN/m^2$$

De las anteriores expresiones se deducen dos valores de M

$M_1 = 1393{,}6\ kNm$ $M_2 = 4180\ kNm$

Se toma el menor valor, es decir

$$M = 1393{,}6\ kNm$$

Problema 4.5 *En la sección de la figura 1 todas las paredes tienen el mismo espesor (e=1,2 cm). El módulo de elasticidad de AB y CD vale 2E mientras que para el resto de las paredes vale E. Cuando un esfuerzo de compresión N= 100 kN actúa en D, hallar:*

- *Fibra neutra*
- *Distribución de tensiones normales a lo largo de AH*

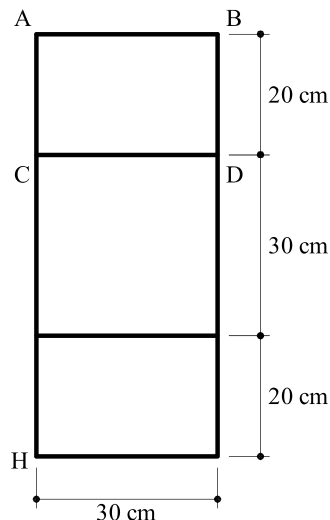


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 4.5

Solución

En la figura 2 puede verse la posición del centro de gravedad mecánico

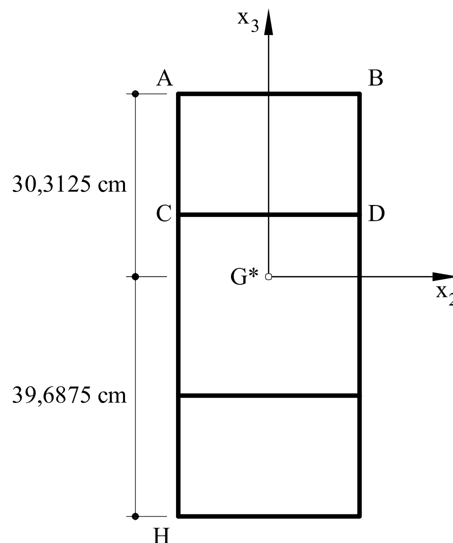


Fig.2 Posición del centro de gravedad mecánico

Los momentos de inercia mecánicos respecto a los ejes x_2 y x_3 valen:

$$I_2^* = 216762{,}5\ E$$

$$I_3^* = 54000\ E$$

El área mecánica vale

$$A^* = 384\ E$$

y por lo tanto, los radios de giro se escriben:

$$(r_2^*)^2 = \frac{I_2^*}{A^*} = \frac{216762{,}5\ E}{384\ E} = 564{,}486\ cm^2$$

$$(r_3^*)^2 = \frac{I_3^*}{A^*} = \frac{54000\ E}{384E} = 140{,}625\ cm^2$$

Las tensiones normales $\sigma\ (x_2\ ;\ x_3)$ en un punto cualquiera valen:

$$\sigma(x_2;x_3) = E(x_2\ ;x_3)\left[-\frac{N}{A^*} - \frac{N\ e_3}{I_2^*}x_3 - \frac{N\ e_2}{I_3^*}x_2\right] = \frac{-N\ E(x_2;x_3)}{A^*}\left[1 + \frac{e_3}{(r_2^*)^2}x_3 + \frac{e_2}{(r_3^*)^2}x_2\right]$$

Igualando $\sigma = (x_2\ ;\ x_3)$ a cero se obtiene la fibra neutra

$$1 + \frac{e_3}{(r_2^*)^2}x_3 + \frac{e_2}{(r_3^*)^2}x_2 = 0$$

y sustituyendo:

$$1 + \frac{10{,}3125}{564{,}486}x_3 + \frac{15}{140{,}625}x_2 = 0$$

$$1 + 0{,}1067\ x_2 + 0{,}01827\ x_3 = 0$$

lo cual constituye la expresión de la fibra neutra. Las coordenadas x_2 y x_3 vienen expresadas en centímetros.

Las tensiones a lo largo de AH se escriben:

$$\sigma(x_2;x_3) = -\frac{100\ E}{0{,}0384\ E}(1 + 0{,}1067\ x_2 + 0{,}01827\ x_3) = -2604{,}17(1 + 0{,}1067\ x_2 + 0{,}01827\ x_3)\frac{kN}{m^2} =$$
$$= -2{,}60417(1 + 0{,}1067\ x_2 + 0{,}01827\ x_3)\ MPa$$

Para el punto A:

$$\sigma_A = -2{,}60417[1 + 0{,}1067 \times (-15) + 0{,}01827 \times (30{,}3125)] = 0{,}1216\ MPa$$

$$\sigma_H = -2{,}60417[1 + 0{,}1067 \times (-15) + 0{,}01827 \times (-39{,}6875)] = 3{,}452\ MPa$$

En la figura 3 puede verse dibujada la fibra neutra así como la distribución de tensiones

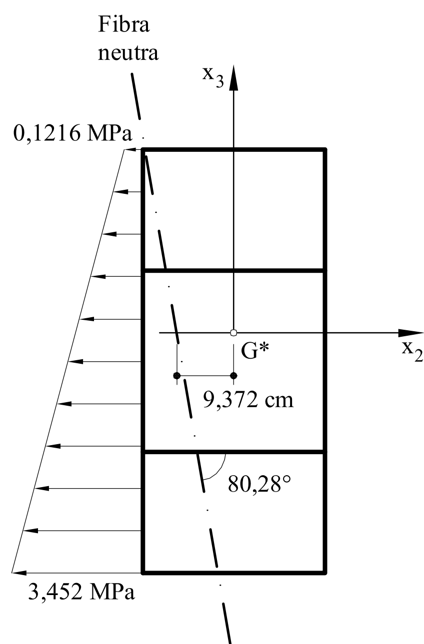


Fig. 3 Fibra neutra y distribución de tensiones

Problema 4.6 *La sección de la figura 1 está compuesta por una parte superior de 60 × 7 cm^2 de hormigón de módulo de elasticidad E_h= 30 GPa. Los espesores de las chapas de acero son: 8mm. para la chapa horizontal y 3mm. para las chapas inclinadas.El módulo de elasticidad del acero vale E_a = 210 GPa*

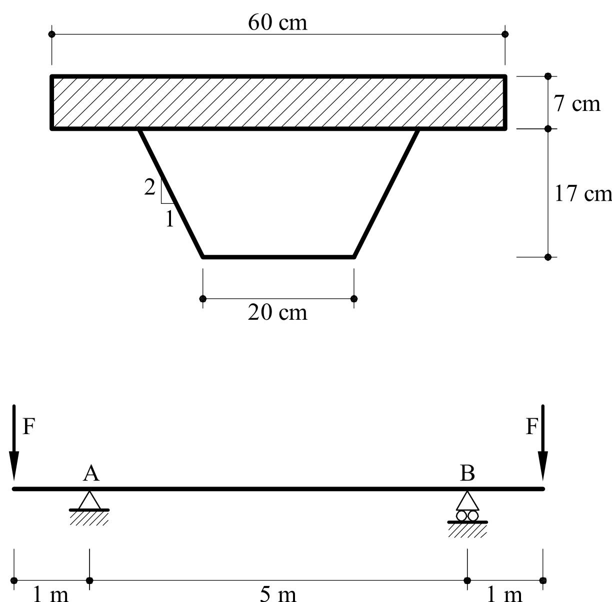


Fig. 1. Sección y viga del problema 4.6

La pieza a la que corresponde dicha sección se construye de la siguiente forma:

- *Se coloca la parte metálica sobre los apoyos A y B y se aplican dos fuerzas F*
- *Se hormigona el rectángulo de hormigón y una vez éste ha endurecido se retiran las fuerzas F.*

SE PIDE:

1. *Valor de las fuerzas F para que durante el proceso de construcción las máximas tensiones de compresión en el hormigón valgan 2 MPa.*
2. *Hallar y dibujar la distribución de tensiones en la sección de acero del tramo AB una vez colocadas las fuerzas F.*
3. *Una vez retirada la fuerza F hallar y dibujar la distribución de tensiones en el hormigón y acero.*
4. *Teniendo presente que en el tramo AB la curvatura es constante, hallar la flecha final en el punto medio de AB.*

Solución

Para la subsección de acero, el área, posición del c.d.g. respecto a la fibra inferior y el momento de inercia respecto a un eje horizontal que pasa por el c.d.g. valen:

$$A_a = 27{,}404\ cm^2$$

$$I_{2a} = 755{,}71\ cm^4$$

$$x_{3G}^{a} = 3{,}5372\ cm$$

En cuanto a la sección homogeneizada:

$$I_2^* = 44.896{,}1 cm^4 \quad (referido\ al\ hormigón)$$
$$x_{3G}^* = 15{,}182\ cm$$

En la figura 2 pueden verse representadas posiciones de los c.d.g.

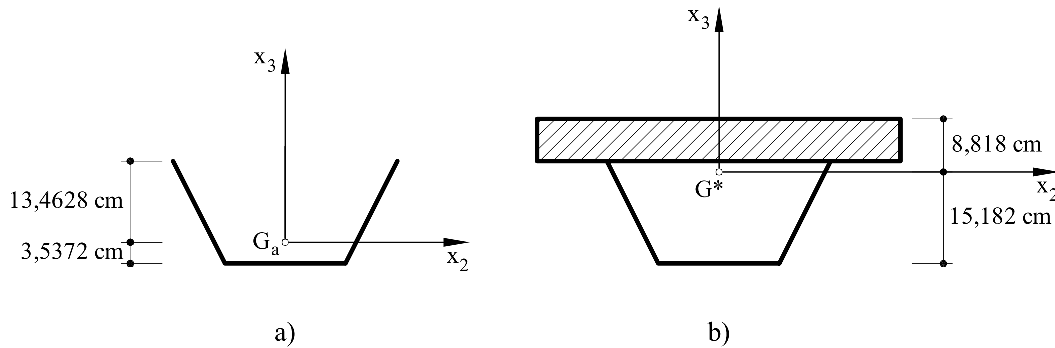


Fig. 2 Posiciones de los centros de gravedad
a) Sección de acero. b) Sección mixta

1. Cuando se retiran las fuerzas F, las tensiones máximas en el hormigón valdrán

$$(\sigma_h)_{\max} = \frac{M_2(x_3)_{\max}}{I_2^*} = \frac{F \times 1 \times 8{,}818\ cm}{44.896{,}1 \times 10^{-8}\ m^4} = 2\ MPa$$

Despejando el valor de F vale

$$F = 10{,}1828\ kN$$

2. Las tensiones en el acero una vez colocadas las fuerzas F valen (figura 3a))

$$\overline{\sigma}_a^2 = \frac{10{,}1828\ kN \times 1\ m \times 13{,}4628\ cm}{755{,}71\ cm^4} = 181{,}407\ MPa$$

$$\overline{\sigma}_a^3 = -\frac{10{,}1828\ kN \times 1\ m \times 3{,}5372\ cm}{755{,}71\ cm^4} = -47{,}662\ MPa$$

3. Distribución final de tensiones

   a. Tensiones provocadas por la retirada de F (figura 3 b))

$$\overline{\overline{\sigma}}_h^1 = -\frac{10{,}1828\ kN \times 1\ m \times 8{,}818\ cm}{44896{,}1\ cm^4} = -2\ MPa$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_h^{2} = -\frac{10{,}1828\ kN \times 1\ m \times (17\,cm - 15{,}182\ cm)}{44896{,}1\,cm^4} = -0{,}412\ MPa$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_a^{2} = 7\bar{\bar{\sigma}}_h^{2} = -2{,}886\ MPa$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_a^{3} = \frac{10{,}1828\,kN \times 1\,m \times 15{,}182\,cm}{44896{,}1\,cm^4} \times 7 = 24{,}1\ MPa$$

b. Tensiones totales (figura 3 c))

$$\sigma_h^1 = \bar{\bar{\sigma}}_h^{1} = -2\ MPa$$

$$\sigma_h^2 = \bar{\bar{\sigma}}_h^{2} = -0{,}412\ MPa$$

$$\sigma_a^2 = \bar{\sigma}_a^{2} + \bar{\bar{\sigma}}_a^{2} = 181{,}407 - 2{,}886 = 178{,}521\ MPa$$

$$\sigma_a^3 = \bar{\sigma}_a^{3} + \bar{\bar{\sigma}}_a^{3} = -47{,}662 + 24{,}1 = -23{,}562\ MPa$$

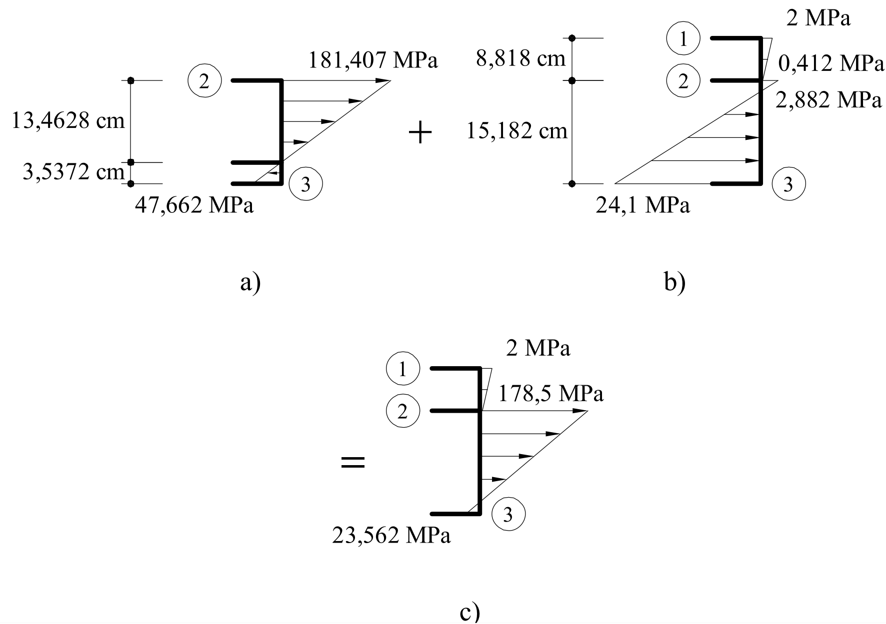


Fig. 3 Distribuciones de tensiones

4. Curvatura y flecha.
   Al cargar el acero con las dos fuerzas F se produce una curvatura de valor

$$\chi_a = \frac{M}{E_a\, I_{2a}} = \frac{10{,}1828\,kN \times 1\,m}{210\ GPa \times 755{,}71\,cm^4} = 0{,}006416\,m^{-1}$$

Al quitar las fuerzas, se produce en la sección mixta una curvatura de valor

$$\chi^* = -\frac{M}{E_h\, I_2^*} = -\frac{10{,}1828\, kN \times 1\, m}{30\, GPa \times 44896{,}1\, cm^4} = -0{,}000756\, m^{-1}$$

La curvatura final valdrá

$$\chi = \chi_a + \chi^* = 0{,}00566\, m^{-1}$$

Teniendo en cuenta que la deformada es un círculo, la flecha en el punto centro luz valdrá

$$f = \frac{(L/2)^2}{2}\chi = \frac{(5/2)^2}{2} 0{,}00566\ m = 0{,}01769\, m$$

Problema 4.7 *La sección de la figura 1, se fabrica de la siguiente forma:*

a) Se coloca la viga doble T de acero sobre dos apoyos procediendo a cargarla con dos fuerzas F, tal como indica la figura.
b) Seguidamente se coloca sobre AA' la capa de hormigón y, una vez éste ha endurecido, se retiran las fuerzas F.

Hallar:

El valor de F para que se cumplan las dos siguientes condiciones:

-Tensión en el acero al final del proceso en la sección centro luz inferior a 50 MPa.
-Tensión final en el hormigón en la sección centro luz inferior a 5 MPa.

c) Una vez construida la pieza se carga la misma con una fuerza puntual de valor P aplicada en el punto medio de AA'. Se pide:

-Valor de esta fuerza para que las tensiones finales en el alma del acero sean constantes, y valor de esta tensión.

NOTAS:

1. *Espesor en la pieza de acero igual a 1 cm.*
2. $E_a / E_h = 7$
3. *Peso específico del hormigón* $\hat{\gamma}_h = 25\, kN/m^3$

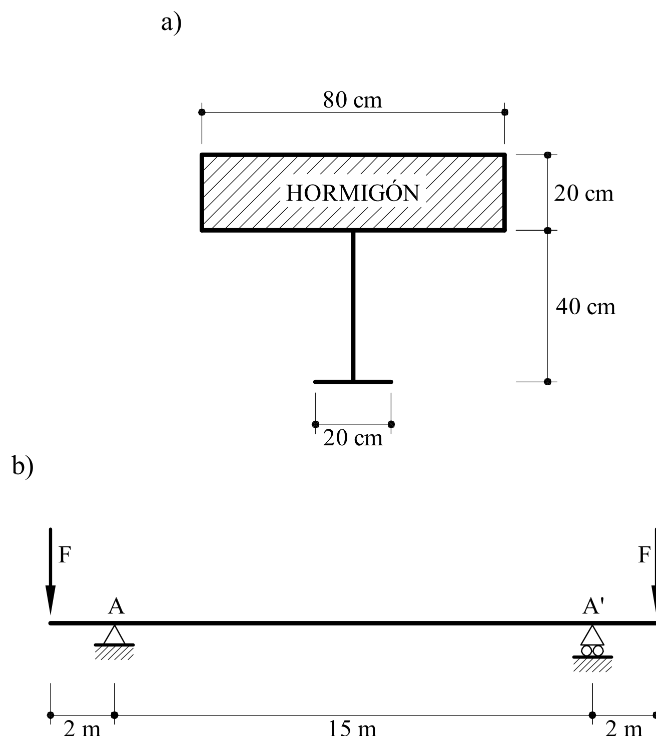


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 4.7

Solución

La sección de acero tiene un momento de inercia de valor $I_a = 21333\,cm^4 = 2{,}1333\times 10^{-4}\,m^4$
El centro de gravedad mecánico de la sección mixta está situado a 42,22 cm de la fibra inferior del acero (figura 2). El momento de inercia mecánico de la sección mixta (reducido al hormigón) vale $I^* = 57{,}6\times 10^{-4}\,m^4$.

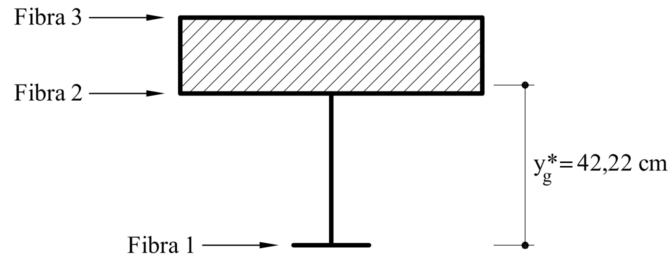


Fig. 2 Sección mixta

a) Cuando actúan las fuerzas F , la ley de momentos flectores es la que se dibuja en la figura 3

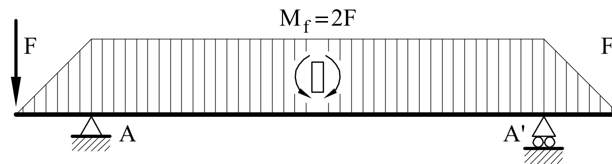


Fig. 3 Ley de momentos flectores debido a las fuerzas F

Las tensiones en el acero valdrán

- Fibra 1

$$\sigma_{a1}^{a} = -\frac{2F\times 0{,}2}{2{,}1333\times 10^{-4}} = -0{,}1875\times 10^{4}\ F \qquad \text{(compresiones)}$$

- Fibra 2

$$\sigma_{a2}^{a} = \frac{2F\times 0{,}2}{2{,}1333\times 10^{-4}} = 0{,}1875\times 10^{4}\ F \qquad \text{(tracciones)}$$

b) Se carga la viga de acero con el hormigón fresco:

El peso específico del hormigón fresco vale:

$$\hat{\gamma}_h = 25\ kN/m^3$$

por lo que el peso del hormigón fresco por unidad de longitud de viga será

$$\gamma_h = 25\ \frac{kN}{m^3} \times 0{,}2 \times 0{,}8 = 4\,kN/m$$

Esta carga producirá un momento flector máximo en la viga de acero de valor:

$$M_{f\,\max} = \frac{4 \times 15^2}{8} = 112{,}5\ kNm$$

Las tensiones en las fibras 1 y 2 del acero debido al peso del hormigón valen

- Fibra 1

$$\sigma_{a1}^{b} = \frac{112{,}5 \times 0{,}2}{2{,}1333 \times 10^{-4}} = 10{,}55 \times 10^4\ kN/m^2$$

- Fibra 2

$$\sigma_{a2}^{b} = -\frac{112{,}5 \times 0{,}2}{2{,}1333 \times 10^{-4}} = -10{,}55 \times 10^4\ kN/m^2$$

b') Una vez endurecido el hormigón, se eliminan las fuerzas F (lo cual es equivalente a dejarlas y aplicar en los mismos puntos dos fuerzas F de sentido contrario). Dichas fuerzas producen sobre la sección mixta una ley de momentos flectores representada en la figura 4

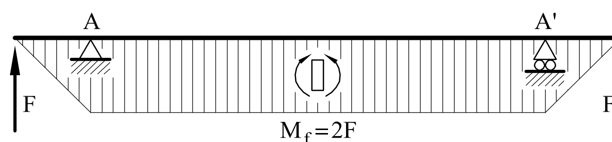


Fig. 4 Ley de momentos flectores al retirar las fuerzas F

Las tensiones que aparecen valen:

- Fibra 1. Tensiones en el acero

$$\sigma_{a1}^{b'} = 7\,\frac{2F \times 0{,}42222}{57{,}6 \times 10^{-4}} = 7 \times 146{,}6\ F = 1026{,}2\ F$$

- Fibra 2. Tensiones en el acero

$$\sigma_{a2}^{b'} = 7\,\frac{2F \times (0{,}42222 - 0{,}4)}{57{,}6 \times 10^{-4}} = 7{,}72\ F \times 7 = 54\ F$$

- Fibra 3. Tensiones en el hormigón

$$\sigma_{h3}^{b'} = -\frac{2F \times (0,2 - 0,02222)}{57,6 \times 10^{-4}} = -61,73\ F$$

Tensiones finales:

- Fibra 1. Tensiones en el acero

$$\sigma_{a1} = -0,1875 \times 10^4\, F + 10,55 \times 10^4 + 1026,2F = -848,8F + 10,55 \times 10^4$$

- Fibra 2. Tensiones en el acero

$$\sigma_{a2} = 0,1875 \times 10^4\, F - 10,55 \times 10^4 + 54F = 1929F - 10,55 \times 10^4$$

- Fibra 3. Tensiones en el hormigón

$$\sigma_{h3} = -61,72F$$

Se imponen las condiciones

$$-848,8\ F + 10,55 \times 10^4 \leq 50000 \frac{kN}{m^2} \Rightarrow F = 65,39\ kN$$

$$1929\ F - 10,55 \times 10^4 \leq 50000 \frac{kN}{m^2} \Rightarrow F = 80,61\ kN$$

$$-61,73\ F = -5000 \Rightarrow F = 81\ kN$$

Es decir:

$$F = 65,39\ kN$$

Con $F = 65,39\ kN$, la distribución de tensiones en el acero se indica en la figura 5

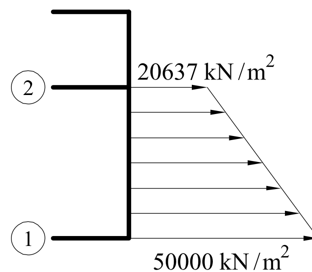


Fig. 5 Tensiones en el acero

c) Se aplica la fuerza puntual *P* con un momento de sentido horario (fuerza *P* ascendente) las tensiones que se producirán en 1 y 2 serán:

$$\sigma_1 = -\frac{3{,}75\ \mathrm{P} \times 0{,}42222}{57{,}6 \times 10^{-4}} \times 7 = -1924{,}18\ \mathrm{P}$$

$$\sigma_2 = -\frac{3{,}75\ \mathrm{P}\left(0{,}42222 - 0{,}4\right)}{57{,}6 \times 10^{-4}} \times 7 = -101{,}26\ \mathrm{P}$$

Para que la distribución de tensiones en el acero sea constante es preciso que las tensiones totales en la fibra 1 (las previas más las provocadas por la carga *P*) sean iguales a las de la fibra 2. Es decir,

$$20637 - 101{,}26\ \mathrm{P} = 50000 - 1924{,}18\,P$$

O sea:

$$\mathrm{P} = 16{,}11\ kN\ \left(fuerza\ ascendente\right)$$

La tensión final en el acero valdrá:

$$\sigma = 20637 - 101{,}26 \times 16{,}11 = 19005\ kN/m^2\ = 19\ MPa$$

Problema 4.8 *La estructura de la figura 1 se construye de la forma siguiente:*

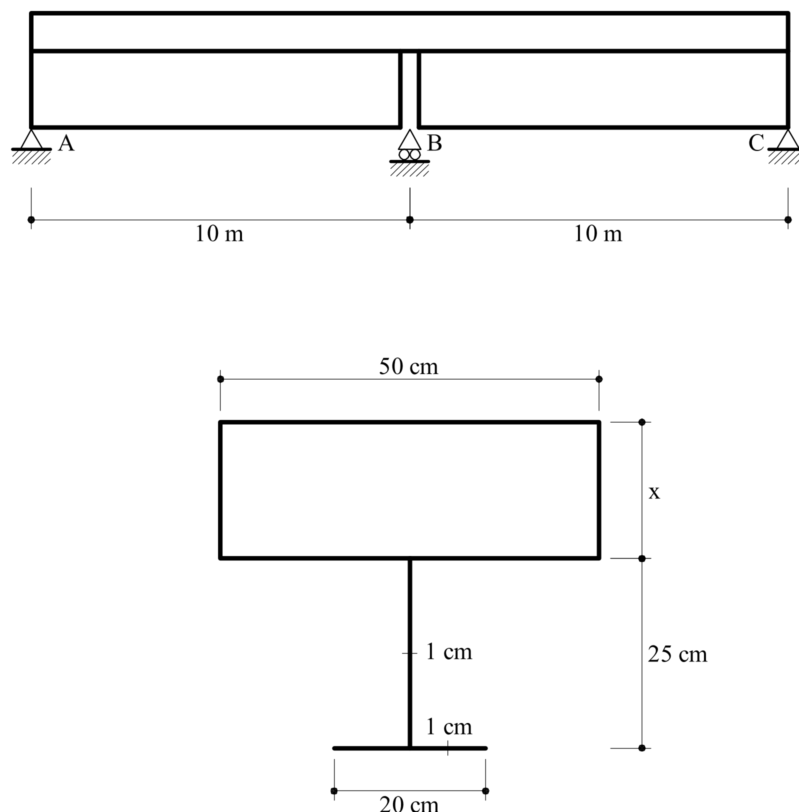


Fig. 1 Viga y sección

1. *Se colocan las piezas de acero AB yBC sobre los apoyos y de forma independiente*
2. *Se coloca sobre ellas una capa de hormigón de densidad 25 kN/m^3 y espesor tal que una vez endurecido el hormigón la fibra neutra de la nueva sección esté en el contacto hormigón-acero.*
3. *Una vez endurecido el hormigón, se sueldan las dos piezas de acero en la sección B y se quita el apoyo central (apoyo B).*

HALLAR:

- *Máximas tensiones en el hormigón en la sección media de AB*
- *Máximas tensiones en el acero en la sección media de AB*
- *Distribución final de tensiones en la sección media de AB*

$$n = E_a / E_h = 10$$

Solución

- Características mecánicas de la subsección de acero (figura 2)
  $x_{2g} = 6{,}944\ cm$
  $A = 45\ cm^2$
  $I_2 = 3038{,}19\ cm^4$

- Características mecánicas de la sección mixta.

Dado que el contacto entre el hormigón y el acero debe corresponder a la fibra neutra, el valor de x será tal que en este mismo punto esté situado el centro de gravedad mecánico de la sección, es decir

$x = 18\ cm$
$A^* = 50\ x + 45\ n = 1350\ cm^2$
$I_2^* = 274.083{,}3\ cm^4$

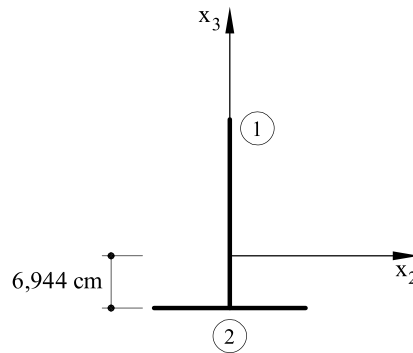


Fig. 2 Subsección de acero

Se determinan las tensiones en el hormigón y en el acero en el punto medio de *AB*

a) Sobre la pieza biapoyada *AB* se coloca el hormigón fresco (figura 3)

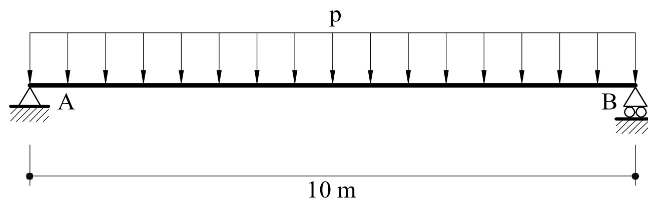


Fig. 3 Sobrecarga debida al hormigón fresco

El peso propio del hormigón equivale a una sobrecarga de $p = 0{,}18 \times 0{,}5 \times 25 = 2{,}25\ kN/m$. La reacción en B valdrá

$$R_B^{AB} = 2{,}25 \times \frac{10}{2} = 11{,}25\ kN$$

El momento flector en el punto medio de *AB* valdrá

$$M_{f1} = \frac{2{,}25 \times 10^2}{8} = 28{,}125\ kN \times m$$

que provoca unas tensiones en el acero de valor
para el punto 1:

$$\left(\sigma_1\right)_1 = \frac{28{,}125\ kNm \times \left(0{,}25 - 0{,}06944\right)m}{3038{,}19 \times 10^{-8}\, m^4} = 167.147{,}2 \frac{kN}{m^2} = 167{,}15\ MPa \qquad (compresión)$$

para el punto 2:

$$\left(\sigma_1\right)_2 = \frac{28{,}125\ kNm \times 0{,}06944\ m}{3038{,}19 \times 10^{-8}\ m^4} = 64.281{,}69\ kN/m^2 = 64{,}3\ MPa \quad (tracción)$$

La distribución de tensiones viene dada en la figura 4

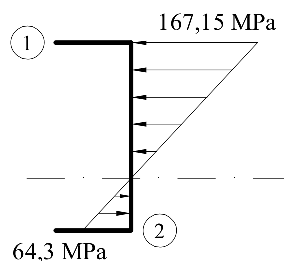


Fig. 4 Distribución de tensiones en el acero

b) Se sueldan las dos piezas de acero una vez endurecido el hormigón:

Este hecho no provoca tensiones al no dar lugar a ningún tipo de deformación.

c) Se quita el apoyo central *B*.

La reacción total en *B* vale

$$R_B = R_B^{AB} + R_B^{BC} = 22{,}5\ kN$$

Estáticamente se puede sustituir el apoyo por la reacción R_B. Quitar R_B equivale a mantenerla y aplicar en este punto una fuerza R_B igual y de sentido contrario (ver figura 5).

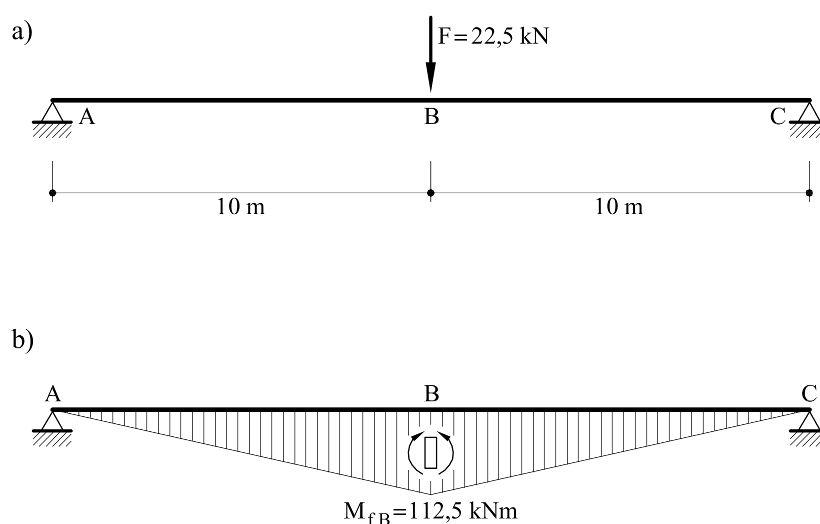


Fig. 5 Efecto de eliminar la reacción RB

El momento flector en *B* valdrá

$$M_{fB} = \frac{22{,}5 \times 20}{4} = 112{,}5\ kN \times m$$

En el punto medio de *AB* el momento flector vale

$$M_{f2} = \frac{M_{fB}}{2} = \frac{112{,}5\ kNm}{2} = 56{,}25\ kNm$$

Este momento actúa, lógicamente, en la sección mixta, y produce una distribución de tensiones de valor:

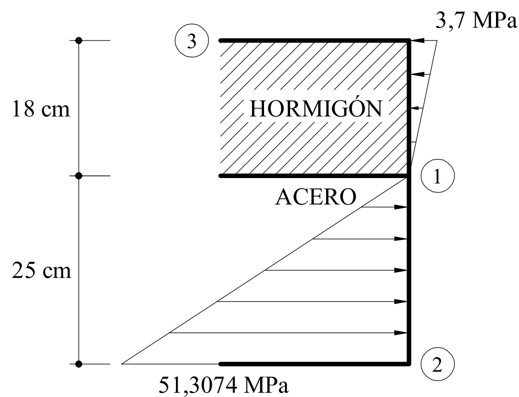


Fig. 6 Distribución de tensiones en la sección mixta como consecuencia de quitar el apoyo B

-En el punto 3 (ver figura 6)

$$(\sigma_2)_3 = \frac{56{,}25\ kNm \times 0{,}18\ m}{274.083{,}3 \times 10^{-8}\, m^4} = 3.694{,}1\ kN/m^2 = 3{,}7\ MPa$$

- En el punto 1:

$$(\sigma_2)_1 = 0$$

- En el punto 2:

$$(\sigma_2)_2 = \frac{56{,}25\ kNm \times 0{,}25\ m}{274.083{,}3 \times 10^{-8}\ m^4} \times n = 51.307{,}4\, kN/m^2 = 51{,}3074\ MPa \quad (tracción)$$

Sumando estas tensiones a las obtenidas previamente se obtiene la distribución final de tensiones σ_f.

Hormigón

$$(\sigma_f)_3 = 3{,}7\ MPa \quad (compresión)$$

$$(\sigma_f)_1 = 0$$

Acero

$$\left(\sigma_f\right)_1 = 0 + 167{,}15\ MPa = 167{,}15\ MPa \quad \left(compresión\right)$$
$$\left(\sigma_f\right)_2 = 64{,}3 + 51{,}3074 = 115{,}6074\ MPa \quad \left(tracción\right)$$

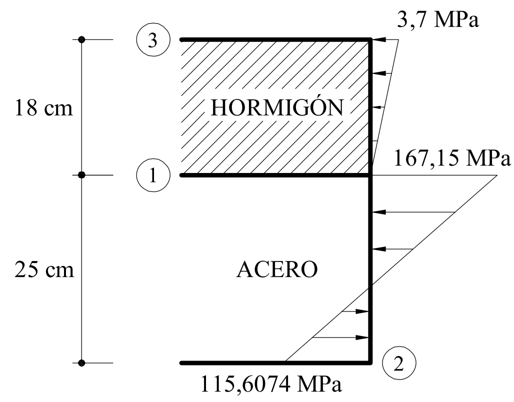


Fig. 7 Distribución final de tensiones

Problema 4.9 *La pieza de la figura 1, con la sección mixta que se indica, se construye de la siguiente forma:*

- *Se apoya el acero sobre los tres apoyos indicados.*
- *Se construye la parte de hormigón vertiendo el hormigón fresco directamente sobre el acero, de tal forma que éste último aguanta el peso del hormigón fresco (peso específico:* $23\,kN/m^3$ *). En esta etapa, experimentalmente se constata que la reacción en el apoyo central vale* $43{,}125\,kN$.
- *Cuando el hormigón está endurecido se elimina el apoyo central.*

HALLAR la distribución de tensiones en la sección situada en el punto medio de la viga final resultante (viga con dos apoyos de 10 metros de luz) ($n = E_a/E_h = 7$ *)*

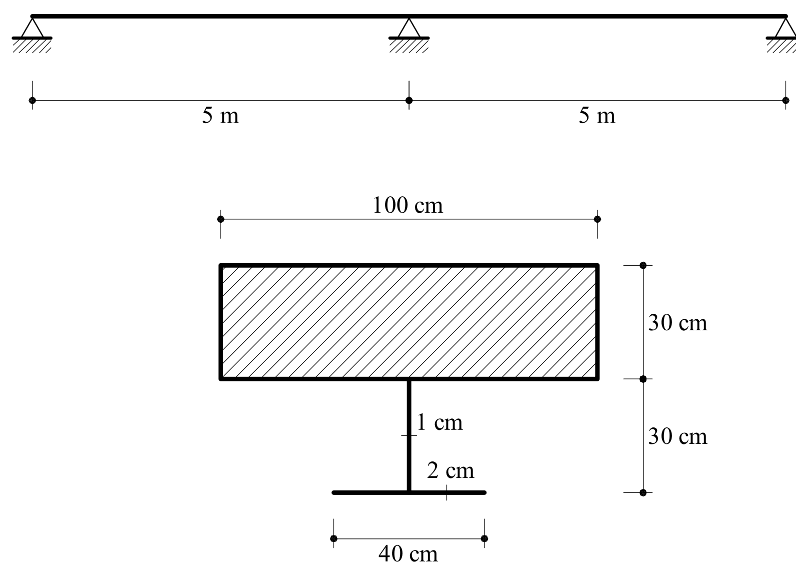


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 4.9

Solución

El centro de gravedad de la subsección de acero está situado a 4,1 cm del eje de la pared inferior (figura 2.a). El momento de inercia respecto a un eje horizontal que pasa por dicho centro de gravedad vale

$$I = 7159{,}1\,cm^4$$

El peso del hormigón fresco produce una carga uniformemente repartida a la subsección de acero de valor

$$p = 0{,}3 \times 1{,}0 \times 23 = 6{,}9\,kN/m$$

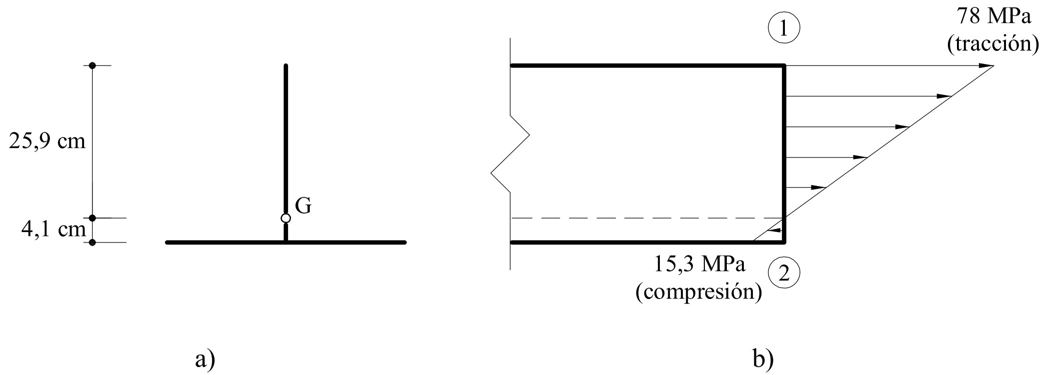


Fig. 2 Posición del centro de gravedad y distribución de tensiones en la subsección de acero

Como el momento flector en el apoyo central vale $M_f = 21{,}56\,kN\,m$, las tensiones en las fibras extremas valdrán (figura 2 b))

$$\sigma_1 = \frac{21{,}56\,kN \times 25{,}9\,cm}{7159{,}1\,cm^4} = 78\,MPa \quad (tracción)$$

$$\sigma_2 = -\frac{21{,}56\ \ kN \times (4{,}1+1)cm}{7159{,}1\,cm^4} = -15{,}3\,MPa \quad (compresión)$$

Cuando, una vez endurecido el hormigón, se elimina el apoyo central, la sección resistente a considerar es la sección mixta. En la figura 3.a) se indica la posición del centro de gravedad mecánico de dicha sección. El momento de inercia mecánico vale

$$I^* = 1.300.600\,cm^4$$

Eliminar el apoyo central equivale a considerar la viga completa de 10 metros de luz sometida a una fuerza puntual, igual y contraria al valor de la reacción. Dicha reacción vale

$$F = 43{,}125\,kN$$

Con lo cual, el momento flector máximo vale

$$M_f = \frac{F(2L)}{4} = \frac{43{,}125 \times 2 \times 5}{4} = 107{,}81\ kN\,m$$

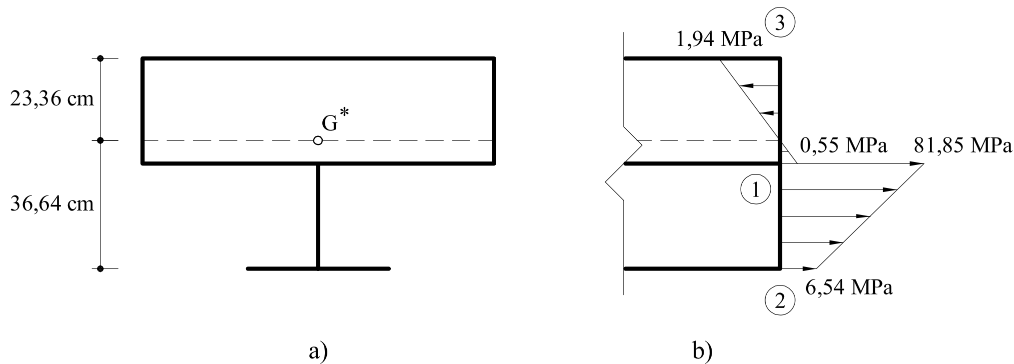


Fig. 3 Sección mixta: Centro de gravedad y distribución de tensiones

Las tensiones en el hormigón valdrán (figura 3 b))

$$\sigma_3^h = -\frac{107{,}81\,kN\,m \times 23{,}36\,cm}{1.300.600\,cm^4} = -1{,}94\,MPa \quad (compresión)$$

$$\sigma_1^h = -\frac{107{,}81\,kN\,m \times 6{,}64\,cm}{1.300.600\,cm^4} = 0{,}55\,MPa \quad (tracción)$$

Las tensiones en el acero serán las que existían previamente más las producidas como consecuencia de eliminar el apoyo central:

$$\sigma_1^a = 78\,MPa + \frac{107{,}81\,kN\,m \times (30-23{,}36)cm}{1.300.600\,cm^4} \times 7 = 81{,}85\,MPa \quad (tracción)$$

$$\sigma_2^a = -15{,}3\,MPa + \frac{107{,}81\,kN\,m \times (60+1-23{,}36)cm}{1.300.600\,cm^4} \times 7 = 6{,}54\,MPa \quad (tracción)$$

Problema 4.10 *La viga de la figura 1 tiene 10 m. de longitud. En sus extremos están colocadas sendas placas infinitamente rígidas. La sección de la pieza es mixta de hormigón y acero y sus características pueden verse también en la figura.*

Dicha viga tiene un incremento de temperatura de $t = 30^o$ grados.

Determinar:

a) *Distribución de tensiones.*
b) *Radio de curvatura.*
c) *Valor y posición de un esfuerzo axil para que la pieza recupere su posición inicial.*
d) *En este último caso, distribución de tensiones.*

$E_{acero} = 210\ GPa$
$E_{\text{hormigón}} = 30\ GPa$
$\alpha_{acero} = 1{,}2 \times 10^{-5}\ {}^oC^{-1}$
$\alpha_{\text{hormigón}} = 10^{-5}\ {}^oC^{-1}$

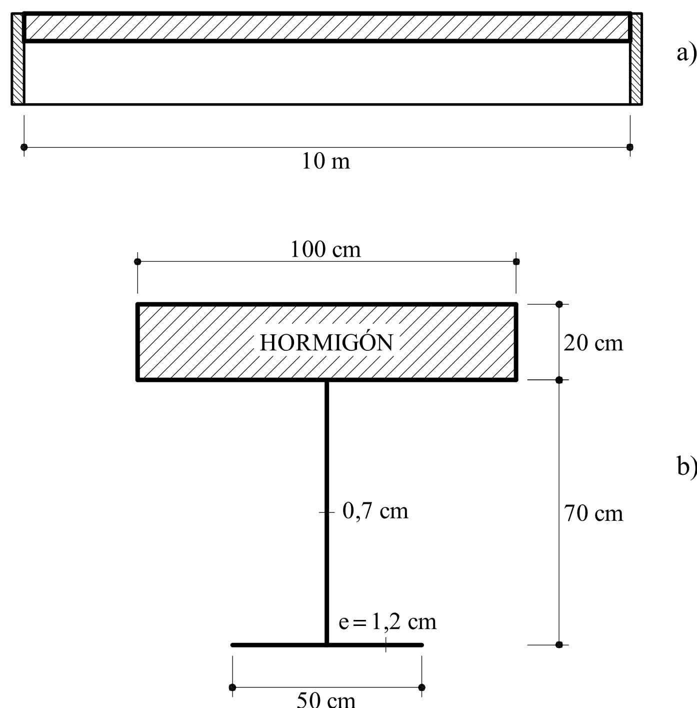


Fig. 1

Solución

Las características geométricas de la subsección de hormigón respecto a un eje horizontal que pasa por su centro de gravedad son:

- Momento de inercia $I_h = 66.666{,}67\ cm^4 = 6{,}66667 \times 10^{-4}\ m^4$
- Área $A_h = 2.000\ cm^2 = 0{,}2\ m^2$

Para la subsección de acero:

- Posición del c.d.g. del acero: $y_a = 16{,}06\ cm = 0{,}1606\ m$ respecto a su fibra inferior.

- Momento de inercia respecto a un eje horizontal que pasa por su c.d.g.

  $I_a = 51.933{,}7\ cm^4 = 5{,}19337 \times 10^{-4}\ m^4$

- Área: $A_a = 109\ cm^2 = 0{,}0109\ m^2$

Características mecánicas de la sección mixta:

- Posición del c.d.g. : $y_g^* = 62{,}34\ cm = 0{,}6234\ m$
- Momento de inercia mecánico (referido al hormigón)

  $I^* = 2.688.109{,}8\ cm^4 = 268{,}81098 \times 10^{-4}\ m^4$

- Área mecánica (referida al hormigón)

  $A^* = 2.763\ cm^2 = 0{,}2763\ m^2$

Si se libera la unión entre el hormigón y el acero, cada parte, debido a la variación térmica, se alargaría libremente tal como indica la figura 2 a). Dado que dichos movimientos no son compatibles, se aplica un esfuerzo N_h a la sección de hormigón en una posición a determinar, y un esfuerzo N_a a la zona de acero en una posición también a determinar. Por equilibrio $N_a = N_h = N$. Además, el punto de aplicación de N_h debe coincidir con el punto de aplicación de N_a. Para obtener N así como su punto de aplicación, se igualarán los movimientos en el contacto hormigón-acero, imponiéndose además que la curvatura en el hormigón debe ser la misma que en el acero (hipótesis de sección plana).

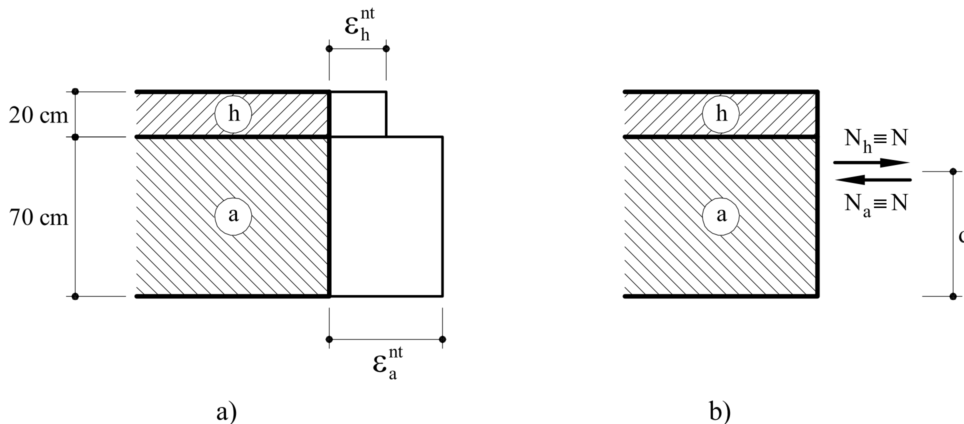


Fig. 2 a) Deformaciones térmicas no compatibles.
b) Esfuerzo N.

Las deformaciones térmicas valen:

$$\varepsilon_h^{nt} = \alpha_h\, t = 30 \times 10^{-5}$$
$$\varepsilon_a^{nt} = \alpha_a\, t = 36 \times 10^{-5}$$

Las deformaciones mecánicas en el contacto hormigón-acero serán las debidas a *N:*

-Hormigón:

- Deformaciones debidas a N actuando en el c.d.g. del hormigón.

$$\varepsilon_h^N = \frac{N}{E_h A_h} = \frac{N}{30\times 10^6 kN/m^2 \times 0{,}2m^2} = 0{,}166667\times 10^{-6} N$$

- Deformaciones debidas al momento producido por N.

$$\varepsilon_h^M = \frac{N(0{,}8-d)\times 0{,}1}{E_h I_h} = \frac{N(0{,}8-d)\times 0{,}1}{30\times 10^6 \times 6{,}66667\times 10^{-4}} = 5\times 10^{-6} N(0{,}8-d)$$

-Acero:

- Deformaciones debidas a N actuando en el c.d.g. del acero

$$\varepsilon_a^N = \frac{N}{E_a A_a} = -\frac{N}{210\times 10^6 kN/m^2 \times 0{,}0109m^2} = -0{,}43687\times 10^{-6} N$$

- Deformaciones debidas al momento producido por N

$$\varepsilon_a^M = -\frac{N(d-0{,}1606)\times(0{,}7-0{,}1606)}{E_a I_a} = -\frac{N(d-0{,}1606)\times(0{,}7-0{,}1606)}{210\times 10_6\, kN/m^2 \times 5{,}19337\times 10^{-4} m^4} =$$
$$= -4{,}9459\times 10^{-6}\times N(d-0{,}1606)$$

Igualando deformaciones:

$$30\times 10^{-5} + 0{,}166667\times 10^{-6} N + 5\times 10^{-6} N(0{,}8-d) =$$
$$= 36\times 10^{-5} - 0{,}43687\times 10^{-6} N - 4{,}9459\times 10^{-6} N(d-0{,}1606)$$

Es decir:

$$60 - 3{,}80924 N + 0{,}0541 Nd = 0$$

lo cual constituye la primera ecuación.

La segunda ecuación se obtendrá de igualar las curvaturas, o sea:

$$\chi_h = \frac{N(0{,}8-d)}{E_h I_h}$$

$$\chi_a = \frac{N(d-0{,}1606)}{E_a I_a}$$

Igualando:

$$(0{,}8-d)\frac{E_a}{E_h}\frac{I_a}{I_h} = d - 0{,}1606$$

de donde:

$$d = 0{,}70\ m$$
$$N = 15{,}90\,kN$$

a) Distribución de tensiones (ver figura 3):

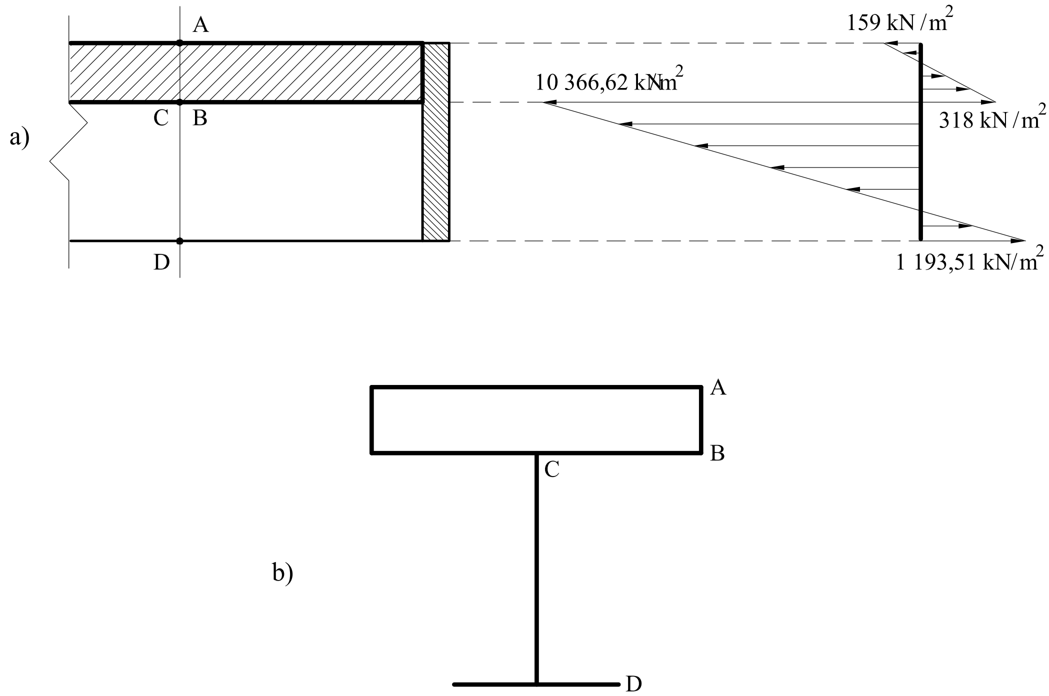


Fig. 3. Sección de la viga y distribución de tensiones

$$\sigma_A^I = \frac{N}{0{,}2} - \frac{N(0{,}8-d)\cdot 0{,}1\,m}{6{,}666\times 10^{-4}\,m^4} = -159{,}00\,kN/m^2$$

$$\sigma_B^I = \frac{N}{0{,}2} - \frac{N(0{,}8-d)\cdot 0{,}1\,m}{6{,}666\times 10^{-4}\,m^4} = 318{,}00\,kN/m^2$$

$$\sigma_C^I = -\frac{N}{0{,}0109} - \frac{N\cdot(d-0{,}1606)\cdot(0{,}7-0{,}1606)}{5{,}1933\times 10^{-4}\,m^4} = -10\,366{,}62\,kN/m^2$$

$$\sigma_D^I = -\frac{N}{0{,}0109} + \frac{N\cdot(d-0{,}1606)\cdot 0{,}1606}{5{,}1933\times 10^{-4}\,m^4} = 1\,193{,}51\ kN/m^2$$

b) Dado que la curvatura χ de cualquier curva es igual a la inversa del radio de curvatura:

$$\rho = \frac{E_h\cdot I_h}{N\cdot(0{,}8-d)} = 1{,}25\times 10^4\,m$$

c) Conocidos los valores de las deformaciones, se obtienen las tensiones correspondientes a un esfuerzo axil de posición la que se desea hallar y sentido contrario[1].

$$\in_A = 30\times10^{-5} + 0{,}1666\times10^{-6}\times15{,}90 - 5\times10^{-6}\times15{,}90\times\left(0{,}8-0{,}7\right) = 2{,}9469\times10^{-4}$$

$$\in_B = 30\times10^{-5} + 0{,}1666\times10^{-6}\times15{,}90 + 5\times10^{-6}\times15{,}90\times\left(0{,}8-0{,}7\right) = 3{,}1059\times10^{-4}$$

$$\in_C = 36\times10^{-5} - 0{,}43687\times10^{-6}\times15{,}90 - 4{,}9459\times10^{-6}\times15{,}90\times\left(0{,}7-0{,}1606\right) = 3{,}1060\times10^{-4}$$

$$\in_D = 36\times10^{-5} - 0{,}43687\times10^{-6}\times15{,}90 - 4{,}9459\times10^{-6}\times15{,}90\times\left(0-0{,}1606\right) = 3{,}6568\times10^{-4}$$

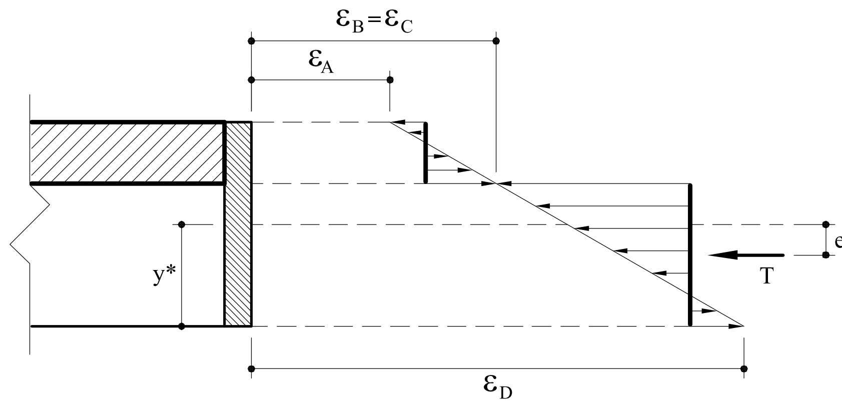


Fig. 4. Movimientos producidos por una sección de la viga por una variación térmica constante t y esfuerzo axil necesario para que la pieza recupere su posición inicial.

$$\sigma = -\frac{T}{A^*}\cdot n + \frac{T\cdot e\cdot x_3}{I^*}\cdot n$$

$$E_h\cdot\in_A = \sigma_A^{II} = -\frac{T}{0{,}2763}\cdot 1 + \frac{T\cdot e\cdot\left(0{,}9-0{,}6234\right)}{268{,}810\times10^{-4}}\cdot 1 =$$
$$= 30\times10^6\,\frac{kN}{m^2}\left(-2{,}9469\times10^{-4}\right)$$

$$E_a\cdot\in_D = \sigma_D^{II} = -\frac{T}{0{,}2763}\cdot 7 + \frac{T\cdot e\cdot\left(0-0{,}6234\right)}{268{,}810\times10^{-4}}\cdot 7 =$$
$$= 210\times10^6\,\frac{kN}{m^2}\left(-3{,}6568\times10^{-4}\right)$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas se obtiene:

$$T = 2623{,}57\,kN$$

$$e = 0{,}02424\,m$$

[1] Las tensiones se obtienen multiplicando las deformaciones por su correspondiente módulo de elasticidad.

Por tanto, las tensiones en la sección serán (figura 5):

$$\sigma_A^F = \sigma_A^I + \sigma_A^{II} = -159{,}0 - 8840{,}7 = -8999{,}7\, kN/m^2$$

$$\sigma_B^F = \sigma_B^I + \sigma_B^{II} = 318{,}0 - 9317{,}7 = -8999{,}7\, kN/m^2$$

$$\sigma_C^F = \sigma_C^I + \sigma_C^{II} = -10\,366{,}62 - 65\,223{,}9 = -75\,590\, kN/m^2$$

$$\sigma_D^F = \sigma_D^I + \sigma_D^{II} = 1\,193{,}51 - 76\,792{,}8 = -75\,599\, kN/m^2$$

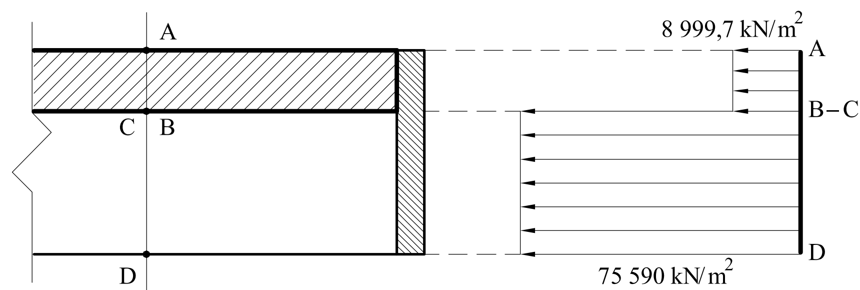


Fig. 5. Distribución de tensiones resultante

Problema 4.11 *En la estructura que se representa en la figura 1, la zona ABCD representa una viga de 40×40 cm² de sección, mientras que FG es un tirante de acero de 10 cm² de sección.*

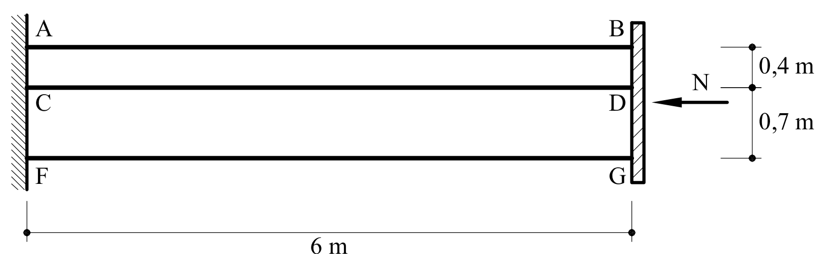


Fig. .1 Viga correspondiente al problema resuelto 4.11

La chapa BDG se considera infinitamente rígida, y sobre ella y normalmente actúa una fuerza N.

Hallar:

Zona en que se puede actuar N de forma que:

- *En el cable no se produzcan compresiones.*
- *En el hormigón de la viga no se produzcan tracciones.*

Solución

Para que no se produzcan compresiones en el cable, la situación límite es la que se representa en la figura 2.

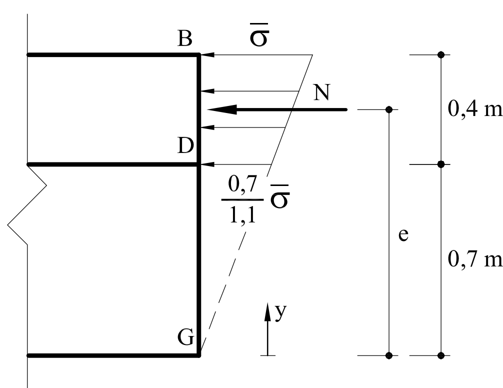


Fig. 2 Distribución límite de tensiones para que no se produzcan compresiones en el cable.

Si la tensión en *B* vale $\overline{\sigma}$, la tensión en *D* debe valer $0{,}7\,\overline{\sigma}/1{,}1$. La distribución de tensiones normales a lo largo de *BD* valdrá

$$\sigma = \frac{\overline{\sigma}}{1{,}1}\,y$$

Se realiza seguidamente el equilibrio de fuerzas y el equilibrio de momentos.

- *Equilibrio de fuerzas*

$$N = 0{,}4\int_{0,7}^{1,1}\sigma\,dy = 0{,}4\int_{0,7}^{1,1}\frac{\overline{\sigma}}{1{,}1}\,y\,dy = 0{,}13091\,\overline{\sigma}$$

- *Equilibrio de momentos*

$$Ne = \int_{0,7}^{1,1}0{,}4\,\sigma y\,dy = \frac{0{,}4\,\overline{\sigma}'}{1{,}1}\int_{0,7}^{1,1}y^2\,dy = 0{,}119757\,\overline{\sigma}$$

Es decir: $e = 0{,}915$ *m.* Con lo cual, la zona en que puede actuar la fuerza *N* para que no existan compresiones en el cable es la que corresponde a $y > 0{,}915\,m$.

Para que en el hormigón no se produzcan tracciones, la situación límite es la que se representa en la figura 3

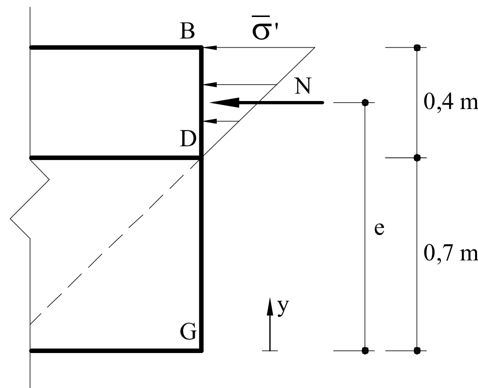


Fig. 3 Distribución límite de tensiones para que no se produzcan tracciones en el hormigón

Si la tensión en *B* vale $\overline{\sigma}'$, la distribución de tensiones en *BD* debe valer

$$\sigma = \frac{\overline{\sigma}'}{0{,}4}\left(y - 0{,}7\right)$$

Y al igual que antes,

- *Equilibrio de tensiones:*

$$N = 0{,}4\int_{0,7}^{1,1}\sigma\,dy - \frac{0{,}7}{0{,}4}\times 7\,\overline{\sigma}'\times 10\times 10^{-4} = 0{,}4\int_{0,7}^{1,1}\frac{\overline{\sigma}'}{0{,}4}\left(y - 0{,}7\right)dy - \frac{0{,}7}{0{,}4}\times 7\,\overline{\sigma}'\times 10\times 10^{-4} = 0{,}0678\,\overline{\sigma}'$$

- *Equilibrio de momentos:*

$$Ne' = 0{,}4\int_{0,7}^{1,1} \sigma y\, dy = 0{,}4\frac{\overline{\sigma}'}{0{,}4}\int_{0,7}^{1,1}(y-0{,}7)y\, dy = 0{,}07777\,\overline{\sigma}'$$

Es decir, $e' = 1{,}147\ m.$

Por lo tanto, para que se cumplan las dos condiciones anteriores, la distancia e de la fuerza *N* al punto *G* debe estar comprendida entre

$$0{,}915\ m < e < 1{,}147\, m.$$

Problema 4.12 *La sección de paredes delgadas de la figura 1 (el espesor es constante e igual a 1,5 cm) está sometida a un momento flector de dirección variable M_f de valor $M_f = 120\,kNm$. Indicar la posición del momento que produce el máximo valor de la tensión de tracción en A. Indicar asimismo el valor de dicha tensión.*

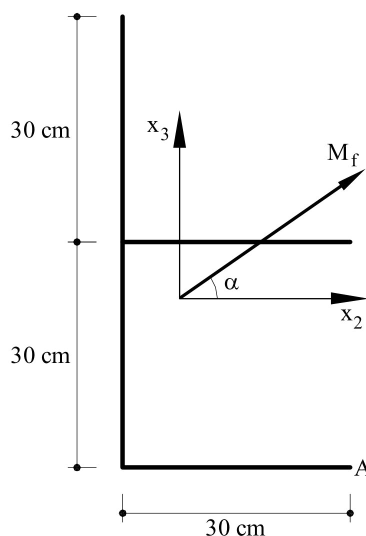


Fig.1 Sección correspondiente al problema 4.12

Solución

En la figura 2 puede verse la posición del centro de gravedad de la sección

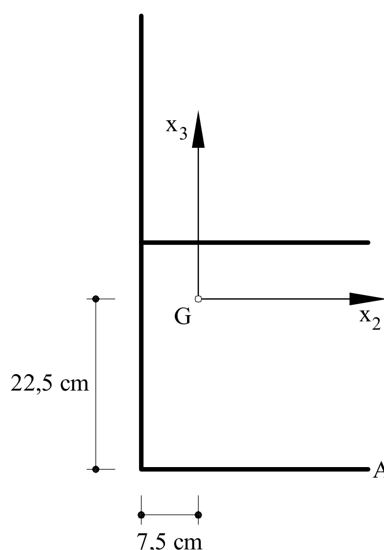


Fig. 2 Posición del centro de gravedad.

Las coordenadas del punto *A* respecto al centro de gravedad son $A(22{,}5\,;-22{,}5)$.
Los momentos de inercia respecto a los ejes x_2 y x_3 así como el producto de inercia valen:

$$I_2 = 57.375\ cm^4$$

$$I_3 = 16.875\ cm^4$$
$$I_{23} = -10.125\ cm^4$$

$$\Delta = I_2\, I_3 - I_{23}^2 = 865.687{,}5 \times 10^3\ cm^8$$

Las tensiones en el punto *A* valen:

$$\sigma_A = \frac{12000}{865675{,}5 \times 10^3}\left\{\left[-22{,}5 \times 16875 + 22{,}5 \times 10125\right]\cos\alpha + \left[22{,}5 \times 10125 - 22{,}5 \times 57375\right]\sin\alpha\right\} =$$
$$= 1{,}3862 \times 10^{-5}\left[-151.875\cos\alpha - 1063125\sin\alpha\right] = -2{,}10526\cos\alpha - 14{,}73684\sin\alpha$$

Para obtener el máximo, se deriva respecto de α

$$\frac{d\,\sigma_A}{d\alpha} = 0 = 2{,}10526\sin\alpha - 14{,}73684\cos\alpha$$

de donde se obtiene:

$$\tan\alpha = 7 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 81{,}87^0$$

La máxima tensión en *A* valdrá

$$\sigma_A(\max) = 14{,}88645\,\frac{kN}{cm^2} = 148{,}86\,MP_a$$

Problema 4.13 *La sección en T de la figura 1.a está sometida a un momento flector* M_f *de eje horizontal y de signo tal que produce compresiones en la fibra superior. Dichas compresiones valen* $40\,MPa$. *Estando la viga cargada se suelda la chapa inferior (figura 1.b) y una vez soldada se elimina el momento flector. Hallar las tensiones resultantes en la nueva chapa soldada.*

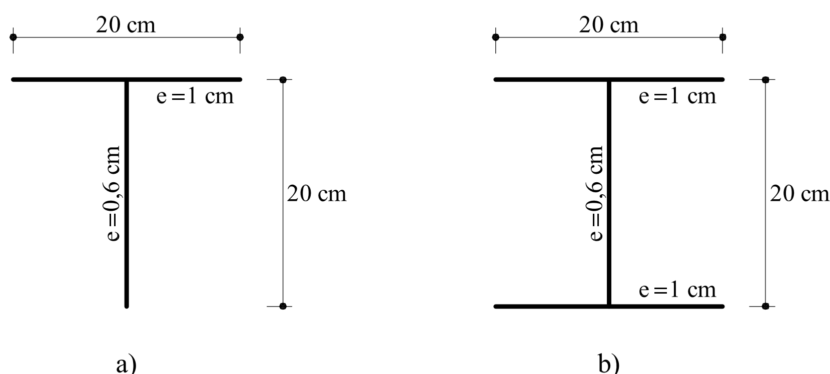


Fig.1 Secciones correspondientes al problema 4.13

Solución

En la figura 2 pueden verse las características geométricas y mecánicas de la sección a)

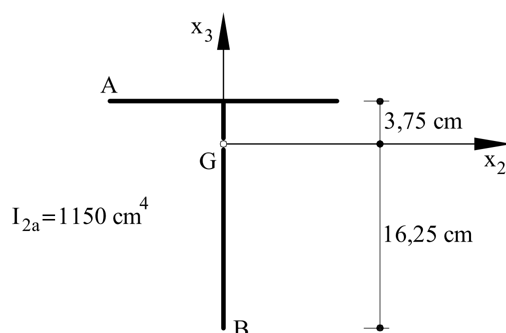


Fig. 2 Características geométricas y mecánicas de la sección a)

En la sección a), las tensiones de compresión en la fibra superior valen:

$$\sigma_A = \frac{M_f \times 3{,}75}{1150} = -40\,MPa = -4\,kN/cm^2$$

de donde se obtiene

$$M_f = -1226{,}7\,kN \times cm = -12{,}267\,kNm$$

El momento de inercia de la sección b) respecto a un eje horizontal que pasa por su centro de gravedad vale:

$$I_{2b} = 4.400\, cm^4$$

Con lo cual, al quitar M_f (o lo que es lo mismo, aplicar un momento igual y de sentido contrario) las tensiones en la chapa inferior valen:

$$\sigma_B = \frac{(-M_f)\times(-10)}{4400} = \frac{1226{,}7\times(-10)}{4400} = 2{,}79\frac{kN}{cm^2} = -27{,}9\, MPa \quad (compresiones)$$

Problema 4.14 *En la sección de paredes delgadas que se representa en la figura 1 actúa un momento flector* $M_{f2} = 30\,kNm$ *situado en un plano vertical y con sentido tal que produce compresiones en la fibra superior. Estando la pieza en carga, se suelda la chapa AB quedando la sección que se representa en la figura 2. Una vez realizada la operación anterior se retira el momento flector* M_{f2}*. Determinar la distribución final de tensiones normales en la recta AC.*

Notas:

- *El espesor de todas las paredes es constante y vale 1 cm.*
- *Los momentos de inercia de la sección en L valen:*

$$I_{22} = 4950\,cm^4 \qquad I_{33} = 1866{,}67\,cm^4 \qquad I_{23} = -1800\,cm^4$$

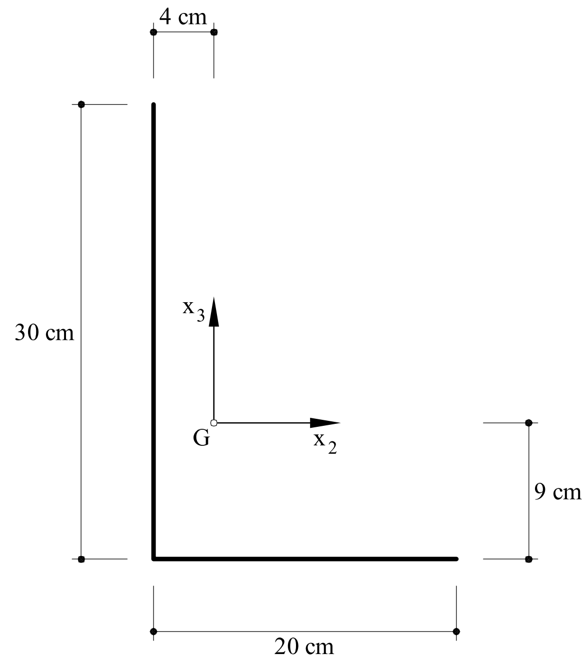


Fig.1 Sección correspondiente al problema 4.14

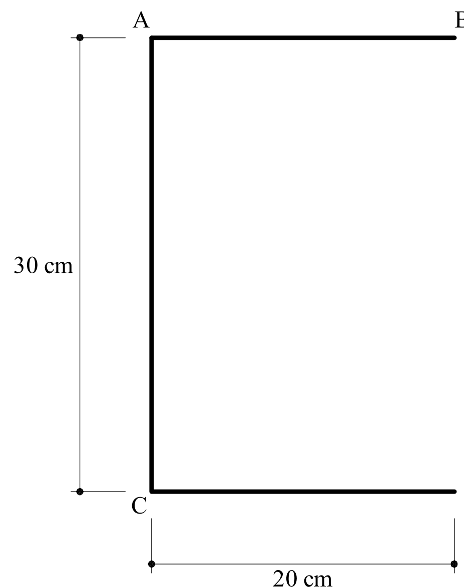


Fig.2. Sección modificada

Solución

Cuando actúa el momento flector $M_{f2} = 300\,kNm$ la tensión normal en los puntos *A* y *C* valdrá

$$\sigma_A^1 = -30\frac{(0{,}30 - 0{,}09) \times 1866{,}67 \times 10^{-8} - 0{,}04 \times 1800 \times 10^{-8}}{4950 \times 1866{,}67 \times 10^{-16} - 1800^2 \times 10^{-16}} = -0{,}0016 \times 10^8 \frac{kN}{m^2} = -160\,MPa$$

$$\sigma_C^1 = -30\frac{(-0{,}09) \times 1866{,}67 \times 10^{-8} - 0{,}04 \times 1800 \times 10^{-8}}{4950 \times 1866{,}67 \times 10^{-16} - 1800^2 \times 10^{-16}} = 120\,MPa$$

La sección en *U* tiene el centro de gravedad situado a *15 cm* de la fibra inferior. El momento de inercia respecto a un eje horizontal que pasa por dicho centro de gravedad vale

$$I_2^{'} = \frac{1}{12}30^3 + 2 \times 20 \times 15^2 = 11250\,cm^4$$

Las tensiones que se producirán en *A* y *C* como consecuencia de retirar el momento flector M_{f2} serán:

$$\sigma_A^2 = -30\frac{30 \times 0{,}15}{11250 \times 10^{-8}} = 40 \times 10^3 \frac{kN}{m^2} = 40\,MPa$$

$$\sigma_C^2 = -\frac{30 \times 0{,}15}{11250 \times 10^{-8}} = -40\,MPa$$

Con lo cual, las tensiones finales en *A* y *C* valdrán

$$\sigma_A = \sigma_A^1 + \sigma_A^2 = -160 + 40 = -120\,MPa$$
$$\sigma_C = \sigma_C^1 + \sigma_C^2 = 120 - 40 = 80\,MPa$$

Problema 4.15 *Una viga UPN 160 con momentos de inercia $I_2 = 925\ cm^4$ y $I_3 = 85{,}3\ cm^4$ está sometida a un momento flector $M_f = 4\ kNm$ según el eje* n- n' *inclinado 22º respecto a* x_3 *y que tracciona el punto A. Determínese el eje neutro y calcúlese* σ_{max}.

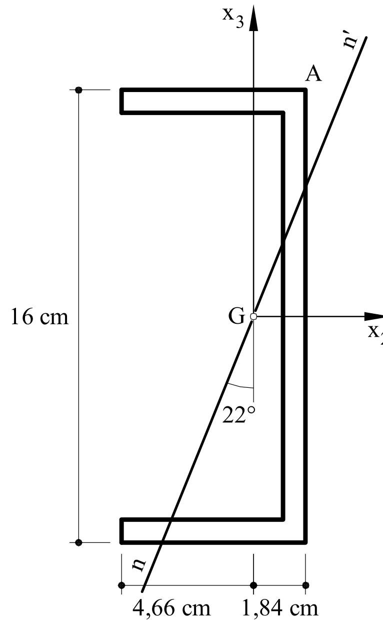


Fig. 1 Sección UPN 160 correspondiente al problema 4.15

Solución

Las componentes del momento *M* según cada uno de los ejes serán

$M_{f2} = M \cos 22 = 3{,}71\ kN\ m$
$M_{f3} = -M \sin 22 = -1{,}5\ kN\ m$

La expresión de las tensiones se escribe

$$\sigma = \frac{M_{f2}}{I_2} x_3 - \frac{M_{f3}}{I_3} x_2 = \frac{3{,}71\ kNm}{925 \times 10^{-8}\ m^4} x_3 + \frac{1{,}5\ kNm}{85{,}3 \times 10^{-8}\ m^4} x_2 = 401080\ x_3 + 1758500\ x_2$$

La fibra neutra se obtiene igualando $\sigma = 0$, o sea:

$$401080\ x_3 + 1758500\ x_2 = 0$$

es decir

$$x_3 + 4{,}3844\ x_2 = 0$$

En la figura 2 puede verse representada la fibra neutra

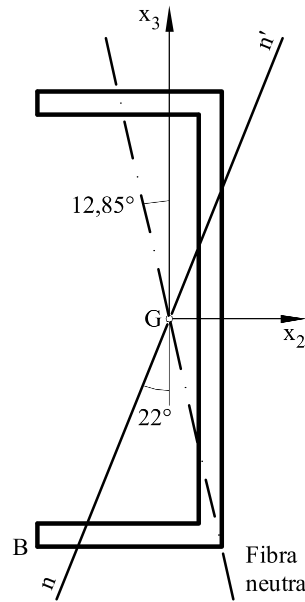


Fig. 2 Fibra neutra

Las tensiones máximas se producirán en el punto B y serán de compresión

$$\sigma_{\max} = \frac{3{,}71\ kNm}{925 \times 10^{-8}\, m^4} \times (-0{,}08 m) + \frac{1{,}5\ kNm}{85{,}3 \times 10^{-8}\, m^4} \times (-0{,}0466\ m) = -114030\ kN/m^2 = -114{,}03\ MPa$$

Problema 4.16 *La sección, cuya forma y dimensiones, se indican en la figura 1, está sometida a un momento flector M aplicado en su centro de gravedad G y formando 30º en sentido negativo, con la horizontal.*

Las tensiones admisibles del material son:

- *a compresión* $\sigma_c = 10\ MPa$
- *a tracción* $\sigma_T = 6\ MPa$

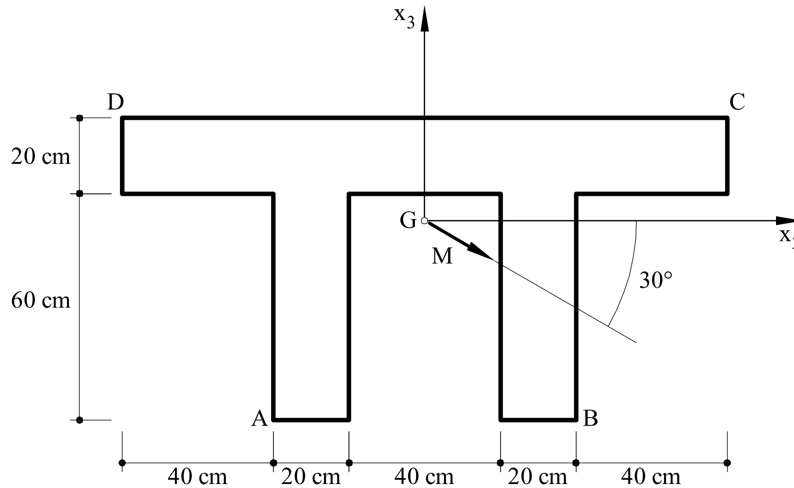


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 4.16

Se pide:

Valor máximo de M que puede soportar la pieza.

Solución

El centro de gravedad está situado a una distancia de 52,857 *cm*. respecto a la fibra inferior (ver figura 2). Los momentos de inercia respecto a unos ejes horizontal y vertical que pasan por el c.d.g. valen

$I_2 = 3{,}021 \times 10^6\ cm^4 = 3{,}021 \times 10^{-2}\ m^4$
$I_3 = 9{,}066 \times 10^6\ cm^4 = 9{,}066 \times 10^{-2}\ m^4$

Las componentes del momento *M* respecto a los ejes valen:

$M_{f2} = M \cos 30 = 0{,}866\ M$
$M_{f3} = -M \sin 30 = -0{,}5\ M$

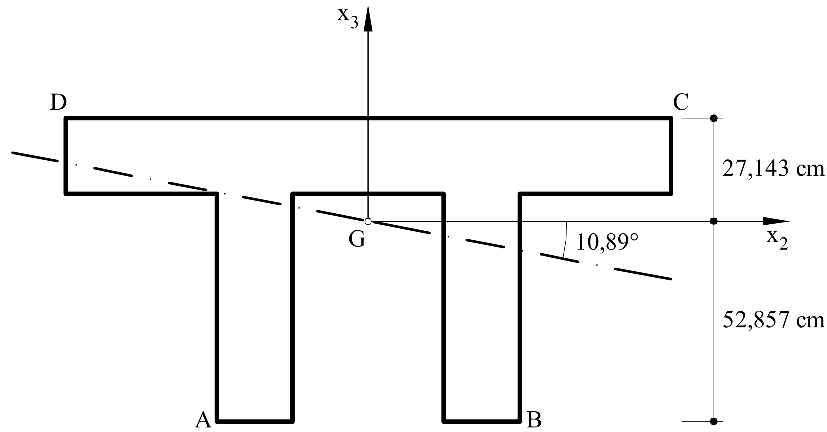


Fig. 2 Posición del centro de gravedad

Las tensiones normales se escriben:

$$\sigma = \frac{M_{f2}}{I_2} x_3 - \frac{M_{f3}}{I_3} x_2 = \frac{0{,}866\, M}{3{,}021 \times 10^{-2}} x_3 + \frac{0{,}5\, M}{9{,}066 \times 10^{-2}} x_2$$

Igualando a cero se obtiene la fibra neutra

$$x_3 + 0{,}1924\, x_2 = 0$$

En la figura 2 puede verse representada la fibra neutra. Como puede observarse, los puntos más alejados de la fibra neutra (y por tanto, los de mayor tensión) son el *A* y el C.

- Tensiones en *C* (tracción)

$$\sigma_c = M\left[\frac{0{,}866}{3{,}021 \times 10^{-2}} \times 0{,}27143 + \frac{0{,}5}{9{,}066 \times 10^{-2}} \times 0{,}8\right] = 6\ MPa = 6000\ kN/m^2$$

- Tensiones en *A* (compresión)

$$\sigma_A = M\left[\frac{0{,}866}{3{,}021 \times 10^{-2}} \times (-0{,}52857) + \frac{0{,}5}{9{,}066 \times 10^{-2}} \times (-0{,}4)\right] = -10\ MPa = -10000\, kN/m^2$$

De las anteriores expresiones se obtienen dos valores de *M*:

$M_1 = 492{,}1\ kNm$ y $M_2 = 576{,}1\ kNm$

Se elige el menor valor, y por lo tanto

$$M = 492{,}1\ kNm$$

Problema 4.17 *Un momento flector, de valor M_0 = 1,5 kNm que actúa en un plano vertical, se aplica a una viga cuya sección se muestra en la figura 1. Hallar:*

*a) La tensión normal en el punto **A.***
b) El ángulo que forma el eje neutro con el plano horizontal.

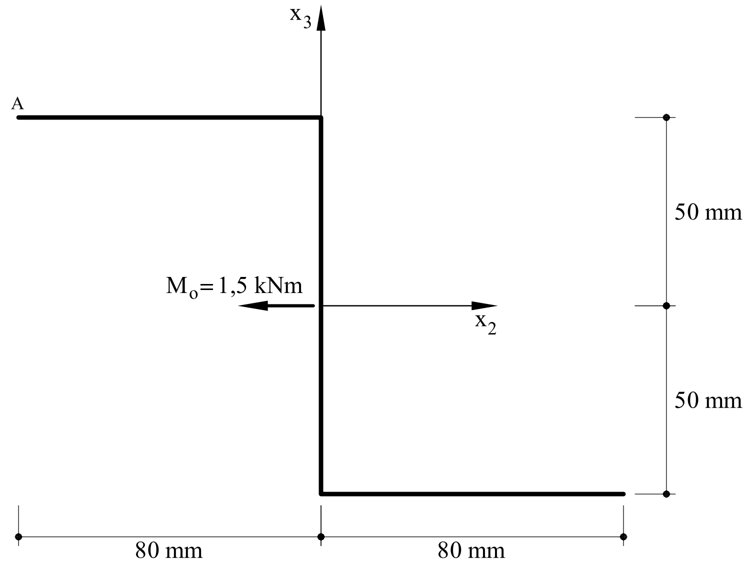


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 4.17

Solución

Los momentos de inercia respecto a los ejes x_2 y x_3 valen

$$I_2 = 4{,}18 \times 10^{-6}\, m^4$$
$$I_3 = 3{,}25 \times 10^{-6}\, m^4$$
$$I_{23} = -2{,}87 \times 10^{-6}\, m^4$$
$$I_2 I_3 - I_{23}^2 = 5{,}3481 \times 10^{-12}\, m^4$$

Las tensiones en cualquier punto valen:

$$\sigma = \frac{1}{I_2 I_3 - I_{23}^2}\left[M_{f2}\left(x_3 I_3 - x_2 I_{23}\right) + M_{f3}\left(x_3 I_{23} - x_2 I_2\right)\right]$$

Teniendo en cuenta que

$$M_{f2} = -1{,}5\ kNm$$
$$M_{f3} = 0$$
$$(x_3)_A = 50\, mm = 0{,}05\, m$$
$$(x_2)_A = -80\, mm = -0{,}08\, m$$

resulta que

$$\sigma_A = \frac{1}{5,3481\times 10^{-12}}\left[-1,5\left(0,05\times 3,25\times 10^{-6} - 0,08\times 2,87\times 10^{-6}\right)\right] = 0,01882\times 10^{6}\ kN/m^2 = 18,82\ MPa$$

La fibra neutra viene dada por

$$x_3 I_3 - x_2 I_{23} = 0$$

es decir:

$$x_3 + 0,883\ x_2 = 0$$

O sea, que el ángulo que forma la fibra neutra con el eje x_2 vale

$$\alpha = \tan^{-1}\left(-0,883\right) = -54,3^{o}$$

Problema 4.18 *La sección recta de una viga en voladizo de longitud L = 1,5 m es la indicada en la figura 1. La viga está sometida a una carga uniformemente repartida p = 3,5 kN/m, contenida en el plano vertical que contiene la línea media del perfil. Para la sección del empotramiento, se pide:*

1.Hallar el eje neutro.
2.Calcular la tensión máxima de tracción y de compresión.

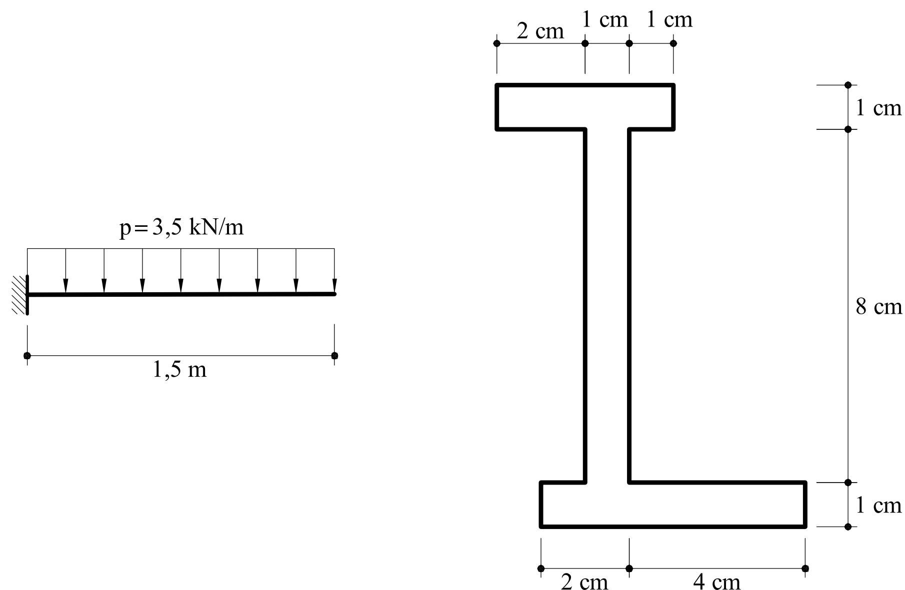


Fig. 1 Viga y sección del problema 4.18

Solución

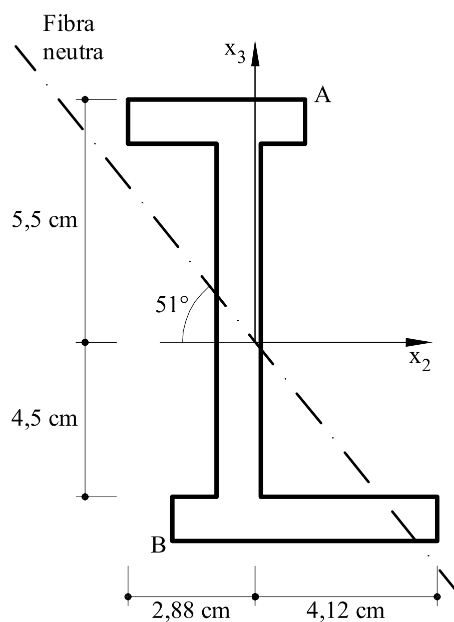


Fig. 2 Centro de gravedad y fibra neutra

En la figura 2 se indica la posición del centro de gravedad. Respecto a dos ejes, horizontal y vertical, que pasan por el c.d.g. los momentos de inercia valen

$$I_2 = 241{,}5\ cm^4 = 241{,}4 \times 10^{-8}\, m^4$$
$$I_3 = 36{,}7\ cm^4 = 36{,}7 \times 10^{-8}\, m^4$$
$$I_{23} = -45{,}28\ cm^4 = -45{,}28 \times 10^{-8}\, m^4$$
$$I_2 I_3 - I_{23}^2 = 6812{,}77 \times 10^{-16}\, m^8$$

Las tensiones normales vienen dadas por

$$\sigma = \frac{1}{I_2 I_3 - I_{23}^2}\left[M_{f2}\left(x_3 I_3 - x_2 I_{23}\right) + M_{f3}\left(x_3 I_{23} - x_2 I_2\right)\right]$$

El momento flector vale

$$M_{f2} = P\frac{L^2}{2} = 3{,}5 \times \frac{1{,}5^2}{2} = 3{,}9375\ kN\, m$$
$$M_{f3} = 0$$

La fibra neutra vendrá dada por

$$x_3 I_3 - x_2 I_{23} = 0$$

es decir:

$$x_3 + 1{,}234\, x_2 = 0$$

En la figura 2 puede verse representada la fibra neutra.

De la observación de la figura 2 se deduce que las máximas tensiones de tracción se producirán en el punto *A*, y las máximas de compresión en el punto *B*.

$$\sigma_A = \frac{1}{6812{,}77 \times 10^{-16}}\left[3{,}9375\left(0{,}055 \times 36{,}7 \times 10^{-8} + 0{,}0112 \times 45{,}28 \times 10^{-8}\right)\right] = 145971{,}3\, kN/m^2 =$$
$$= 145{,}97\ MPa$$

$$\sigma_B = \frac{1}{6812{,}77 \times 10^{-16}}\left[3{,}9375\left(-0{,}045 \times 36{,}7 \times 10^{-8} - 0{,}0188 \times 45{,}28 \times 10^{-8}\right)\right] = 144649{,}4\, kN/m^2 =$$
$$= 144{,}65\ MPa$$

Problema 4.19 *Dada la pieza, cuya forma y dimensiones se indican en la figura 1 y en la que las tensiones admisibles, son :*

a compresión: $\sigma_C = 12\ MPa$

a tracción: $\sigma_T = 6\ MPa$

Se pide:

Hallar la máxima distancia d, por encima del borde superior, a la que puede actuar una fuerza de compresión de 2000 kN, situada sobre el eje de simetría de la pieza.

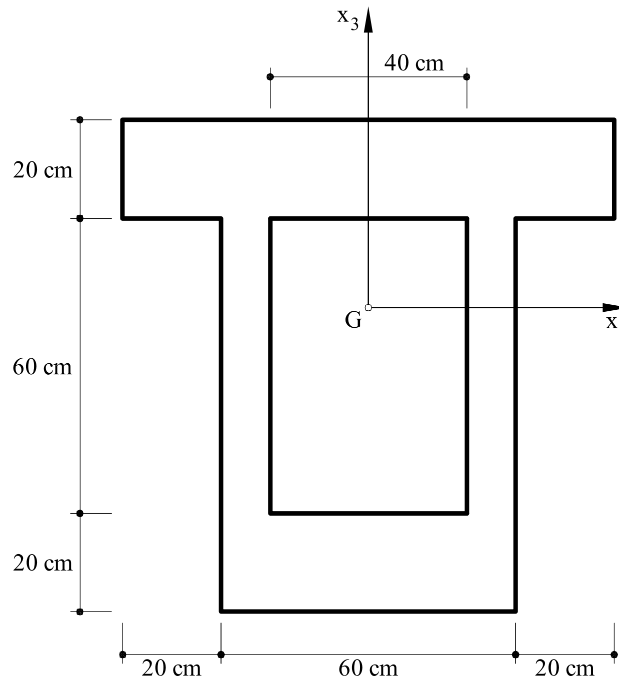


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 4.19

Solución

El centro de gravedad de la sección, está situado a una distancia de 57,273 *cm*. de la fibra inferior de la sección. Respecto a un eje horizontal que pase por el c.d.g., el momento de inercia vale:

$$I_2 = 5{,}353 \times 10^6\ cm^4$$

y el área $A = 4400\ cm^2$

Las coordenadas del punto de aplicación de la fuerza de compresión serán

$$e_2 = 0$$
$$e_3 = \left[(20 + 60 + 20) - 57{,}273\right] + d = 42{,}727 + d$$

Las tensiones en la fibra superior de la sección (tensiones de compresión) valdrán:

$$\sigma = \frac{-2000\ kN}{4400\ cm^2} + \frac{-2000\ kN \times (42{,}737 + d)cm}{5{,}353 \times 10^6\ cm^4} \times 42{,}727\ cm = -12\ MPa$$

de donde: $d = 3{,}554\ cm.$

Análogamente para la fibra inferior

$$\sigma = -\frac{2000\,kN}{4400\,cm^2} + \frac{-2000\,kN \times (42{,}737 + d)cm}{5{,}353 \times 10^6\,cm^4} \times (-57{,}273\ cm) = 6\ MPa$$

de donde $d = 6{,}554\ cm.$

El menor de los dos valores es la solución buscada. Es decir

$$d \leq 3{,}554\ cm.$$

Problema 4.20 *En la sección que se representa en la figura 1 el espesor de todas las paredes es el mismo (e =1,1 cm). Cuando actúa un esfuerzo axil de compresión de valor N = 120 kN en el punto medio de AB, hallar:*

- *Máxima tensión de tracción*
- *Máxima tensión de compresión*
- *Distribución de tensiones normales*

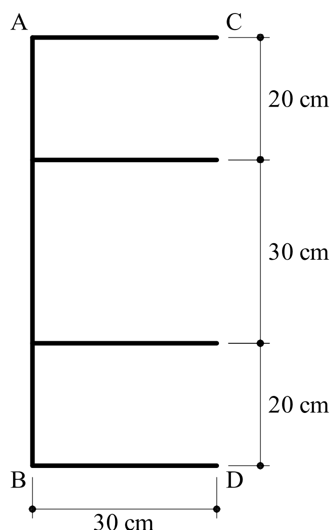


Fig. 1 Sección correspondiente al problema resuelto 4.20

Solución

Las características mecánicas de la sección valen (ver figura 2)

$A = 209\ cm^2$
$g_2 = 9{,}474\ cm$
$I_2 = 127.142\ cm^4$ $\qquad I_3 = 20.843\ cm^4$

La máxima tensión de tracción se produce en *C* o en *D* y vale

$$\sigma_c = -\frac{120}{209} + \frac{120 \times 9{,}474 \times (30 - 9{,}474)}{20843} = 0{,}545\ \frac{kN}{cm^2} = 5{,}45\ MPa \quad (tracción)$$

La máxima tensión de compresión se produce en la línea *AB* y vale:

$$\sigma_A = -\frac{120}{209} - \frac{120 \times 9{,}474^2}{20843} = -1{,}09 \frac{kN}{cm^2} = -10{,}9\ MPa \quad (compresión)$$

En la figura 2 puede verse la distribución de tensiones

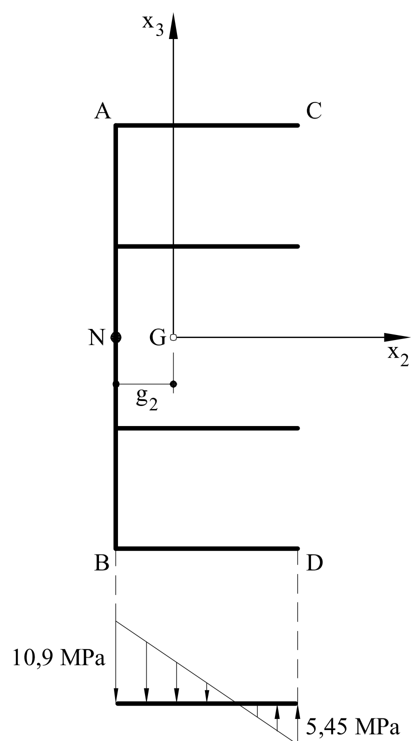


Fig. 2 Situación del centro de gravedad y distribución de tensiones

Problema 4.21 *Se aplica una carga vertical de 4,8 kN en el punto A de un poste de madera, de sección rectangular, 80 por 120 mm.*

a) Hallar las tensiones normales en las cuatro esquinas de una sección horizontal (dirección del plano x_2 x_3).
b) Localizar el eje neutro de la sección.

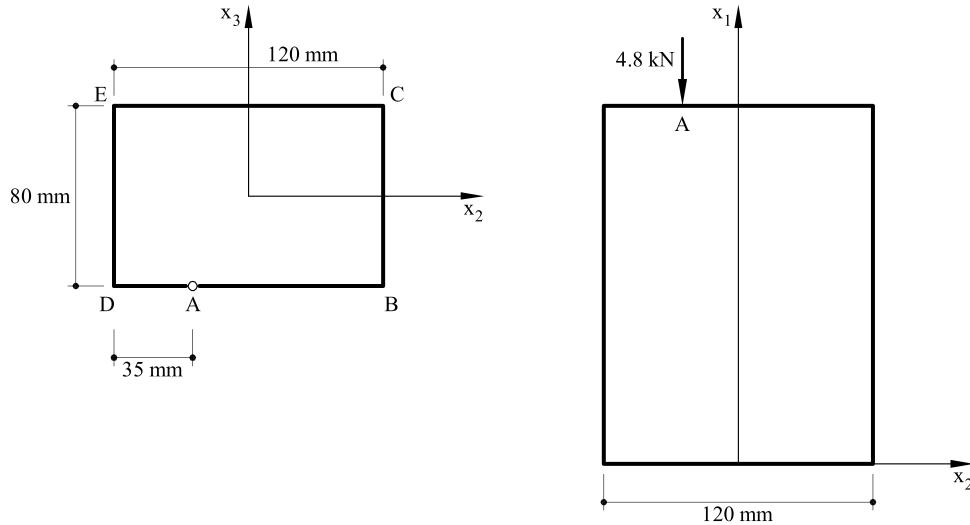


Fig. 1 Sección y pilar del problema 4.21

Solución

Los momentos que produce la carga en *A* valen

$$M_{f2} = 4{,}8\ kN \times 40\ mm = 192\ kN \times mm = 192\ Nm$$

$$M_{f3} = 4{,}8\ kN \times (60\ mm - 35\ mm) = -120\ kN \times mm = -120\ Nm$$

El área y momentos de inercia valen

$A = 9{,}6 \times 10^{-3}\ m^2$
$I_2 = 5{,}12 \times 10^{-6}\ m^4$
$I_3 = 11{,}52 \times 10^{-6}\ m^4$

a) Tensiones en *B*

$$\sigma_B = \frac{-4800\ N}{9{,}6 \times 10^{-3}\ m^2} + \frac{192\ Nm \times (-40\ mm)}{5{,}12 \times 10^{-6}\ m^4} - \frac{-120\ Nm \times (60\ mm)}{11{,}52 \times 10^{-6}\ m^4} = -1{,}375\ MPa$$

$$\sigma_D = \frac{-4800\ N}{9{,}6 \times 10^{-3}\ m^2} + \frac{192\ Nm \times (-40\ mm)}{5{,}12 \times 10^{-6}\ m^4} - \frac{-120\ Nm \times (-60\ mm)}{11{,}52 \times 10^{-6}\ m^4} = -2{,}625\ MPa$$

$$\sigma_E = \frac{-4800\ N}{9{,}6 \times 10^{-3}\ m^2} + \frac{192\ Nm \times (40\ mm)}{5{,}12 \times 10^{-6}\ m^4} - \frac{-120\ Nm \times (-60\ mm)}{11{,}52 \times 10^{-6}\ m^4} = 0{,}375\ MPa$$

$$\sigma_C = \frac{-4800N}{9{,}6\times10^{-3}\,m^2} + \frac{192\,Nm\times40\,mm}{5{,}12\times10^{-6}\,m^4} - \frac{-120\,Nm\times60\,mm}{11{,}52\times10^{-6}\,m^4} = 1{,}625\ MPa$$

b) En cuanto al eje neutro, su expresión es:

$$-\frac{4800}{9{,}6\times10^{-3}} + \frac{192\ x_3}{5{,}12\times10^{-6}} - \frac{-120\ x_2}{11{,}52\times10^{-6}} = 0$$

Es decir

$1\text{-}75\ x_3\text{-}20{,}83\ x_2 = 0$

Problema 4.22 *En la sección de paredes delgadas de la figura 1 todas las paredes tienen el mismo espesor e = 0,8 cm. El radio del círculo vale R = 15 cm. En el punto C actúa un esfuerzo axil de compresión de valor N. Hallar:*

- *Fibra neutra*
- *Valor de N de forma que las máximas tensiones de compresión no superen los 90 Mpa.*
- *Distribución de tensiones normales en la línea AB.*
-

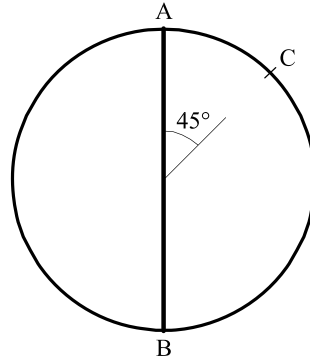


Fig. 1 Sección correspondiente al problema resuelto 4.22

Solución

Las características mecánicas de la sección valen :

$A = 99{,}4\ cm^2$
$I_2 = 10.282{,}3\ cm^4$ $I_3 = 8.482{,}3\ cm^4$

Las excentricidades del esfuerzo axil N cuando actúa en C valen:

$$e_2 = e_3 = 15\sqrt{2}/2 = 10{,}61\ cm$$

La distribución de tensiones en cualquier punto valdrá por tanto

$$\sigma = -\frac{N}{A} - \frac{N\ e_3\ x_3}{I_2} - \frac{N\ e_2\ x_2}{I_3}$$

y sustituyendo:

$$\sigma = -\frac{N}{99{,}4}\left(1 + \frac{x_3}{9{,}75} + \frac{x_2}{8{,}04}\right)$$

Para obtener la fibra neutra se anula la anterior distribución de tensiones:

$$1 + \frac{x_3}{9{,}75} + \frac{x_2}{8{,}04} = 0$$

La fibra neutra puede verse representada en la figura 2

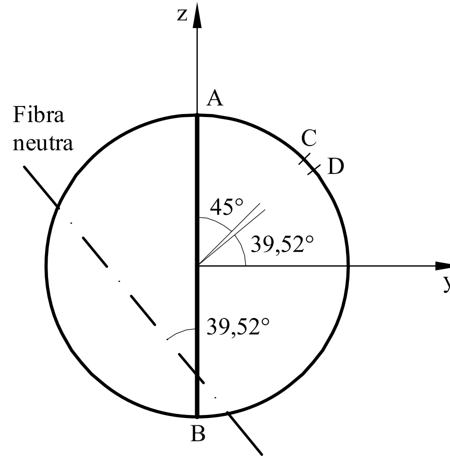


Fig. 2 Fibra neutra

Por otro lado, la máxima tensión normal se producirá en el punto *D* (fig. 2) de coordenadas:

$x_{2D} = 11{,}57\ cm$ $\qquad\qquad$ $x_{3D} = 9{,}55\ cm$

Las tensiones normales valdrán

$$\sigma = -\frac{N}{99{,}4}\left(1+\frac{9{,}55}{9{,}75}+\frac{11{,}57}{8{,}04}\right) = -0{,}03439\ N$$

y si $\sigma = -90\ MPa = -9\ kN/cm^2$, entonces sustituyendo

$$N = \frac{9}{0{,}03439} = 261{,}69\ kN$$

Por lo que respecta a la distribución de tensiones normales en *AB*, será lineal con valores en *A* y *B* dados por

$$\sigma_A = -\frac{261{,}69}{99{,}4}\left(1+\frac{15}{9{,}75}\right) = -6{,}68\ \frac{kN}{cm^2} = -66{,}8\ MPa$$

$$\sigma_B = -\frac{261{,}69}{99{,}4}\left(1-\frac{15}{9{,}75}\right) = 1{,}423\ \frac{kN}{cm^2} = 14{,}23\ MPa$$

Problema 4.23 *Sobre un soporte vertical, de sección rectangular ABCD, tal como se representa en la figura, actúa sobre el punto E, de coordenadas* $e_2 = 0,06$ *m.,* $e_3 = 0,12$ *m., una fuerza vertical N de compresión de 480 kN.*

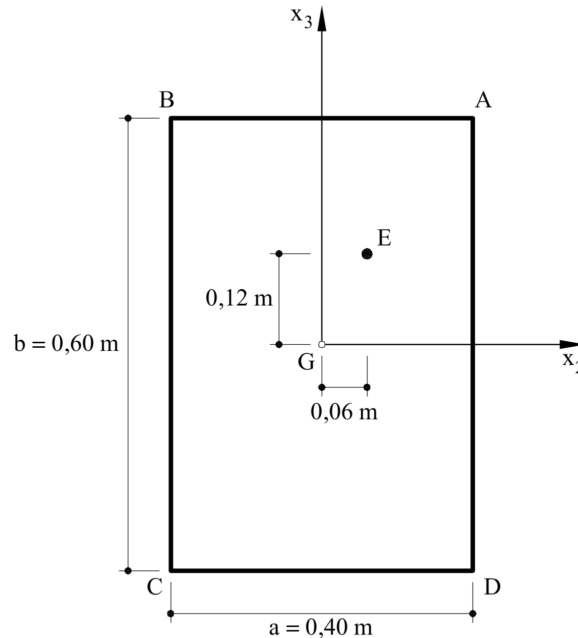


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 4.23

Se pide:

1. *Tensiones en los cuatro vértices A, B, C, D indicando el sentido de las mismas.*

2. *Definir la línea frontera, entre las zonas de la sección soporte que está a compresión y la que está a tracción. Dibujar claramente esta línea.*

Solución

La fuerza *N* de compresión aplicada en *E* es equivalente a una fuerza *N* de compresión aplicada en *G* más dos momentos

$$M_{f2} = N\, e_3 = -480\ kN \times 0,12\ m = -57,6\ kN \times m$$
$$M_{f3} = -N\, e_2 = 480\ kN \times 0,06\ m = 28,8\ kN \times m$$

Las tensiones en un punto cualquiera valen:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_{f2}}{I_2} x_3 - \frac{M_{f3}}{I_3} x_2$$

siendo

$A = 0,24\ m^2$
$I_2 = 0,0072\ m^4$
$I_3 = 0,0032\ m^4$

Sustituyendo para los puntos *A, B, C* y *D*

$$\sigma_A = \frac{-480\,kN}{0{,}24\,m^2} + \frac{-57{,}6\,kN \times m}{0{,}0072\,m^4} \times 0{,}3\,m - \frac{28{,}8\,kN \times m}{0{,}0032\,m^4} \times 0{,}2\,m = -6{,}2\ MPa$$

$$\sigma_B = \frac{-480\,kN}{0{,}24\,m^2} + \frac{-57{,}6\,kN\,m}{0{,}0072\,m^4} \times 0{,}3\,m - \frac{28{,}8\,kN \times m}{0{,}0032\,m^4} \times (-0{,}2\,m) = -2{,}6\ MPa$$

$$\sigma_C = \frac{-480\,kN}{0{,}24\,m^2} + \frac{-57{,}6\,kN\,m}{0{,}0072\,m^4} \times (-0{,}3\,m) - \frac{28{,}8\,kN \times m}{0{,}0032\,m^4} \times (-0{,}2\,m) = 2{,}2\ MPa$$

$$\sigma_D = \frac{-480\,kN}{0{,}24\,m^2} + \frac{-57{,}6\,kN\,m}{0{,}0072\,m^4} \times (-0{,}3\,m) - \frac{28{,}8\,kN \times m}{0{,}0032\,m^4} \times 0{,}2\,m = -1{,}4\ MPa$$

La ecuación de la fibra neutra vendrá dada por

$$\sigma = 0 = -\frac{480}{0{,}24} + \frac{-57{,}6}{0{,}0072} x_3 - \frac{28{,}8}{0{,}0032} x_2$$

es decir

$$1 + 4\,x_3 + 4{,}5\,x_2 = 0$$

En la figura 2 puede verse representada la zona traccionada y la zona comprimida.

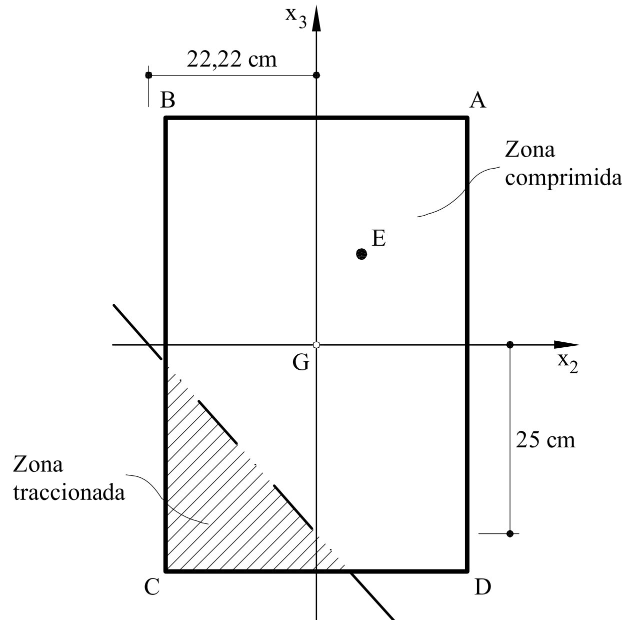


Fig. 2 Zona traccionada y comprimida

Problema 4.24 *En la sección en doble T de la figura 1, se aplica en el punto A una fuerza P, de compresión. Sabiendo que las máximas tensiones de compresión no deben superar los 82,73 MPa, hallar la P máxima admisible.*

Propiedades de la sección:
- Área. A = 48,13 cm^2
- Módulos resistentes de la sección: $W_2 = 404,76\ cm^3$ $\quad W_3 = 47,69\ cm^3$

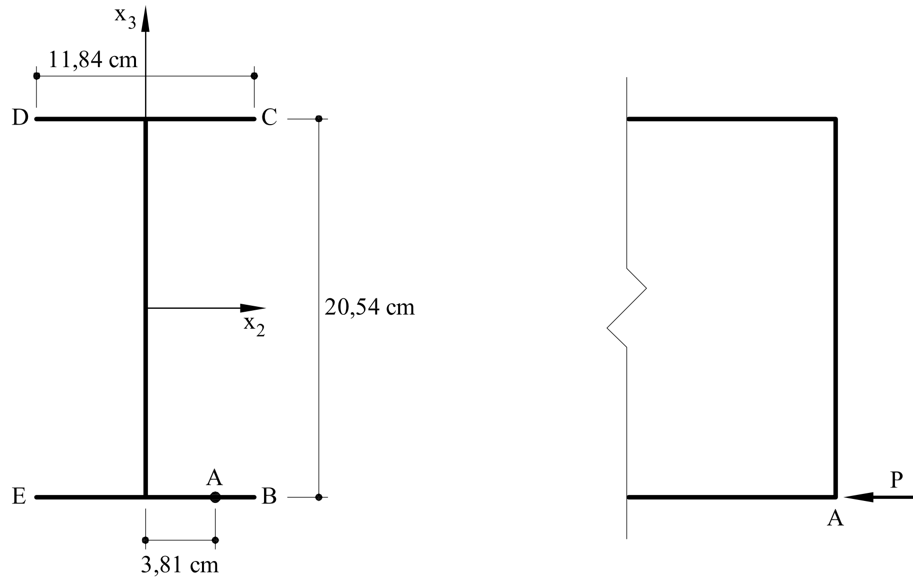


Fig. 1 Sección doble T correspondiente al problema 4.24

Solución

Las máximas tensiones normales se producirán en los puntos *B, C, D* y *E*. La expresión de las tensiones viene dada por

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{N e_3}{I_2} x_3 + \frac{N e_2}{I_3} x_2 = \frac{N}{A} + \frac{N e_3}{I_2 / x_3} + \frac{N e_2}{I_3 / x_2}$$

Las excentricidades e_2 y e_3 (coordenadas de *A*) valen:

$e_2 = 3{,}81\ cm = 0{,}0381\ m.$
$e_3 = -10{,}27\ cm = -0{,}1027\ m.$

Las tensiones en los cuatro puntos citados valen:

$$\sigma_B = \frac{-P}{48{,}13 \times 10^{-4} m^2} + \frac{-P \times (-0{,}1027\, m)}{-404{,}76 \times 10^{-6} m^3} + \frac{-P \times (0{,}0381\, m)}{47{,}69 \times 10^{-6} m^3} = -82{,}73\ MPa$$

$$\sigma_C = \frac{-P}{48{,}13 \times 10^{-4} m^2} + \frac{-P \times (-0{,}1027\, m)}{404{,}76 \times 10^{-6} m^3} + \frac{-P \times 0{,}0381\, m}{47{,}69 \times 10^{-6} m^3} = -82{,}73\ MPa$$

$$\sigma_D = \frac{-P}{48{,}13 \times 10^{-4} m^2} + \frac{-P \times (-0{,}1027\, m)}{404{,}76 \times 10^{-6} m^3} + \frac{-P \times 0{,}0381\, m}{-47{,}69 \times 10^{-6} m^3} = -82{,}73\ MPa$$

$$\sigma_E = \frac{-\mathrm{P}}{48{,}13\times 10^{-4}\,m^2} + \frac{-\mathrm{P}\times(-0{,}1027\,m)}{-404{,}76\times 10^{-6}\,m^3} + \frac{-\mathrm{P}\times 0{,}0381\,m}{-47{,}69\times 10^{-6}\,m^3} = -82{,}73\ MPa$$

Se obtienen cuatro valores de P

$P_1 =$ 65,64 kN ; $P_2 =$ 109,92 kN
$P_3 =$ -97,92 kN ; $P_4 =$ -245,2 kN

La solución corresponde al menor valor

$P =$ 65,64 kN (compresión)

Problema 4.25 *Un pilar cuya sección recta se representa en la figura 1 está sometido, a través de una placa suficientemente rígida situada en su parte superior, a una carga de compresión N = 150 kN aplicada en el punto A. Se pide:*

1. *Determinar la situación del eje neutro.*
2. *El estado de tensiones que la carga N origina, indicando los valores máximos de las tensiones a tracción y a compresión.*

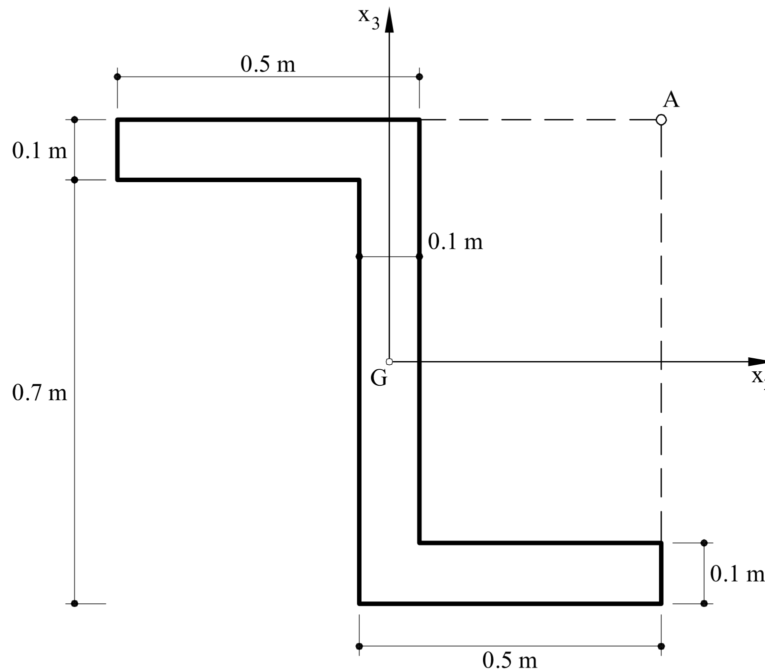


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 4.25

Solución

El área y momentos de inercia de la sección valen:

A = 1.600 cm^2 = 0,16 m^2
I_2 = 1.413.333,3 cm^4 = 1,413 × 10^{-2} m^4
I_3 = 613.333,3 cm^4 = 0,613 × 10^{-2} m^4
I_{23} = -700.000 cm^4 = 0,7 × 10^{-2} m^4
$I_2 I_3 - I_{23}^2$ = 0,3768 × 10^{-2} m^8

Las tensiones en un punto cualquiera valen:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{N}{I_2 I_3 - I_{23}}\left[e_3\left(x_3 I_3 - x_2 I_{23}\right) - e_2\left(x_3 I_{23} - x_2 I_2\right)\right] = \frac{-150\,kN}{0{,}16\,m^2} + \frac{-150\,kN}{0{,}3768 \times 10^{-4}\,m^8} \times$$
$$\times\left[0{,}4\left(0{,}613 \times 10^{-2} x_3 + 0{,}7 \times 10^{-2} x_2\right) - 0{,}45 \times \left(-0{,}7 \times 10^{-2} x_3 - 1{,}413 \times 10^{-2} x_2\right)\right] =$$
$$= -937{,}5 - 36460\,x_2 - 22349\,x_3$$

El eje neutro se obtendrá igualando a cero las tensiones, es decir,

$$937{,}5 + 36.460\,x_2 + 22.349\,x_3 = 0$$

En la figura 2 puede verse representada la fibra neutra y la distribución de tensiones.

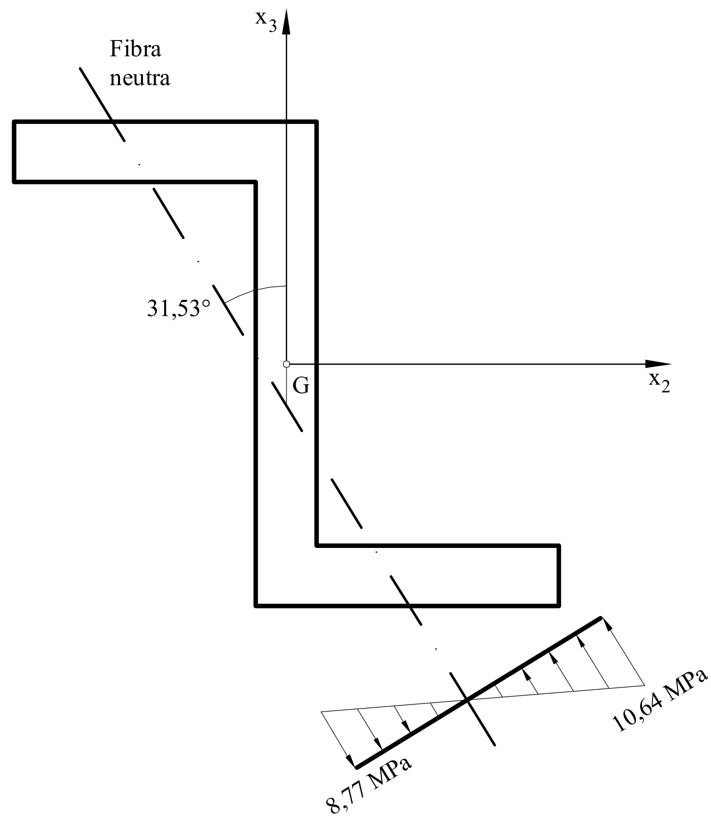


Fig. 2 Fibra neutra y distribución de tensiones

Problema 4.26 *La sección de paredes delgadas que se representa en la figura 1 está sometida a un esfuerzo axil de compresión. Se desea saber su posición para que la fibra neutra sea una recta que pase por los puntos A y B.*

El espesor es constante y vale e = 1 cm.

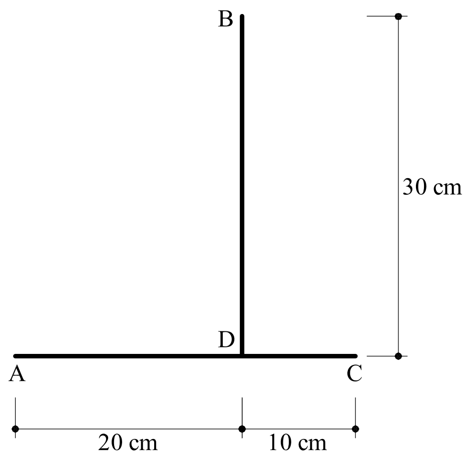


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 4.26

Solución

En la figura 2 puede verse la posición del c.d.g. de la sección

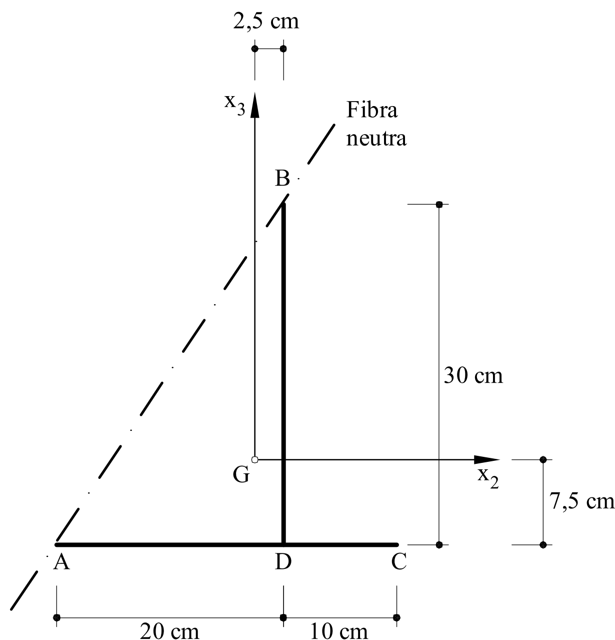


Fig. 2 Posición del centro de gravedad

Los momentos de inercia respecto a los ejes x_2 y x_3 valen

$I_2 = 5.625\ cm^4$

I_3 = 2.625 cm^4
I_{23} = 1.125 cm^4

y el área

$A = 60\ cm^2$

y los radios de giro

$$r_2^2 = \frac{I_2}{A} = 93{,}75\,cm^2$$
$$r_3^2 = \frac{I_3}{A} = 43{,}75\,cm^2$$
$$r_{23}^2 = \frac{I_{23}}{A} = 18{,}75\,cm^2$$

Sean e_2 y e_3 las excentricidades del esfuerzo axil de compresión (y por tanto su posición).

La fibra neutra viene dada por

$$1 + \frac{e_2\,r_2^2 - e_3\,r_{23}^2}{r_2^2\,r_3^2 - r_{23}^4}\,x_2 + \frac{e_3\,r_3^2 - e_2\,r_{23}^2}{r_2^2\,r_3^2 - r_{23}^4}\,x_3 = 0$$

y sustituyendo:

$$1 + \frac{93{,}75\,e_2 - 18{,}75\,e_3}{3750}\,x_2 + \frac{-18{,}75\,e_2 + 43{,}75\,e_3}{3750}\,x_3 = 0$$

La recta *AB* tiene por ecuación

$$1 + 0{,}08\,x_2 - 0{,}053333\,x_3 = 0$$

e identificando coeficientes

$$\frac{93{,}75\,e_2 - 18{,}75\,e_3}{3750} = 0{,}08$$

$$\frac{-18{,}75\,e_2 + 43{,}75\,e_3}{3750} = -0{,}05333$$

Resolviendo el sistema:

$e_2 = 2{,}5\ cm$ $e_3 = -3{,}5\ cm$

Problema 4.27 *Se considera la sección de la figura 1. En el punto A actúa un esfuerzo axil de compresión N. Determinar el valor de N si las tensiones de compresión en la sección no pueden superar los 220 MPa.*

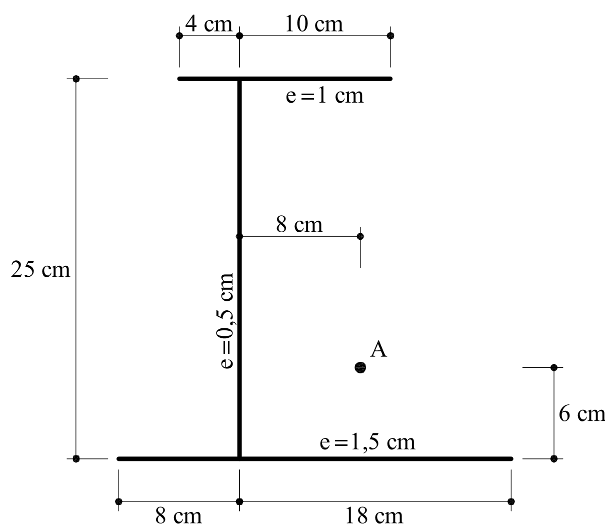


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 4.27

Solución

Las características mecánicas de la sección valen:

$A = 65{,}5\ cm^2$
$I_2 = 7.450\ cm^4$
$I_3 = 2.669\ cm^4$
$I_{23} = -782\ cm^4$
$I_2I_3-I_{23}^2 = 19.272.526\ cm^8$

La posición del centro de gravedad puede verse en la figura 2.
La distribución de tensiones viene dada por

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{N}{I_2I_3 - I_{23}^2}\left[e_3\left(x_3I_3 - x_2I_{23}\right) - e_2\left(x_3I_{23} - x_2I_2\right)\right] =$$

$$= \frac{N}{65{,}5} + \frac{N}{19.272.526}\left[-1{,}73\left(x_3 2.669 + 782\,x_2\right) - 4{,}38\left(-782\,x_3 - 7.450\,x_2\right)\right] =$$

$$= \frac{N}{65{,}5} + N\left[0{,}001623\,x_2 - 0{,}000062\,x_3\right]$$

La fibra neutra se obtiene igualando las tensiones a cero. Es fácil comprobar que la mayor tensión de compresión se produce en el punto más hacia la derecha del ala inferior. Dicho punto tiene de coordenadas (14,38 ; -7,73). Las tensiones valdrán:

$$\sigma = \left[0{,}01527 + 0{,}001623 \times 14{,}38 - 0{,}000062\left(-7{,}73\right)\right]N = 0{,}03908\,N$$

y como $\sigma = 220\ MPa$, igualando se obtiene

$$N = 562{,}8\ kN$$

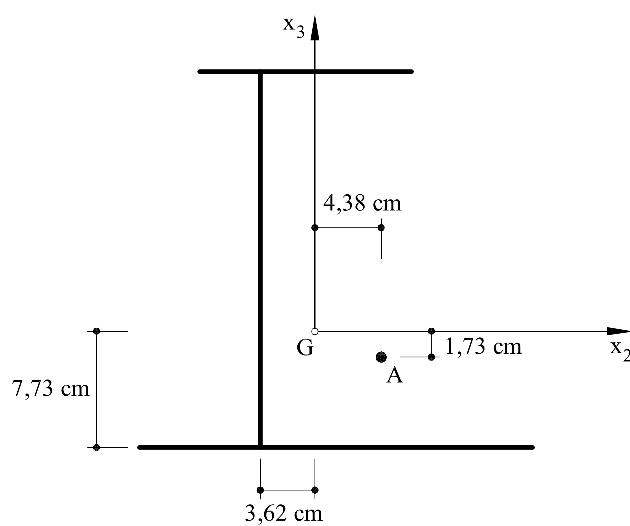


Fig. 2 Posición del centro de gravedad.

Problema 4.28 *Un pilar cuya sección se representa en la figura 1 está sometido a una carga* $P = 150\ kN$ *de compresión aplicada en el punto A..*

Hallar:

a) Distribución de tensiones
b) Núcleo central

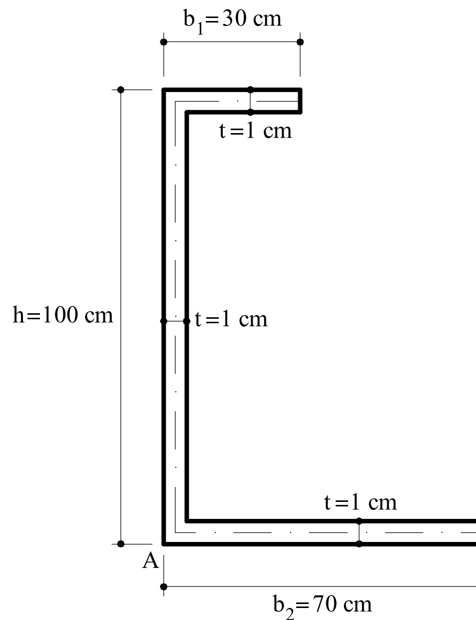


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 4.28

Solución

La posición del centro de gravedad puede verse en la figura 2

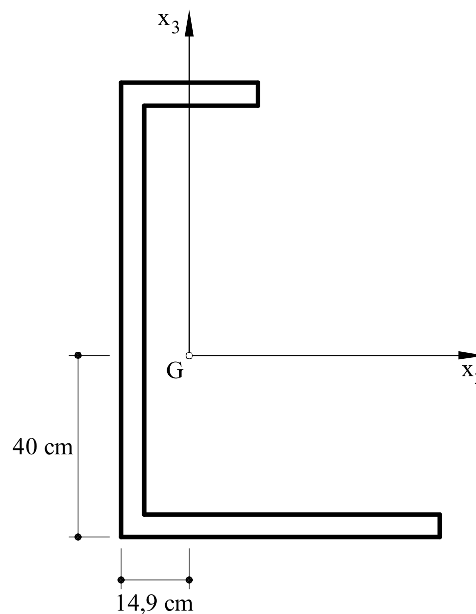


Fig. 2 Ejes y centro de gravedad

Los momentos de inercia respecto a los ejes x_2 x_3 valen

$I_2 = 303.666\ cm^4$
$I_3 = 79.444\ cm^4$
$I_{23} = -69.510\ cm^4$

y el área

$A = 200\ cm^2$

La carga $\mathrm{P} = 150\ kN$ que actúa en el punto A se traslada al punto G, con lo cual aparecen unos momentos

$$M_{f2} = 60\ kN \times m$$
$$M_{f3} = -22{,}35\ kN \times m$$

Las tensiones normales vienen dadas por

$$\sigma = \frac{1}{I_2 I_3 - I_{23}^2}\left[M_{f2}\left(x_3 I_3 - x_2 I_{23}\right) - M_{f3}\left(x_2 I_2 - x_3 I_{23}\right)\right] - \frac{P}{A}$$

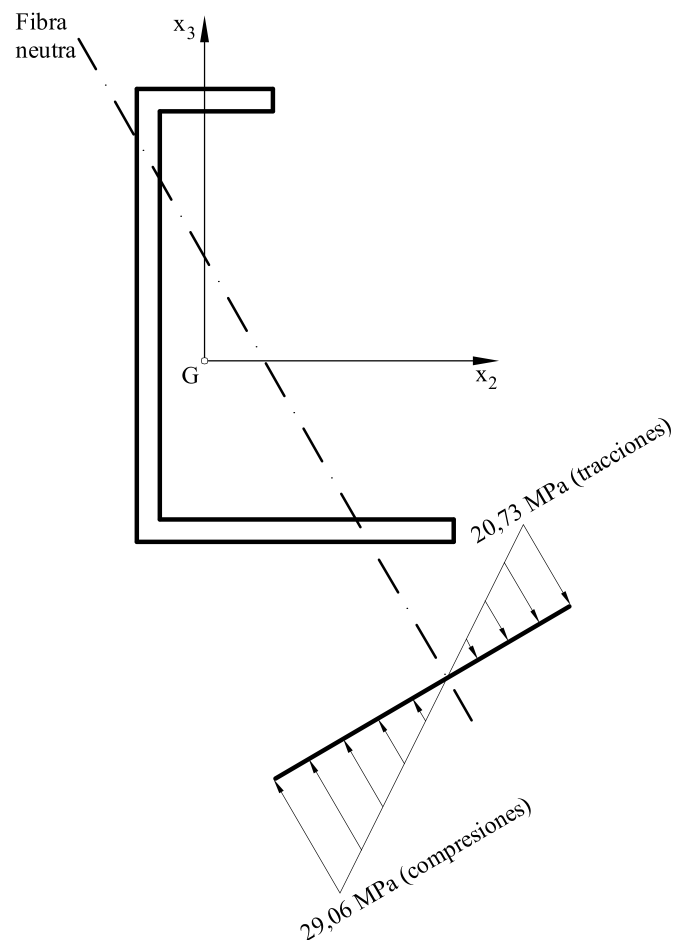


Fig. 3 Distribución de tensiones

Aplicando esta expresión

$$\sigma = 32{,}76\ x_3 + 56{,}796\ x_2 - 7{,}5$$

Las coordenadas x_2 y x_3 vienen expresadas en metros, y las tensiones σ en *MPa*. En la figura 3 puede verse representada la distribución de tensiones.

Problema 4.29 *Una sección de acero de paredes delgadas de 40 cm × 40 cm y 1 cm de espesor (ver figura 1) se rellena de hormigón. Hallar y dibujar la zona por donde puede moverse una fuerza axil de compresión para que en ningún punto de la sección haya tracciones.*

$$n = \frac{E_{acero}}{E_{hormigón}} = 10$$

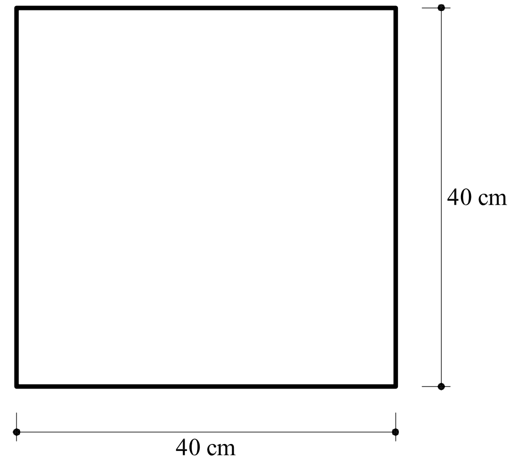


Fig.1 Sección correspondiente al problema 4.29.

Solución

El área mecánica A^* se obtendrá a partir de las áreas del acero A_a y del hormigón A_h. Es decir,

$$A^* = 10\, A_a + A_h = 10 \times 40 \times 4 \times 1 + 40 \times 40 = 3200\, cm^2$$

El momento de inercia mecánico I^*, respecto a un eje horizontal que pasa por el centro de gravedad, se obtiene a partir del momento de inercia del hormigón I_h y del momento de inercia del acero:

$$I^* = 10\, I_a + I_h = 640.000\, cm^4$$

Dada la simetría existente en la sección el núcleo central será cuadrado. Para obtener su vértice inferior se impone la condición que cuando actúa un esfuerzo axil de compresión N en dicho vértice, las tensiones en la fibra superior son nulas.

$$\sigma = 0 = -\frac{N}{A^*} - \frac{N\, e \times 20}{I^*} = \frac{N}{A^*}\left[-1 - \frac{20\, e}{I^* / A^*}\right]$$

en donde e es la excentricidad de la fuerza N.

De la ecuación anterior se obtiene

$$e = -\frac{I^*/A^*}{20} = \frac{640.000/3.200}{20} = 10\,cm$$

En la figura 2 puede verse representado el núcleo central

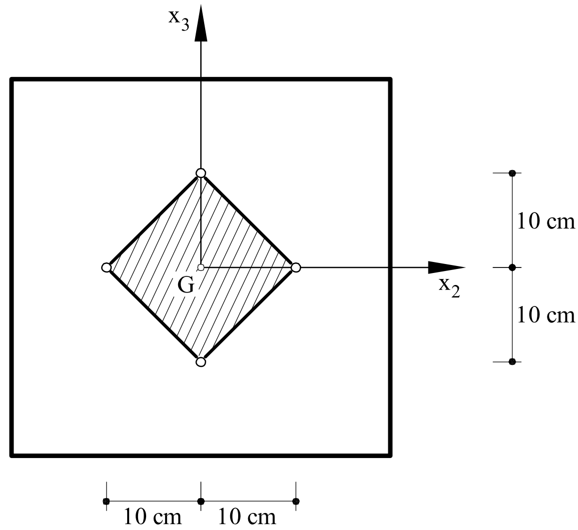


Fig.2 Núcleo central

Problema 4.30 *La sección que se representa en la figura 1 está sometida a un esfuerzo axil de compresión N que actúa en el punto A. Determinar el valor máximo que puede alcanzar el esfuerzo N si las máximas tensiones de compresión son de* $20\,MPa$ *y las máximas de tracción de* $5\,MPa$

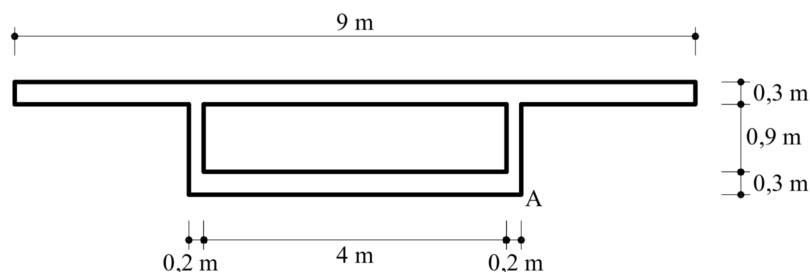


Fig.1 Sección correspondiente al problema 4.30.

Solución

En la figura 2 pueden verse representados los ejes horizontales y vertical que pasan por el centro de gravedad de la sección. Respecto a dichos ejes los momentos de inercia valen

$$I_2 = 1{,}34513\,m^4$$
$$I_3 = 21{,}9434\,m^4$$

Al ser el eje x_3 de simetría, el producto de inercia I_{23} es nulo.

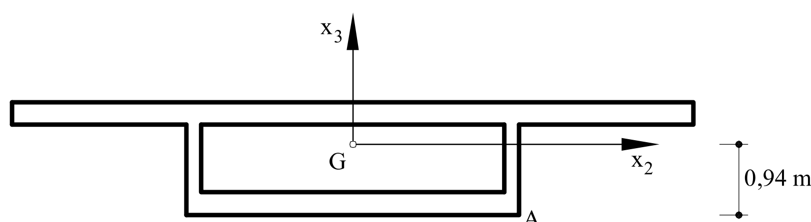


Fig. 2 Ejes coordenados y centro de gravedad de la sección.

El área de la sección vale:

$$A = 4{,}38\,m^2$$

con lo cual

$$I_2/A = 0{,}3071\,m^2 \quad ; \quad I_3/A = 5{,}01\,m^2$$

Las coordenadas del punto A respecto a los ejes x_2 x_3 valen: $A(2{,}2\,;-0{,}94)$. Con lo cual, las excentricidades del esfuerzo N son:

$$e_2 = 2{,}2\,m \quad ; \quad e_3 = -0{,}94\,m$$

La distribución de tensiones se escribe:

$$\sigma = -\frac{N}{A} - \frac{e_3\, N\, x_3}{I_2} - \frac{e_2\, N\, x_2}{I_3} = -\frac{N}{A} + \frac{0{,}94\, N\, x_3}{I_2} - \frac{2{,}2\, N\, x_2}{I_3} =$$

$$= \frac{N}{A}\left[-1 + \frac{0{,}94}{I_2/A}x_3 - \frac{2{,}2}{I_3/A}x_2\right] = \frac{N}{A}\left[-1 + 3{,}0609\, x_3 - 0{,}439\, x_2\right]$$

La fibra neutra se obtendrá igualando las tensiones a cero:

$$-1 + 3{,}0609\, x_3 - 0{,}439\, x_2 = 0$$

En la figura 3 puede verse representada la fibra neutra $f - f'$

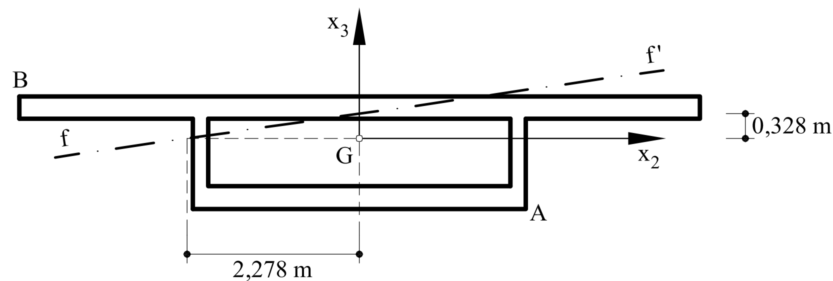


Fig. 3 Fibra neutra

Los puntos más alejados de la fibra neutra son el A y el B, por lo cual en dichos puntos se producirán las máximas tensiones: en A de compresión y en B de tracción.

Las coordenadas de B son: $B(-4{,}5\,;\,0{,}56)$

Las tensiones en A y B valdrán:

$$\sigma_A = \frac{N}{4{,}38}\left[-1 + 3{,}0609(-0{,}94) - 0{,}439 \times 2{,}2\right] = -20000\, kN/m^2$$

es decir,

$$N_1 = 18.087{,}8\, kN$$

$$\sigma_B = \frac{N}{4{,}38}\left[-1 + 3{,}0609 \times 0{,}56 - 0{,}439(4{,}5)\right] = 5000\, kN/m^2$$

O sea

$$N_2 = 8.142{,}5\, kN$$

Entre N_1 y N_2 se elige el menor valor:

$$N = 8.142{,}5\, kN$$

Problema 4.31 *En la sección que se representa en la figura 1.a) actúa un esfuerzo axil de compresión situado en el punto A,* $N = 2000\,kN.$, *aplicado en el punto A. Hallar las tensiones en el punto B.*

Estando la sección cargada, se construye la porción de sección que se sombrea en la figura 1.b), la cual tiene un módulo de elasticidad doble que la sección antigua. Una vez fraguado el hormigón y estando ambas partes perfectamente adheridas, se quita el esfuerzo axil N. Hallar las tensiones en el punto C.

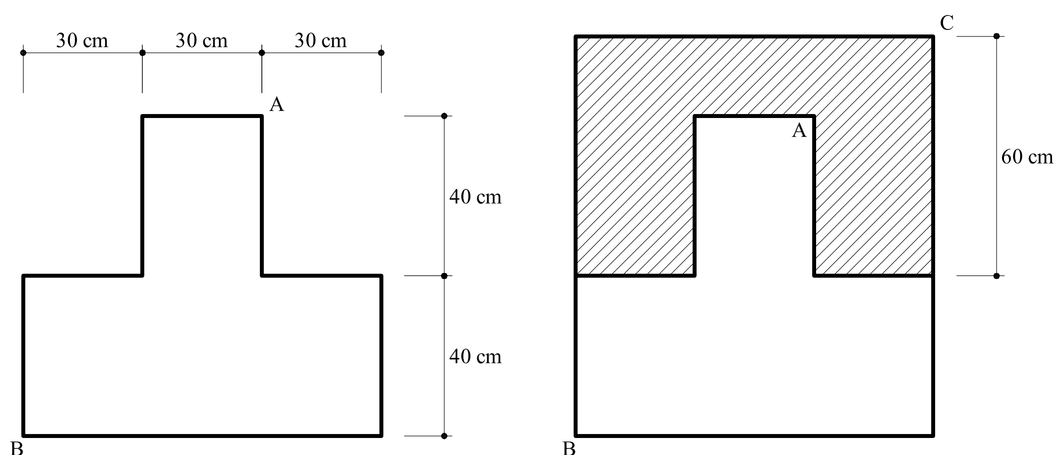


Fig.1 Sección correspondiente al problema 4.31. a) Sección homogénea. b) Sección mixta.

Solución

En la figura 2 puede verse la posición del centro de gravedad correspondiente a la sección homogénea, estando las cotas expresadas en metros

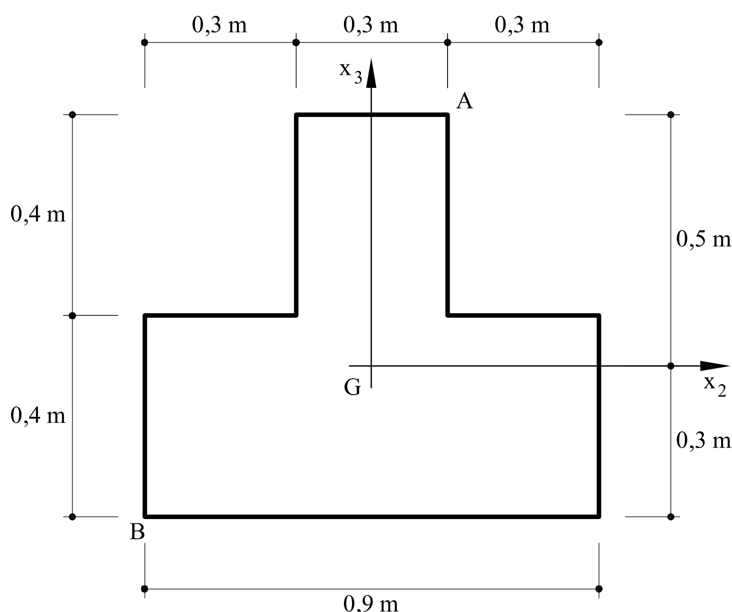


Fig. 2 Posición del centro de gravedad en la sección homogénea

El área vale $A = 0{,}48\,m^2$ y los momentos de inercia

$I_2 = 0{,}0208\, m^4$
$I_2 = 0{,}0252\, m^4$

Las coordenadas de los puntos *A* y *B* son: $A(0{,}15\,;\,0{,}50)$, $B(-0{,}45\,;\,-0{,}30)$.
La tensión normal en el punto *B* valdrá:

$$\sigma_B = \frac{N}{A} + \frac{N \times 0{,}5 \times (-0{,}3)}{0{,}0208} + \frac{N \times 0{,}15 \times (-0{,}45)}{0{,}0252} = -15613{,}55\, kN/m^2 = -15{,}61355\, MPa\,(Compresión)$$

Cuando a la sección se le agrega la zona sombreada, se convierte en una sección mixta.
En la figura 3, puede verse representada la posición del centro de gravedad mecánico.

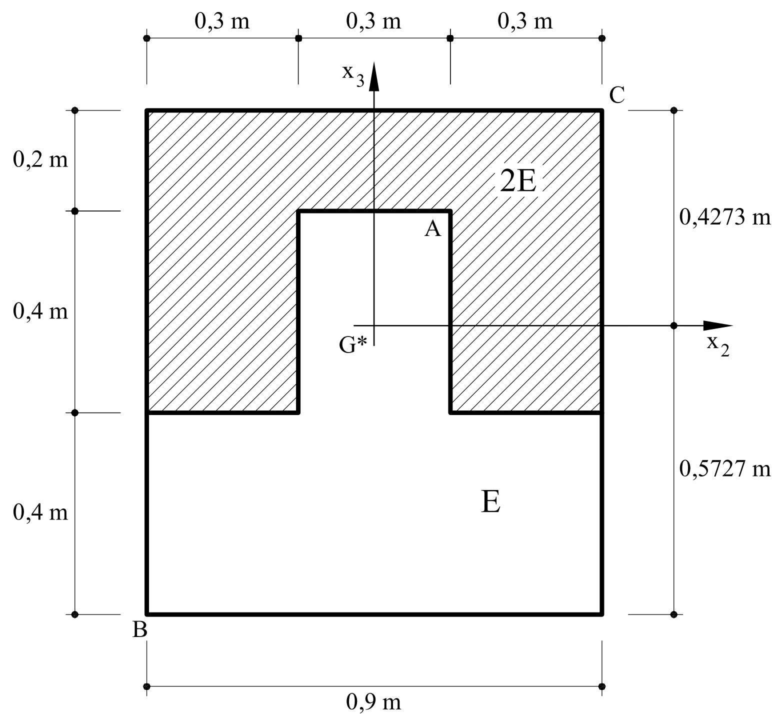


Fig. 3. Posición del centro de gravedad mecánico en la sección mixta.

El área mecánica (referida a la zona de menor módulo de elasticidad) vale $A^* = 1{,}32\, m^4$.

Los momentos de inercia mecánicos valdrán:

$I_2^* = 0{,}10302\; m^4$
$I_3^* = 0{,}0963\; m^4$

El hecho de quitar el esfuerzo axil *N* de la sección mixta, tiene el mismo efecto que mantenerlo y aplicar un esfuerzo *N* de sentido contrario.

Las coordenadas de los puntos *A* y *C* respecto a los ejes horizontal y vertical que pasan por el centro de gravedad mecánico valen: $A(0{,}15\,;\,0{,}2273)$ y $C(0{,}45\,;\,0{,}4273)$.

Con lo cual, la tensión normal en el punto *C* se escribe

$$\sigma_c = 2\left[\frac{2000}{1{,}32} + \frac{2000 \times 0{,}4273 \times 0{,}2273}{0{,}10302} + \frac{2000 \times 0{,}45 \times 0{,}15}{0{,}0963}\right] = 9605{,}17\, kN/m^2 = 9{,}605\, MPa\left(tracción\right)$$

Problema 4.32 *La sección que se representa en la figura 1 es de paredes delgadas. El espesor es constante e igual a 1,2 cm . Indicar el punto en donde debe actuar un esfuerzo axil de compresión, para que la fibra neutra pase por los puntos A y B.*

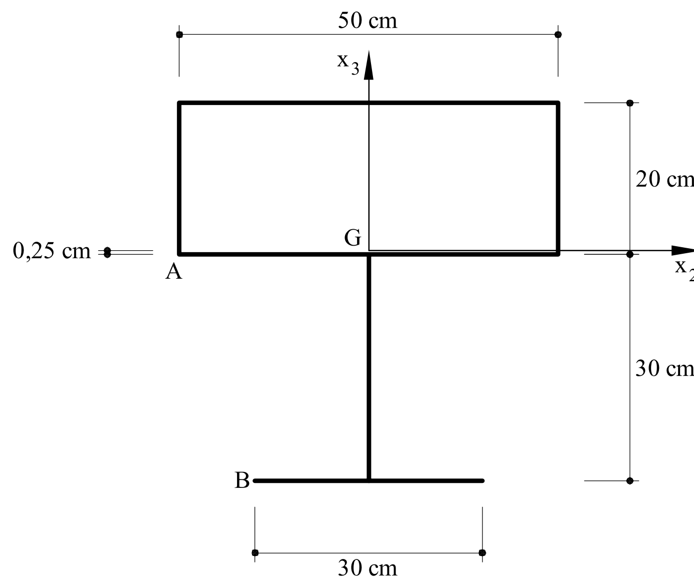


Fig.1 Sección correspondiente al problema 4.32

Solución

Los momentos de inercia de la sección, respecto a los ejes x_2 y x_3 valen:

$$I_2 = 73585\, cm^4$$
$$I_3 = 57700\, cm^4$$

y el área $A = 240\, cm^2$

Con lo cual, los radios de giro valen

$$r_2^2 = \frac{I_2}{A} = \frac{73585}{240} = 306{,}6\, cm^2$$

$$r_3^2 = \frac{I_3}{A} = \frac{57700}{240} = 240{,}42\, cm^2$$

Con lo cual, la ecuación de la fibra neutra se escribe

$$0 = 1 + \frac{e_3\, x_3}{r_2^2} + \frac{e_2\, x_2}{r_3^2}$$

Por otro lado, la ecuación de la recta *AB* se expresa:

$$0 = 1 + \frac{1}{75,875} x_3 + \frac{3,025}{75,875} x_2$$

Identificando términos:

$$\frac{e_3}{r_2^2} = \frac{1}{75,875}$$

$$\frac{e_2}{r_3^2} = \frac{3,025}{75,875}$$

Con lo cual, las coordenadas del punto buscado valen:

$$e_3 = \frac{r_2^2}{75,875} = 4,04\,cm$$

$$e_2 = \frac{3,025 \times r_3^2}{75,875} = 9,59\,cm$$

Problema 4.33 *En la sección de paredes delgadas de la figura 1, las dos paredes horizontales tienen un módulo de elasticidad 6E, mientras que en el resto de la sección vale E. En la sección actúa un esfuerzo axil de compresión de valor N situado en el punto A. Se pide:*

- *Punto en que se producen las máximas tracciones*
- *Valor de N para que las máximas tracciones no sobrepasen los 150 MPa*
- *Fibra neutra*
- *Valor de la curvatura*

Notas:

- *El espesor de las paredes es constante y vale 1 cm.*
- *Los momentos de inercia mecánicos (referidos al material de módulo de elasticidad E) respecto a los ejes x_2 y x_3 valen*

$$I_2^* = 35799{,}4\, cm^4$$
$$I_3^* = 262633\, cm^4$$

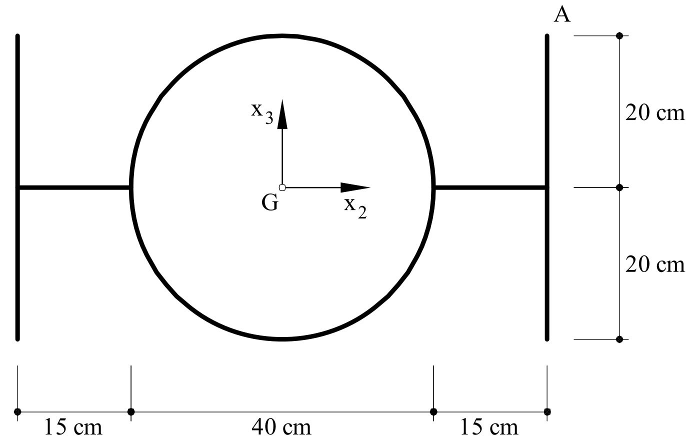


Fig.1 Sección correspondiente al problema resuelto 4.33

Solución

El área mecánica de la sección vale $A^* = 385{,}66\, cm^2$. Se supondrá que N viene expresado en *kN*, mientras que se tomará como unidad de longitud el centímetro.

La distribución de tensiones en toda la sección se escribe

$$\sigma = n\left(-\frac{N}{385{,}66} - \frac{N \times 20}{35799{,}4} x_3 - \frac{N \times 35}{262633} x_2\right) = -\frac{n\,N}{385{,}66}\left(1 + \frac{x_3}{4{,}6413} + \frac{x_2}{19{,}457}\right)$$

La fibra neutra vendrá dada por $\sigma = 0$, es decir (ver figura 2)

$$1 + \frac{x_3}{4{,}6413} + \frac{x_2}{19{,}457} = 0$$

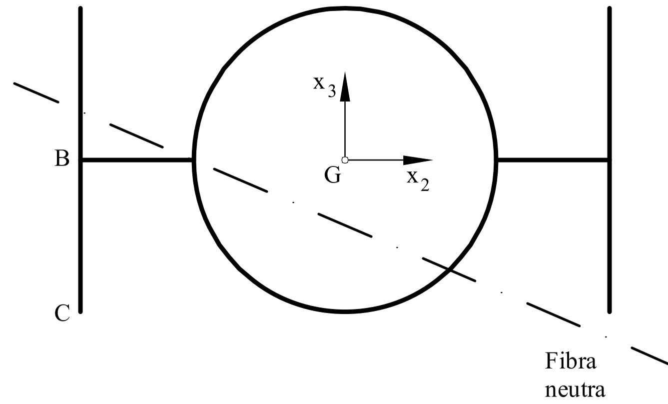


Fig. 2. Fibra neutra

A partir de la figura 2, es evidente que los puntos de mayor tracción serán el *B* o el *C*

$$\sigma_B = \frac{-6N}{385{,}66}\left(1-\frac{35}{19{,}457}\right) = 0{,}012428\,N$$

$$\sigma_C = \frac{-N}{385{,}66}\left(1-\frac{20}{4{,}6413}-\frac{35}{19{,}457}\right) = 0{,}013245\,N$$

Con lo cual, el punto en que se tienen mayores tracciones es el punto *C*.

Si $\sigma_C = 150\,MPa = 15\,\frac{kN}{cm^2}$, resulta:

$$15 = 0{,}013245\,N$$

Es decir: $N = 1132{,}5\,kN$

La curvatura respecto al eje x_2 valdrá

$$\chi_2 = \frac{M_{f2}}{E\,I_2^*} = \frac{20\,N}{E\times 35799{,}4} = \frac{0{,}63269}{E}$$

La curvatura respecto al eje x_3 vale:

$$\chi_3 = \frac{M_{f3}}{E\,I_3^*} = \frac{35N}{E\times 262633} = \frac{0{,}150923}{E}$$

La curvatura total vale:

$$\chi = \sqrt{\chi_2^2+\chi_3^2} = \frac{0{,}65336}{E}$$

Problema 4.34 *En la sección maciza de la figura 1, compuesta por dos materiales, actúa una fuerza F_1 de compresión, tal que las máximas compresiones valgan* $15\,MPa$. *Posteriormente, se aplica una segunda fuerza F_2 también de compresión y situada sobre la línea* $A-A'$.

Hallar el valor y la posición de F_2 para que bajo el efecto de ambas fuerzas, F_1 y F_2, las tensiones de compresión en la zona de módulo de elasticidad E sean constantes y valgan $15\,MPa$.

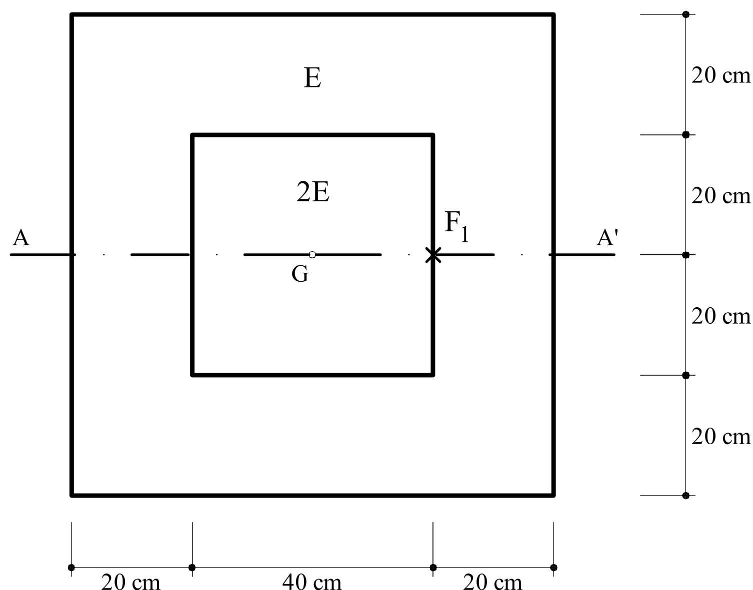


Fig.1 Sección correspondiente al problema 4.34

Solución

El área mecánica de la sección así como el momento de inercia mecánico (referidos al material de módulo de elasticidad *E*) valen:

$$A^* = 80 \times 80 + 40 \times 40 = 8000\,cm^2 = 0{,}8\,m^2$$

$$I^* = \frac{1}{12} 80 \times 80^3 + \frac{1}{12} 40 \times 40^3 = 3.626.667\,cm^4 = 0{,}0362667\,m^4$$

Debido a F_1, las tensiones de compresión en el punto 1 (ver figura 2) valen:

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{0{,}8} + \frac{(0{,}2\,F_1) \times 0{,}4}{0{,}0362667} = 3{,}4559\,F_1$$

Y en el punto 2 (dentro de la zona de módulo de elasticidad $2E$):

$$\sigma_2 = 2\left[\frac{F_1}{0{,}8} + \frac{(0{,}2\,F_1) \times 0{,}2}{0{,}0362667}\right] = 4{,}7059\,F_1$$

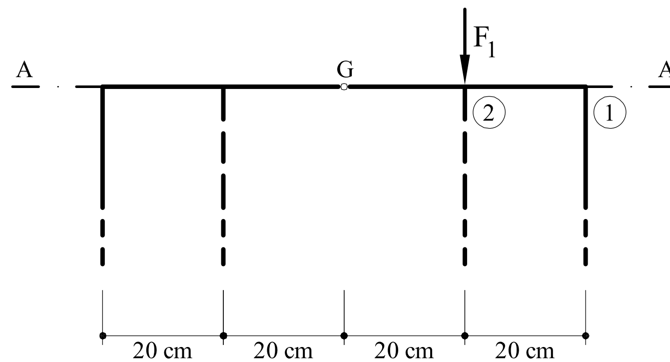


Fig.2. Posición de los puntos 1 y 2

Al ser $\sigma_2 > \sigma_1$, se igualará la tensión σ_2 al valor de $15\,MPa$:

$$4{,}7059\,F_1 = 15\,MPa$$

$$F_1 = \frac{15}{4{,}7059}\,MN = 3187{,}5\,kN$$

Para que una vez introducido F_2 las tensiones sean constantes, la resultante de F_1 y F_2 deben pasar por el centro de gravedad de la sección (figura 3)

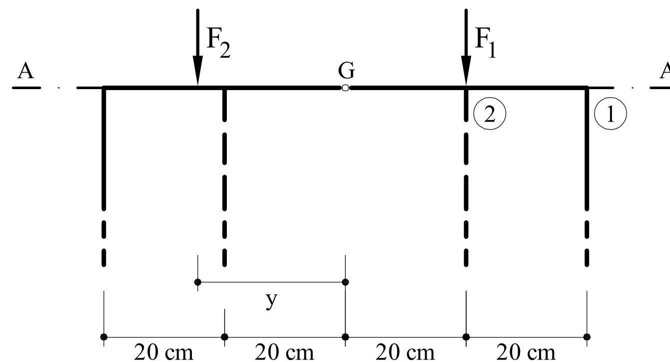


Fig.3. Posición de la fuerza F_2

Tomando momentos respecto a *G*:

$$y\,F_2 = 0{,}2\,F_1 = 0{,}6375$$

y además:

$$\frac{F_1 + F_2}{A^*} = 15\,MPa$$

Es decir:

$$y = 0{,}07234\,m$$

$$F_2 = 8.812{,}5\,kN$$

Problema 4.35 *La sección que se representa en la figura 1 está sometida a un esfuerzo axil excéntrico de compresión de valor N_1 de tal forma que la fibra neutra sea la recta m-m'. Si las máximas tensiones valen $\sigma_m = 25\ MPa$,*

1. *Determinar el valor de N_1.*
2. *Determinar asimismo la posición de N_1 respecto a los ejes principales $\left(G\,\hat{x}_2\ ,\ G\,\hat{x}_3\right)$ siendo G el centro de gravedad de la sección.*

Seguidamente (y sin quitar N_1) se aplica en el punto A un nuevo esfuerzo axil $N_2 = 500\ kN$, también de compresión.

Se pide:

1. *Determinar la nueva fibra neutra dibujando su posición.*
2. *Indicar las zonas de la sección que estarán traccionadas y las que estarán comprimidas.*
3. *Valor de la máxima tensión de compresión y punto en que se produce.*
4. *Si se produjeran tracciones, punto en que se produce la máxima tensión de tracción.*
5. *Curvatura χ de la sección (E = 30 GPa).*

NOTA: Todo el ejercicio se realizará en ejes principales.

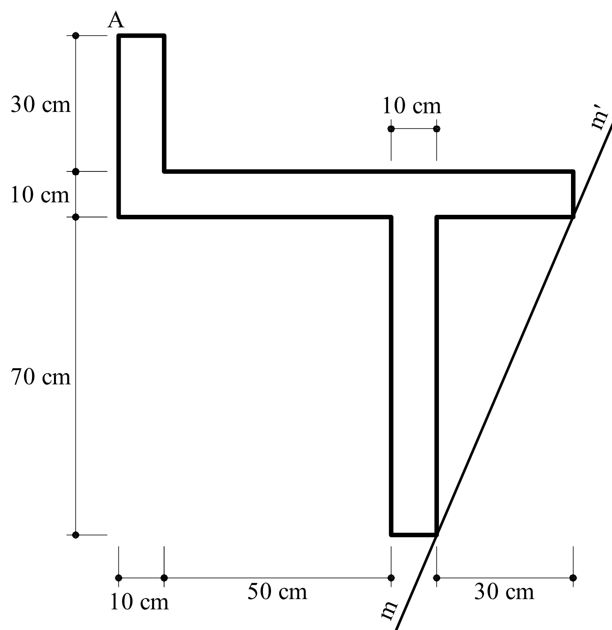


Fig. 1. Sección correspondiente al problema resuelto 4.35

Solución

Las propiedades mecánicas de la sección valen

Área: $A = 2.000\ cm^2$

Momentos de inercia:

$$I_2 = \frac{1}{12}10 \times 40^3 + 10 \times 40 \times 26^2 + \frac{1}{12} \times 90 \times 10^3 + 90 \times 10 \times 11^2 + \frac{1}{12}10 \times 70^3 + 10 \times 70 \times 29^2 =$$
$$= 1.314.667 \ cm^4$$

$$I_3 = \frac{1}{12}40 \times 10^3 + 10 \times 40 \times 43{,}5^2 + \frac{1}{12} \times 10 \times 90^3 + 90 \times 10 \times 6{,}5^2 + \frac{1}{12}70 \times 10^3 + 70 \times 10 \times 16{,}5^2 =$$
$$= 1.602.167 \ cm^4$$

$$I_{23} = -10 \times 40 \times 26 \times 43{,}5 + 90 \times 10 \times 11 \times 6{,}5 - 70 \times 10 \times 16{,}5 \times 29 = -723.000$$

Ejes principales de inercia:

$$\tan 2\theta = \frac{2\, I_{23}}{I_3 - I_2} = -\frac{2 \times 723.000}{1.602.167 - 1.314.667} = -5{,}02957$$

$$\theta = -39{,}377^{\circ}$$

Momentos de inercia principales y radios de giro

$$\hat{I}_2 = 721.265 \ cm^4 \qquad \hat{I}_3 = 2.195.569 \ cm^4$$
$$\hat{r}_2^2 = 360{,}63 \ cm^2 \qquad \hat{r}_3^2 = 1.097{,}78 \ cm^2$$

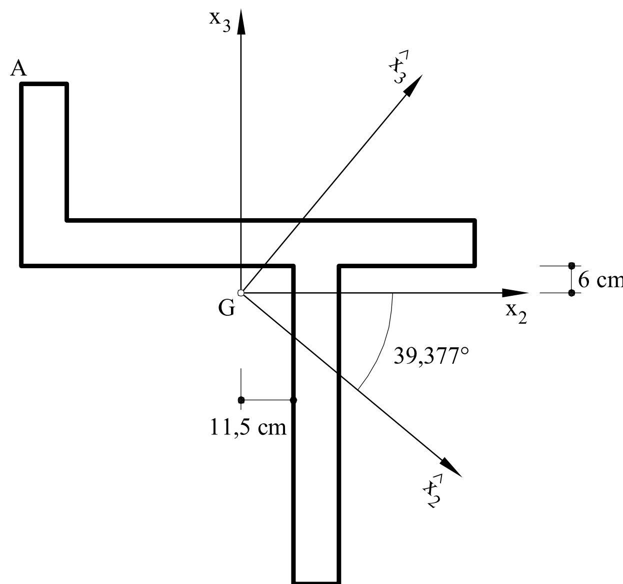


Fig. 2 Centro de gravedad y ejes principales

La ecuación de la fibra neutra *m-m'* respecto a los ejes principales vale

$$\hat{x}_3 + 3{,}45\, \hat{x}_2 - 161{,}41 = 0$$

La ecuación general de la fibra neutra viene dada por

$$0 = 1 + \frac{\hat{e}_3\, \hat{x}_3}{\hat{r}_2^2} + \frac{\hat{e}_2\, \hat{x}_2}{\hat{r}_3^2}$$

es decir,

$$0 = 1 + \frac{\hat{e}_3}{360,63}\hat{x}_3 + \frac{\hat{e}_2}{1097,78}\hat{x}_2$$

e identificando coeficientes se obtiene la posición de N_1

$$\hat{e}_2 = -23,46 \; cm \qquad \hat{e}_3 = -2,23 \; cm$$

La distribución de tensiones normales viene dada por

$$\sigma = -\frac{N_1}{2000}\left(1 + \frac{\hat{e}_3\hat{x}_3}{360,63} + \frac{\hat{e}_2\hat{x}_2}{1097,78}\right) = \frac{N_1}{2000}\left(-1 + \frac{\hat{x}_3}{161,72} + \frac{\hat{x}_2}{46,79}\right)$$

Las coordenadas $\hat{x}_2$ y $\hat{x}_3$ del punto *A* valen:

$$\hat{x}_{2A} = -66,67 \, cm \qquad \hat{x}_{3A} = 4,79 \; cm$$

Y como las máximas tensiones se producen en el punto **A** se tendrá:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_1}{2000}\left(-1 + \frac{4,79}{161,72} - \frac{66,67}{46,79}\right) = -\frac{N_1}{834,98}$$

Y como $\sigma_{\max} = 25 \; MPa = 2,5 \; kN/cm^2$,

$$N_1 = -834,98 \times 2,5 = -2087,46 \; kN \quad (compresión)$$

Las tensiones en el punto *A* debidas exclusivamente a N_2 valen

$$\sigma = -\frac{N_2}{2000}\left(1 + \frac{4,79}{360,63}\hat{x}_3 - \frac{66,67}{1097,78}\hat{x}_2\right) = -\frac{N_2}{2000}\left(1 + \frac{\hat{x}_3}{75,29} - \frac{\hat{x}_2}{16,47}\right)$$

Las tensiones debidas a N_1 y N_2 valdrán (expresadas en kN/cm^2):

$$\sigma = -\frac{2087,46}{2000}\left(1 - \frac{\hat{x}_3}{161,72} - \frac{\hat{x}_2}{46,79}\right) - \frac{500}{2000}\left(1 + \frac{\hat{x}_3}{75,29} - \frac{\hat{x}_2}{16,47}\right) =$$

$$= -1,294 + 0,003134\,\hat{x}_3 + 0,037486\,\hat{x}_2$$

La fibra neutra se obtiene igualando a cero la expresión anterior

$$0 = -1,294 + 0,003134\,\hat{x}_3 + 0,037486\,\hat{x}_2$$

En la figura 3 puede verse representada la fibra neutra

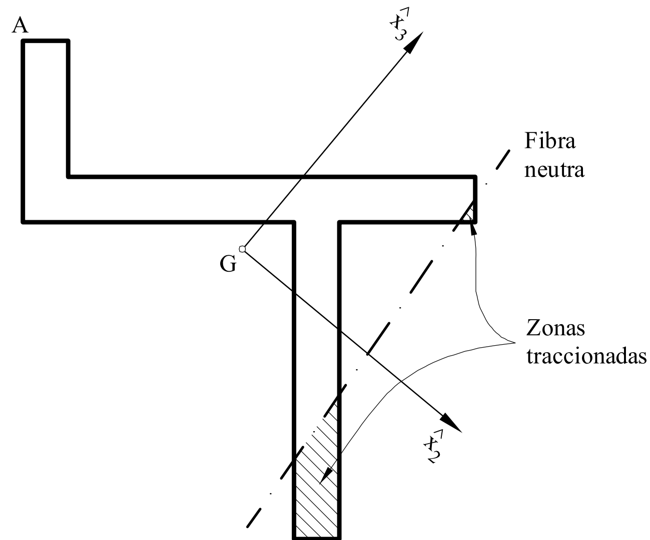


Fig. 3 Fibra neutra

El punto de mayor tensión es el punto *A*, por lo que

$$\sigma_A = -1{,}294 + 0{,}003134 \times 4{,}79 + 0{,}037486 \times (-66{,}67) = 3{,}778\ kN/cm^2 = 37{,}78\ MPa$$

Problema 4.36 *La sección de la figura 1a se pretensa mediante un cable con una sección de 25 cm², situado en el centro de la parte inferior de la pieza.*

La tensión de compresión en la parte inferior de la sección, después del pretensado, debe ser de 30 Mpa. Una vez fabricada, se coloca sobre apoyos, tal como se indica en la figura 1 b.

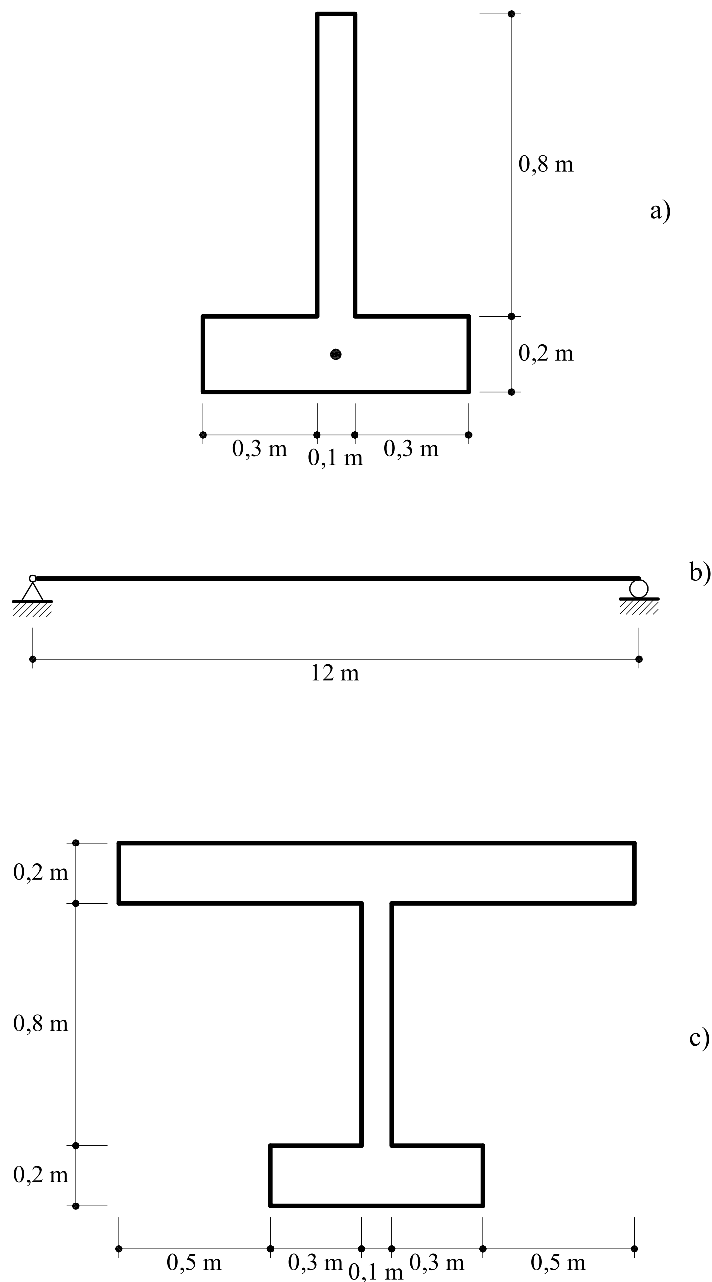


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 4.36

A continuación se hormigona la parte superior de la sección, resultando una viga con la sección de la figura 1 c.

Una vez endurecido el hormigón, se carga la viga con una fuerza F en el centro de su luz.

a) *Hallar dicha fuerza, considerando que la máxima tensión de compresión en el hormigón es de 35 MPa y que la tensión de tracción es nula.*

b) *Calcular, asimismo, los esfuerzos en el cable y las tensiones en la sección central de la viga, en todas las fases del proceso.*

Datos:

-Peso específico del hormigón: 25 kN/m³
-Relación de los módulos de elasticidad: n = E_a / E_h = 8

Solución

Características geométricas de la sección a :

$$x_{3Gh} = \frac{\left(0{,}2 \cdot 0{,}7 - 25 \times 10^{-4}\right) \times 0{,}1 + 0{,}1 \times 0{,}8 \times 0{,}6}{0{,}8 \times 0{,}1 + 0{,}2 \times 0{,}7 - 25 \times 10^{-4}} = 0{,}2828\, m$$

$$x_{3G}^{*} = \frac{y_{Gh} \cdot A_h + n \cdot y_{Ga} \cdot A_a}{A_h + n \cdot A_a} = \frac{0{,}2828 \times 0{,}2175 + 8 \times 0{,}1 \times 25 \times 10^{-4}}{0{,}2175 + 8 \times 25 \times 10^{-4}} = 0{,}2674\, m$$

$$A^{*} = 0{,}2175 + 8 \cdot 25 \times 10^{-4} = 0{,}2375\, m^2$$

$$I_2^{*} = I_{h2} + I_{a2} \cdot n$$

$$= \frac{1}{12} 10 \times 80^3 + 10 \times 80 \times (60 - 26{,}74)^2 + \frac{1}{12} \times (20 \cdot 70 - 25) 20^2 + (20 \times 70 - 25) \times (26{,}74 - 10)^2 +$$
$$+ \left[\frac{1}{2} \times 25 \times 12{,}5^2 + 25 \times (26{,}74 - 10)^2\right] \times 8 = 1\,742\,795{,}03 + 8 \times 8\,958{,}815 = 1\,814\,465{,}55\, m^4 =$$
$$= 0{,}01814\, m^4$$

1. Se pretensa el acero, aparecerá una tensión que valdrá:

$$\sigma_a^I = \frac{T}{A_a} \quad (tracciones)$$

2. Una vez endurecido el hormigón, se corta el cable y este esfuerzo será transmitido al hormigón que quedará por tanto comprimido y sometido a un esfuerzo axil T. Al actuar este esfuerzo axil en un punto que no es el centro de gravedad será equivalente a una compresión pura más un momento flector (ver figura 2).

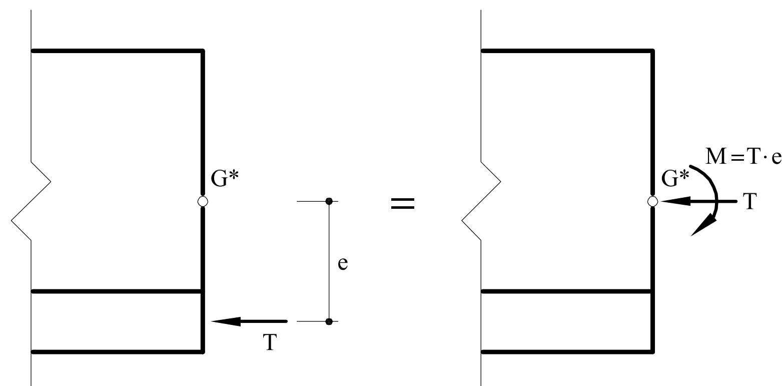


Fig. 2 Sección sometida a flexión compuesta

Las nuevas tensiones que actúan sobre el acero y el hormigón serán:

$$\sigma_a^{II} = -\frac{T}{A*}\cdot n + \frac{T\cdot e}{I_2^*}\cdot x_3^* n = -\frac{T}{0{,}2375}\cdot 8 - \frac{T\cdot e\cdot(-0{,}1674)}{0{,}01814}\cdot 8$$

$$\sigma_h^{II} = -\frac{T}{A*} + \frac{T\cdot e}{I_2^*}\cdot x_3^* = -\frac{T}{0{,}2375} + \frac{T\cdot e\cdot x_3}{0{,}01814}$$

La tensión de compresión en la parte inferior de la sección debe ser de 30 MPa:

$$\sigma_{h\max} = -30\times 10^6\ Pa = (-4{,}2105 - 9{,}2282\cdot 0{,}2674)\cdot T$$

$$T = 4492{,}277\ kN$$

La tensión final en el acero valdrá:

$$\sigma_a = \sigma_a^I + \sigma_a^{II} = 4\,492{,}277\cdot\left(\frac{1}{25\times 10^{-4}} - \frac{1}{0{,}2375}\cdot 8 - \frac{0{,}1674^2}{0{,}01814}\cdot 8\right) = 1\,590\,MPa$$

3. *Acción del peso propio*: El peso propio actuará sobre la sección mixta. El punto de la viga en el cual actúe un momento mayor es aquel en que tendremos unas tensiones mayores. Este punto será el centro de luz.

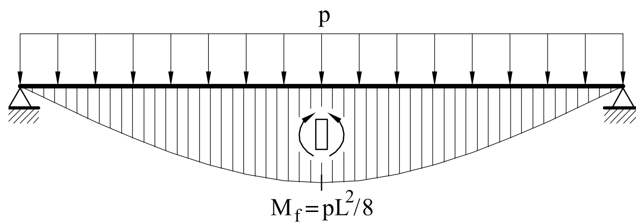


Fig .3 Ley de momentos flectores debidos a la carga uniformemente repartida del peso propio

El peso específico del hormigón vale:

$$p = \gamma_h\cdot A_h = 25\times 10^3\frac{kN}{m^3}\cdot 0{,}2175\,m^2 = 5{,}4375\frac{kN}{m}$$

Se supone el peso del acero despreciable.

$$M_{f\max} = \frac{pL^2}{8} = 5{,}4375\frac{kN}{m}\cdot\frac{(12\,m)^2}{8} = 97{,}875\,kNm$$

Las nuevas tensiones que actuarán sobre el acero y el hormigón serán:

$$\sigma_a^{III} = -\frac{M\, x_3^*}{I_2^*} \cdot n = \frac{-97{,}875 \cdot (-0{,}1674)}{0{,}01814} \cdot 8 = 7{,}225\, MP_a$$

$$\sigma_h^{III} = -\frac{M\, x_3^*}{I_2^*} = \frac{-97{,}875 \cdot x_3^*}{0{,}01814} = -5395{,}53\, x_3$$

$$\sigma_a^{FINAL} = 1590 + 7{,}225 = 1597{,}225\, MPa \quad (tracciones)$$

$$\sigma_h^{FINAL} = -18{,}915 + 41{,}456\, x_3^* - 5{,}395\, x_3^* = -18{,}915 + 36{,}061\, x_3^*$$

$$x_3^* = 0{,}7326\, m \qquad \sigma_A = 7{,}50\, MPa$$

$$x_3^* = -0{,}0674\, m \qquad \sigma_B = -21{,}345 MPa$$

$$x_4^* = -0{,}2674\, m \qquad \sigma_C = -28{,}56\, MPa$$

4. Se hormigona la parte superior, las características mecánicas de la nueva sección valdrán (figura 4):

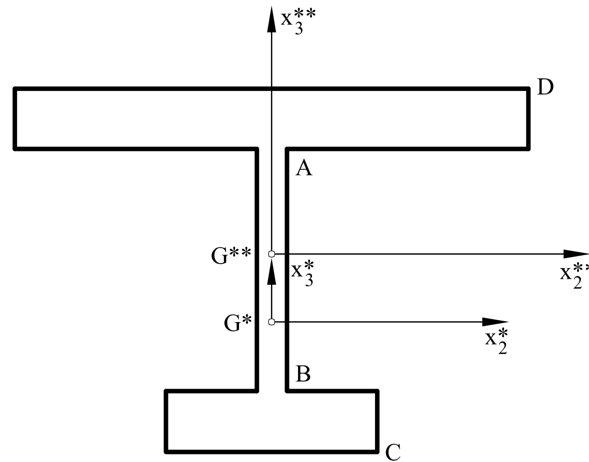


Fig. 4 Sección y ejes locales

$$x_{3G}^{**} = \frac{x_3^* \cdot A^* + x_{3G\,HORM.NUEVO}^{**} \cdot A_{h\,NUEVO}}{A^* + A_{h\,NUEVO}} = \frac{16{,}74 \times 23{,}75 + 110 \times (170 \cdot 20)}{237{,}5 + 170 \times 20} = 71{,}64 \;\; cm$$

$$I_2^{**} = I_2^* + I_2^{NUEVO} = I_2^* + \left(x_{36}^{**} - x_{36}^*\right)^2 \cdot A^* + \frac{1}{12} \times 170 \times 20^3 + (110 - 71{,}64)^2 \times 170 \times 20 =$$

$$= 11\,718\,218{,}71\; cm^4 = 0{,}11718\, m^4$$

$$q = \gamma_h \cdot A^{NUEVA} = 25\frac{kN}{m^3} \times 0{,}2\,m \times 1{,}7\,m = 8{,}50\frac{kN}{m}$$

La nueva carga uniformemente repartida actuará sobre la sección inicial representada en la figura 1.
El momento flector máximo se producirá en la sección centro de luz y valdrá:

$$M_{f4} = \frac{q\,L^2}{8} = 8{,}5 \times \frac{12^2}{8} = 153\,kNm$$

Sección centro de luz:

- Acero:

$$\sigma_a^{IV} = -\frac{M_{f4} \cdot x_3^*}{I_2^*} = -\frac{153\frac{kN}{m} \times (-0{,}1674)}{0{,}01814} \times 8 = 11{,}29\,MPa$$

$$\sigma_a^{FINAL} = 1\,597{,}225 + 11{,}29 = 1\,608{,}515\,MPa$$

- Hormigón:

$$\sigma_h^{IV} = -\frac{M_{f4} \cdot x_3^*}{I_2^*} = -\frac{153\frac{kN}{m} \cdot x_3^*}{0{,}01814} = -8{,}434\,x_3^*\ MPa$$

$$\sigma_h^{FINAL} = -18{,}915 + 36{,}061 x_3^* - 8{,}434 x_3^* = -18{,}915 + 27{,}627\,x_3^*\ MPa$$

x_3^* referido al centro de gravedad de la sección inicial.

$$\sigma_A = 1{,}3245\,MPa$$

$$\sigma_B = -20{,}777\,MPa$$

$$\sigma_C = -26{,}3025\ MPa$$

Una vez endurecido el hormigón, se carga la viga con una fuerza F en el centro de su luz. Esta fuerza F actúa sobre toda la nueva sección (figura 5).

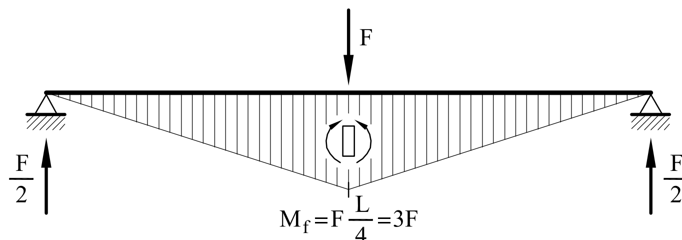


Fig. 5 Ley de esfuerzos flectores

Sección centro de luz:

- Acero:

$$\sigma_a^{V} = \frac{-3F \cdot x_3^{**}}{0{,}11718} \cdot 8 = \frac{-3F \cdot (-0{,}6164)}{0{,}11718} \cdot 8 = 126{,}246F$$

$$\sigma_a^{FINAL} = 1598{,}35 + 126{,}246F \times 10^{-3} \ (MPa)$$

- Hormigón:

$$\sigma_h^{V} = \frac{-3F \cdot x_3^{**}}{0{,}11718} = -25{,}601F \cdot x_3^{**}$$

$$\sigma_h^{FINAL} = -18{,}915 + 27{,}627x_3^{*} - 25{,}601 \times 10^{-3} \ F \cdot x_3^{**} \ (MPa)$$

Se imponen las condiciones:

- Máxima compresión:

1. En la fibra superior de la sección final $\left(x_3^{**} = 0{,}4836\,m\right)$ sólo actúa el momento flector debido a F.

$$-35 \le -25{,}601 \times 10^{-3} \cdot F \cdot 0{,}4836$$

$$F \le 2827\,kN$$

2. En la fibra superior de la sección inicial $\left(x_3 = 0{,}7326\,m\right)$, donde actúan todos los momentos flectores:

$$-35 \le -25{,}601 \times 10^{-3} F \cdot 0{,}2836 - 18{,}915 + 27{,}627 \cdot 0{,}7326$$

$$F \le 5003\,kN$$

- No tracciones en toda la sección. La fibra en la cual podemos encontrar las máximas tracciones es la fibra inferior: $x_3^{**} = -0{,}7164\,m$

$$-18{,}915 + 27{,}627 \cdot (-0{,}2674) - 25{,}601 \times 10^{-3} F \cdot (-0{,}7164) \le 0$$

$$F \le 1434 \ kN$$

La condición más restrictiva es la que nos da la fuerza más pequeña.

$$F = 1434 \ kN$$

La distribución de tensiones final será:

$$\sigma_a = 1608{,}515 + 126{,}246 \times 1434 \times 10^{-3} = 1769{,}54 \ MPa$$

$$\sigma_h = 18{,}915 + 27{,}627x_3^{*} - 36{,}7118x_3^{**}$$

$x_3^{**} = 0,4836\, m$ $\sigma_D = -17,7538\, MPa$

$x_3^{**} = 0,2836\, m$ $\sigma_A = -9,087\, MPa$

$x_3^{**} = -0,5164\, m$ $\sigma_B = -1,819\, MPa$

$x_3^{**} = -0,7164\, m$ $\sigma_C = 0$

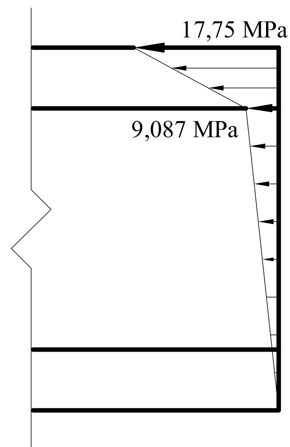


Fig. 6 distribución de tensiones final

Problema 4.37 *En la sección que se indica en la figura 1, hallar el lugar geométrico de los puntos sobre los que puede actuar un esfuerzo axil de compresión N para que todas las correspondientes fibras neutras pasen por A.*

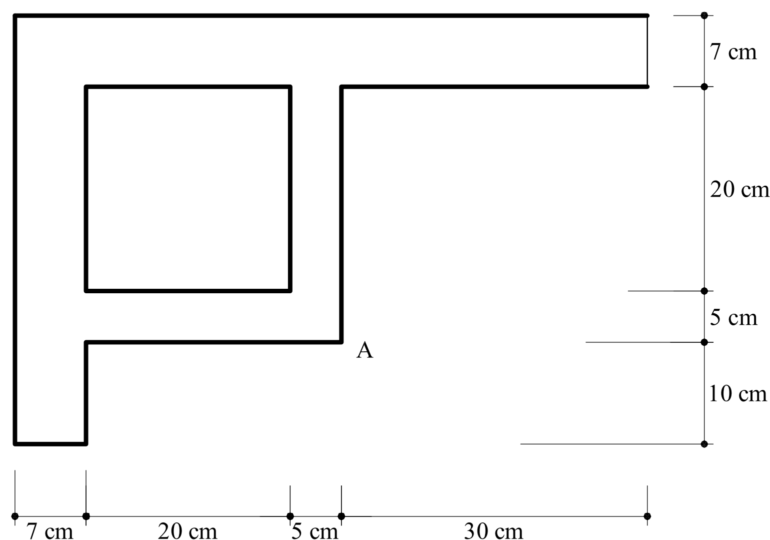


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 4.37

Solución

En la figura 2 puede verse la disposición del centro de gravedad.

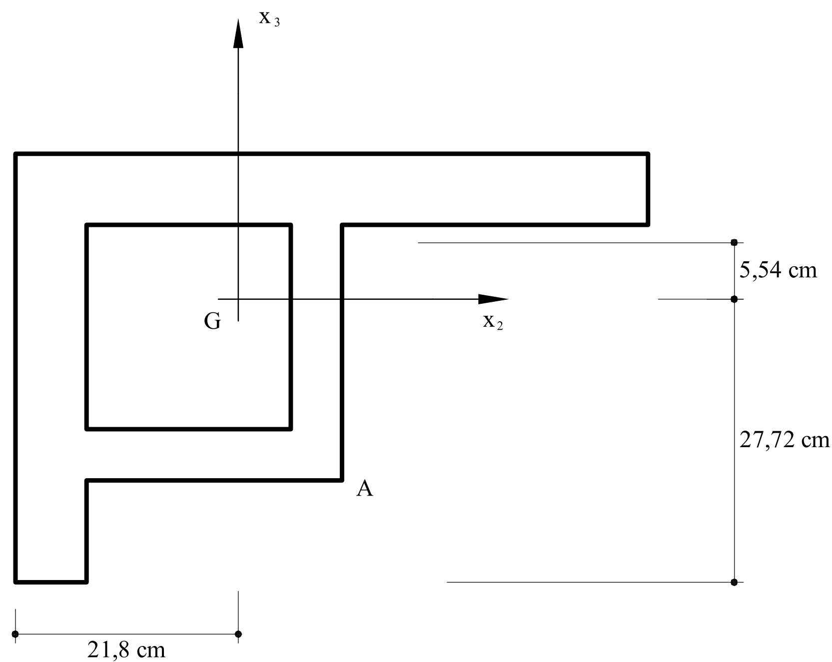


Fig.2 Ejes coordenadas y posición del centro de gravedad

El área de la sección vale: $A = 904\ cm^2$, y los momentos de inercia:

$I_2 = 136.283{,}85\ cm^4$

$I_3 = 272.115{,}9\ cm^4$

$I_{23} = 91.145{,}1\ cm^4$

Los radios de giro valdrán:

$$r_2^2 = \frac{I_2}{A} = 150{,}756\ cm^2$$

$$r_3^2 = \frac{I_3}{A} = 301{,}013\ cm^2$$

$$r_{23}^2 = \frac{I_{23}}{A} = 100{,}824\ cm^2$$

$$r_2^2\, r_3^2 - r_{23}^4 = 35.214\ cm^4$$

La ecuación de la fibra neutra se escribe

$$1 + \frac{e_2\, r_2^2 - e_3\, r_{23}^2}{r_2^2\, r_3^2 - r_{23}^4} x_2 + \frac{e_3\, r_3^2 - e_2\, r_{23}^2}{r_2^2\, r_3^2 - r_{23}^4} x_3 = 0$$

Es decir:

$$1 + \frac{150{,}756 e_2 - 100{,}824 e_3}{35214} x_2 + \frac{301{,}013 e_3 - 100{,}824 e_2}{35214} x_3 = 0$$

Cuando un haz de fibras neutras pasa por A, los correspondientes centros de presiones estarán sobre una recta. Pueden hallarse dos puntos de esta recta hallando los centros de presiones correspondientes a una fibra neutra horizontal y a otra vertical que pasen por A:

- *Ecuación de la fibra neutra horizontal que pasa por A:*

  $$1 + \frac{x_3}{27{,}72 - 10} = 0$$

  con lo cual, identificando coeficientes:

  $$150{,}756 e_2 - 100{,}824 e_3 = 0$$

  $$\frac{301{,}013 e_3 - 100{,}824 e_2}{35214} = \frac{1}{27{,}72 - 10}$$

  Resolviendo el sistema:

  $$e_2 = 5{,}69\ cm \qquad e_3 = 8{,}51\ cm$$

- *Ecuación de la fibra neutra vertical que pasa por A:*

  $$1 + \frac{x_2}{21{,}8 - 32} = 0$$

Identificando nuevamente coeficientes

$$\frac{150{,}756\, e_2 - 100{,}824\, e_3}{35214} = \frac{1}{21{,}8 - 32}$$

$$301{,}013\, e_3 - 100{,}824\, e_2 = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$e_2 = -29{,}51\, cm \qquad e_3 = -9{,}88\, cm$$

con lo cual, la ecuación de la recta que pasa por las dos excentricidades halladas será (fig.3)

$$x_3 = 0{,}522\, x_2 + 5{,}54$$

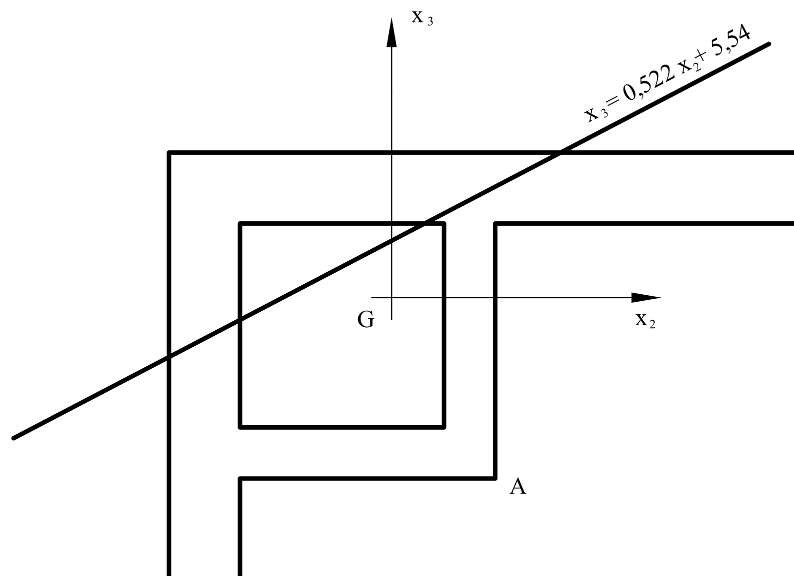


Fig.3 Lugargeométrico del centro de presiones

Problema 4.38 *La sección que se representa en la figura 1 es de hormigón pretensado. La tensión de pretensado en los cables de acero vale* $\sigma_p^a = 1200\ MPa$ *. Hallar la distribución de tensiones en el hormigón debidas al pretensado. La sección* ω *vale* $\omega = 0{,}5\ cm^2$ *.*

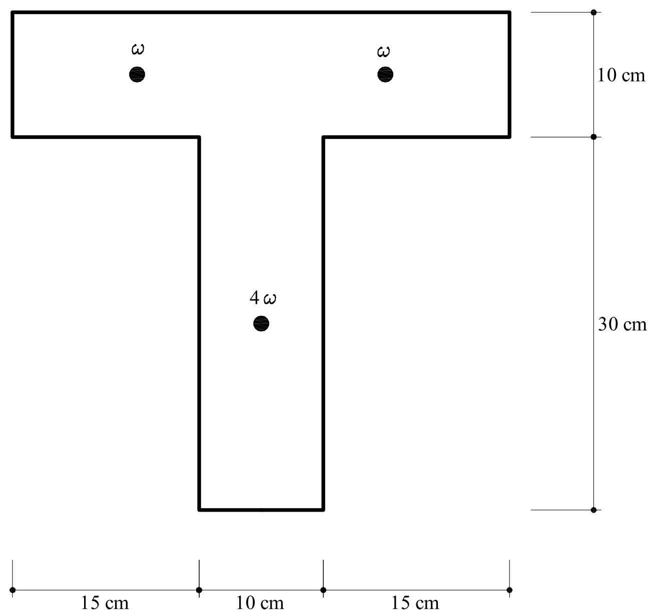


Fig.1 Sección correspondiente al problema 4.38

Solución

En la figura 2 se representa el sistema de ejes adoptado así como el centro de gravedad mecánico.

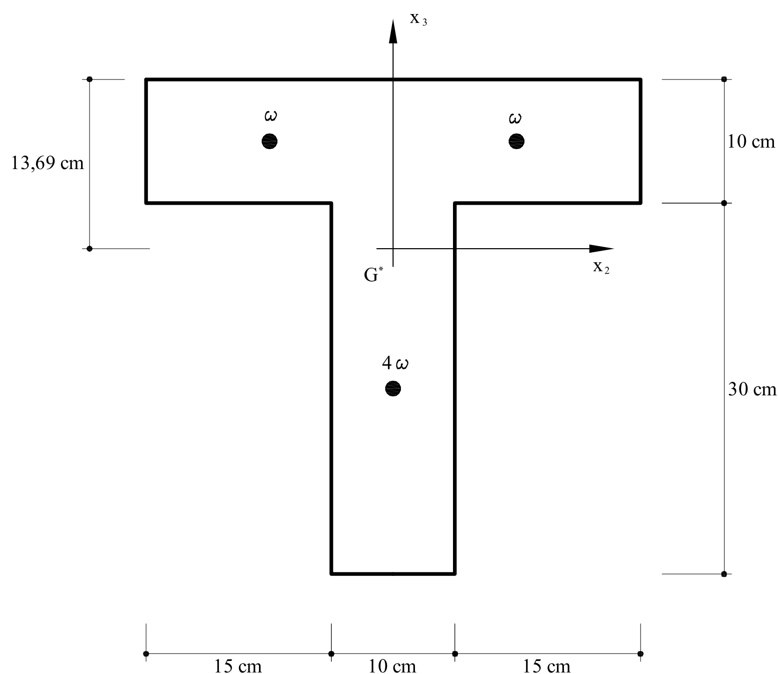


Fig.2 Sistema de ejes y centro de gravedad mecánico

El área mecánica vale

$$A^* = 718\ cm^2$$

siendo el valor del momento de inercia mecánico respecto a un eje horizontal que pasa por el centro de gravedad:

$$I^* = 96.402{,}7\ cm^4$$

Las tensiones de pretensado en el acero valen $\sigma_p^a = 1200\ MPa$, con lo cual, la fuerza de pretensado en cada cable vale:

- Cables superiores

$$F_s = 1200\ MPa \times 0{,}5\ cm^2 = 60\ kN$$

- Cables inferiores

$$F_i = 1200\ MPa \times 2\ cm^2 = 240\ kN$$

Cuando se cortan los cables de pretensado, la sección mixta está sometida a dos fuerzas F_s situadas donde los dos cables del ala superior y una fuerza F_i en el cable del alma, con lo cual la sección está sometida a un esfuerzo axil de valor

$$N = -(2F_s + F_i) = -2\times 60 - 240 = -360\ kN$$

y a un momento flector

$$M_{f2} = -2F_s \times (0{,}1369 - 0{,}05) + F_i \times (0{,}25 - 0{,}1369) = -2\times 60\times 0{,}0869 + 240\times 0{,}1131 = \\ = 16{,}716\, kNm$$

Las tensiones en la fibra superior valdrán

$$\sigma_1 = \frac{N}{A^*} + \frac{M_{f2}}{I^*}(x_3)_1 = -\frac{360\, kN}{718\, cm^2} + \frac{16{,}716\, kNm \times 13{,}69\, cm}{96402{,}7\, cm^4} = -2{,}64\, MPa \quad (compresión)$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{A^*} + \frac{M_{f2}}{I^*}(x_3)_2 = -\frac{360\, kN}{718\, cm^2} - \frac{16{,}716\, kNm \times 26{,}31\, cm}{96402{,}7\, cm^4} = -9{,}576\, MPa \quad (compresión)$$

En la figura 2 puede verse representada la distribución de tensiones normales en el hormigón a lo largo del eje x_3.

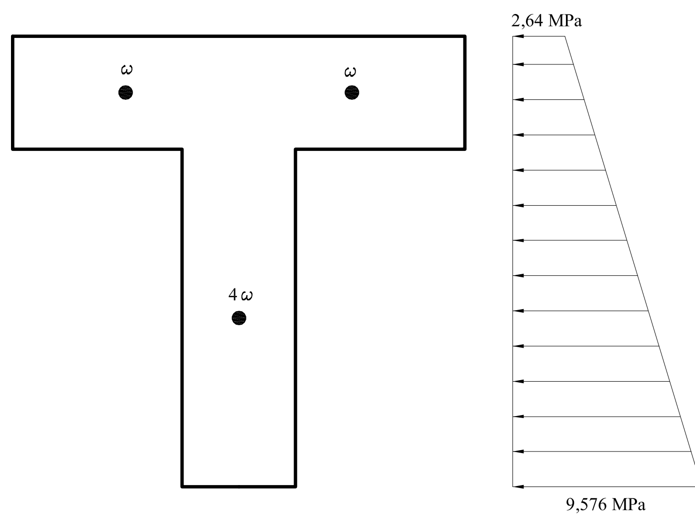


Fig.3 Distribución de tensiones en el hormigón

Problema 4.39 *En la sección de paredes delgadas que se representa en la figura 1 actúa en el punto A un esfuerzo axil de tracción N. El espesor de las paredes es constante e igual a 1 cm. Se desea conocer el valor de N para que las máximas tensiones no sobrepasen los* $300\ MPa$. *Hallar asimismo la fibra neutra.*

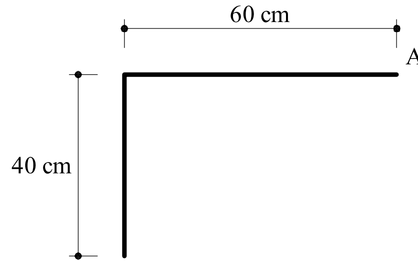


Fig.1 Sección correspondiente al problema 4.39

Solución

En la figura 2 puede verse la posición del centro de gravedad así como los ejes adoptados.

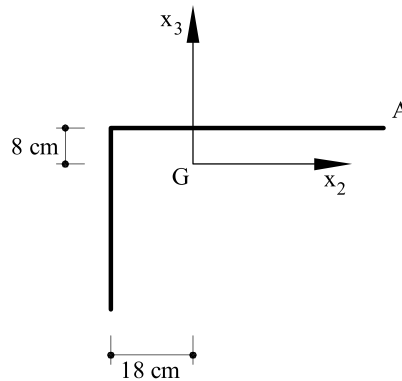


Fig.2 Ejes y posición del centro de gravedad

El área vale $A = 100\ cm^2$. Los momentos de inercia valen:

$$I_2 = 14.933{,}3\ cm^4$$
$$I_3 = 39.600\ cm^4$$
$$I_{23} = 14.400\ cm^4$$

La expresión de las tensiones se escriben

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{N}{\Delta}\left[e_3\left(x_3\, I_3 - x_2\, I_{23}\right) - e_2\left(x_3\, I_{23} - x_2\, I_2\right)\right]$$

siendo $\Delta = I_2\, I_3 - I_{23}^2 = 3{,}84 \times 10^8\ cm^4$

y las excentricidades

$$e_2 = 42\, cm$$

$$e_3 = 8\,cm$$

Tomando como unidades el kN y el cm, la distribución de tensiones valdrá:

$$\sigma = \frac{N}{100} + \frac{N}{3{,}84 \times 10^8}\left[8 \times (39.600\,x_3 - 14.400\,x_2) - 42 \times (14.400\,x_3 - 14.933{,}3\,x_2)\right]$$

Es decir:

$$\sigma = \frac{N}{100}(1 + 0{,}075\,x_3 + 0{,}133\,x_2)$$

La fibra neutra se obtendrá igualando a cero la expresión anterior:

$$1 + 0{,}075\,x_3 + 0{,}133\,x_2 = 0$$

En la figura 3 puede verse representada la fibra neutra

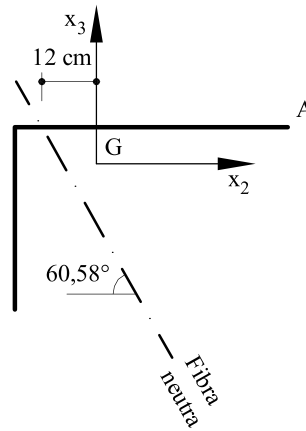


Fig.3 Posición de la fibra neutra

Las máximas tensiones se producen en A, con lo cual:

$$\sigma_A = \sigma_{\max} = \frac{N}{100}(1 + 0{,}075 \times 8 + 0{,}133 \times 42) = 0{,}07186\,N$$

y como $\sigma_{\max} = 300\,MPa = 30\,kN/cm^2$, igualando

$$N = 417{,}5\,kN$$

Problema 4.40 *En la sección que se representa en la figura 1 actúa un esfuerzo axil de compresión N. Determinar el valor de N y su posición respecto a unos ejes que pasen por el centro de gravedad si:*

- *La fibra neutra es la recta* $f - f'$ *cuya pendiente es 0,5*
- *Las tensiones de compresión en el punto* A *valen* $21 MPa$

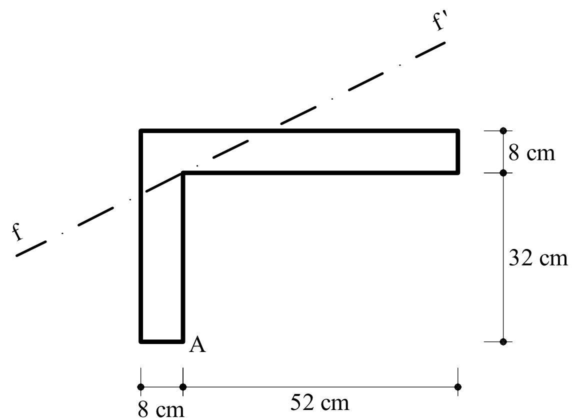


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 4.40

Solución

En la figura 2 puede observarse la posición del centro de gravedad así como los ejes adoptados.

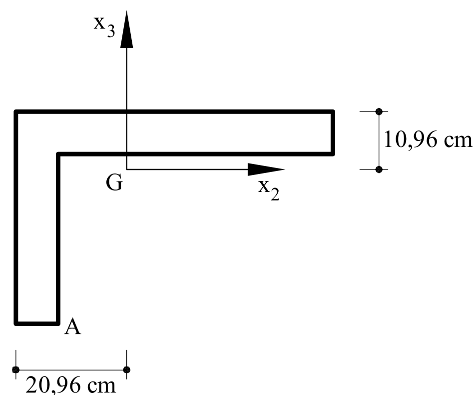


Fig. 2 Centro de gravedad y ejes adoptados

El área de la sección y los momentos de inercia valen:

$$A = 736 cm^2$$
$$I_2 = 91.188 cm^4$$
$$I_3 = 258.228 cm^4$$
$$I_{23} = 86.817 cm^4$$

y los radios de giro:

$$r_2^2 = \frac{91.118}{736} = 123,8\,cm^2$$

$$r_3^2 = \frac{258.228}{736} = 350,9\,cm^2$$

$$r_{23}^2 = \frac{86.817}{736} = 117,96\,cm^2$$

$$r = r_2^2\, r_3^2 - r_{23}^4 = 31.205,6\,cm^4$$

La ecuación de la fibra neutra propuesta $f - f'$ es:

$$x_3 = 0,5\,x_2 + 10,74$$

y normalizando:

$$1 + 0,053\,x_2 - 0,106\,x_3 = 0$$

Por otro lado, la expresión de la fibra neutra debida a un esfuerzo axil de compresión vale:

$$1 + \frac{e_2\, r_2^2 - e_3\, r_{23}^2}{r}\, x_2 + \frac{e_3\, r_3^2 - e_2\, r_{23}^2}{r}\, x_3 = 0$$

Siendo e_2 y e_3 las excentricidades del esfuerzo *N*, es decir, las coordenadas del punto en donde actúa el esfuerzo respecto a los ejes de la figura 2. Es decir,

$$1 + \frac{123,8\,e_2 - 117,96\,e_3}{31205,6}\, x_2 + \frac{350,9\,e_3 - 117,96\,e_2}{31205,6}\, x_3 = 0$$

E identificando coeficientes se obtiene el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\frac{123,8\,e_2 - 117,96\,e_3}{31205,6} = 0,053$$

$$\frac{-117,96\,e_2 + 350,9\,e_3}{31205,6} = -0,106$$

y resolviendo:

$$e_2 = -6,89\,cm \qquad\qquad e_3 = 6,1\,cm$$

Las tensiones en cualquier punto valdrán:

$$\sigma = \frac{N}{A}\left(1 + 0,053\,x_2 - 0,106\,x_3\right)$$

y particularizando para el punto A de coordenadas:

$$x_{2A} = -12{,}96\,cm$$

$$x_{3A} = -29{,}04\,cm$$

$$\sigma = \frac{N}{736}\left(1 - 0{,}053 \times 12{,}96 + 0{,}106 \times 29{,}04\right) = 0{,}00461\,N$$

y como $\sigma = 21MPa$, resulta que *N* vale

$$N = 455{,}75\,kN$$

Problema 4.41 *Se desea pretensar la viga recta de 35 metros de luz y sección que muestra la figura 1.*

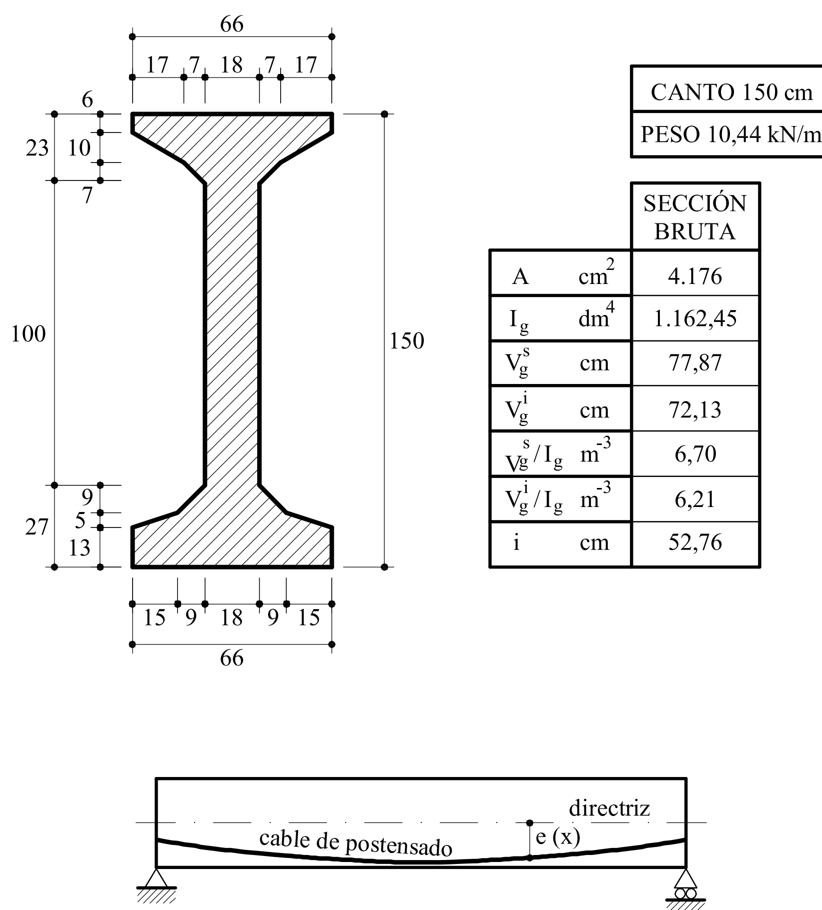
El postensado será curvo, de tal forma que, actuando el peso propio y el postensado, las tensiones en todas las fibras superiores sean nulas y la tensión de compresión máxima en la sección central sea de 35 MPa (n = 10).

Hallar:

a) Trazado del cable y esfuerzo de postensado que tendrá la viga.
b) Área del cable, si para esta fase las tensiones máximas en el acero valen 1200 MPa.
c) A continuación se inyecta la vaina de forma que haya adherencia perfecta entre el hormigón y el acero. Se carga la viga con una carga uniformemente repartida de valor p kN / m. Calcular el valor de p de forma que:

c.1) En la sección central en el hormigón no existan tracciones.
c.2) En la sección central las máximas tensiones de compresión en el hormigón no sobrepasen 35 MPa.
c.3) En la sección central las máximas tensiones en el acero no sobrepasen 1700 MPa.

d) Distribución de tensiones normales en la sección central.



		SECCIÓN BRUTA
A	cm^2	4.176
I_g	dm^4	1.162,45
V_g^s	cm	77,87
V_g^i	cm	72,13
V_g^s/I_g	m^{-3}	6,70
V_g^i/I_g	m^{-3}	6,21
i	cm	52,76

Fig. 1 Sección y viga correspondiente al problema 4.41

Solución

El peso propio es una carga uniformemente repartida que nos dará la ley de momentos flectores:

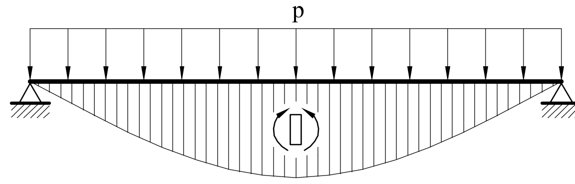


Fig. 2 Ley de momentos flectores debida al peso propio

$$M_f(x) = \frac{PL}{2}x - \frac{1}{2}p\,x^2 = \frac{10{,}44 \cdot 35}{2}x - \frac{1}{2} \cdot 10{,}44 \cdot x^2 = 182{,}7x - 5{,}22\,x^2$$

En el postensado la ley de momentos flectores será (figura 3):

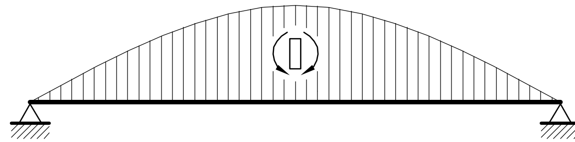


Fig. 3 Ley de momentos flectores debida al postensado

$$M_f = -T \cdot e(x)$$

La distribución de tensiones será función de la sección de la viga en que nos situemos y de la altura respecto al centro de gravedad.

$$\sigma_h(x) = -\frac{T}{A_h} - \frac{182{,}7\,x - 5{,}22\,x^2}{I_x}\left(y - y_G(x)\right) + \frac{T \cdot e(x)}{I_x}\left(y - y_G(x)\right)$$

La inercia I_x debe ser función de la sección x, pero la superfície de la vaina es despreciable respecto a la de toda la sección, por este motivo se supone el momento de inercia I_x constante. Del mismo modo el centro de gravedad debe ser función de la sección, sin embargo se considerará constante a efectos de cálculo.

La tensión en todas las filas superiores debe ser cero:

$$\sigma_h^{\,s}(x) = -\frac{T}{4176 \times 10^{-4}} - \frac{182{,}7\,x - 5{,}22\,x^2}{1162{,}45 \times 10^{-4}} \cdot 0{,}7787 + \frac{T \cdot e(x)}{1162{,}45 \times 10^{-4}} \cdot 0{,}7787 = 0$$

De donde se obtiene la primera ecuación:

$$\sigma_h^{\,s}(x) = -2{,}3946\,T - 1223{,}83\,x + 34{,}96\,x^2 + 6{,}698 \cdot T \cdot e(x) = 0 \qquad (1)$$

La tensión de compresión máxima en la sección central no debe superar los 35 MPa:

$$\sigma_h^{\,i}(x) = -\frac{T}{4176 \times 10^{-4}} + \frac{182{,}7\,x - 5{,}22\,x^2}{1162{,}45 \times 10^{-4}} \cdot 0{,}7213 - \frac{T \cdot e(x)}{1162{,}45 \times 10^{-4}} \cdot 0{,}7213$$

$$\sigma_h^{\,i}(x) = -2{,}3946T + 1133{,}65x - 32{,}49x^2 - 6{,}205 \cdot T \cdot e(x)$$

$$\sigma_h^{\,i}(17{,}5) = -2{,}3946T + 1133{,}65 \cdot 17{,}5 - 32{,}49 \cdot 17{,}5^2 - 6{,}205 \cdot T \cdot e_0 > -35000 \frac{kN}{m^2}$$

La segunda ecuación del sistema será:

$$-2{,}3946T - 6{,}205 \cdot T \cdot e_0 > -44919{,}43 \qquad (2)$$

Resolviendo: $T < 7586{,}98\,kN$

El trazado del cable será: $e(x) = 0{,}3575 + 0{,}0240\,x - 6{,}88 \times 10^{-4}\,x^2$

b) La tensión de postensado del cable debe ser menor a 1200 MPa.

$$\sigma_a = \frac{T}{A_a} \leq 1\,200 \times 10^3$$

De donde se obtiene $A_a = 6{,}32 \times 10^{-3}\,m^2$

c) Se inyecta hormigón a la vaina, de modo que la adherencia es perfecta y la sección se convierte en mixta.
Características mecánicas de la sección central:

$$e(17{,}5) = e_0 = 0{,}5662\,m$$

$$y_G^{\,*} = \frac{72{,}13 \cdot (4176 - 63{,}2) + (72{,}13 - 56{,}94) \cdot 63{,}2 \cdot n}{(4176 - 63{,}2) + 63{,}2 \cdot n} = 64{,}56\,cm = 0{,}6456\,m$$

$$I^* = \left[1162{,}45 \times 10^4 + (4176 - 63{,}2) \times (72{,}13 - 64{,}56)^2\right] +$$
$$+ \left[\frac{\pi R^4}{4} + 63{,}2(15{,}19 - 64{,}56)^2\right] \cdot n = 13398913{,}53\,cm^4 = 0{,}13398\,m^4$$

La viga se carga con una carga uniformemente repartida de valor p que nos dará la ley de momentos flectores:

$$M_f = \frac{pL}{2}x - \frac{1}{2}p\,x^2$$

La cual, en la sección central toma el valor $M_f(17{,}5) = 153{,}125\,p\,kNm$

- Si existen tracciones en la sección, las máximas se producirán en la fibra inferior

$$x_3 = -0{,}6456\,m$$

$$\sigma_f = -\frac{153{,}125\,p \cdot (-0{,}6456)}{0{,}13398} \leq 35 \times 10^3 \,\frac{kN}{m^2}$$

$$p \leq 47{,}43 \frac{kN}{m}$$

- Las máximas compresiones en la sección central se hallan en la fibra superior:

$$x_3 = 0{,}8544\,m$$

$$\sigma_f = \frac{-153{,}125\,p \cdot 0{,}8544}{0{,}13398} \geq -35 \times 10^3 \,\frac{kN}{m^2}$$

$$p \leq 35{,}84\,kN/m$$

- Las máximas tensiones en el acero no deben superar los 1700 MPa. Inicialmente el acero tiene una tracción de 1200 MPa, por lo cual no puede aumentar más de 500 MPa de tracción.

$$\sigma_a = \frac{-153{,}125 \cdot p \cdot (-0{,}4937)}{0{,}13398} \cdot n \leq 500 \times 10^3 \,\frac{kN}{m^2}$$

$$p \leq 88{,}614\,kN/m$$

La condición más restrictiva es aquella que nos da una carga uniformemente repartida menor: $p \leq 35{,}84\,kN/m$

d) La distribución de tensiones en la sección central se indica en la figura 4.

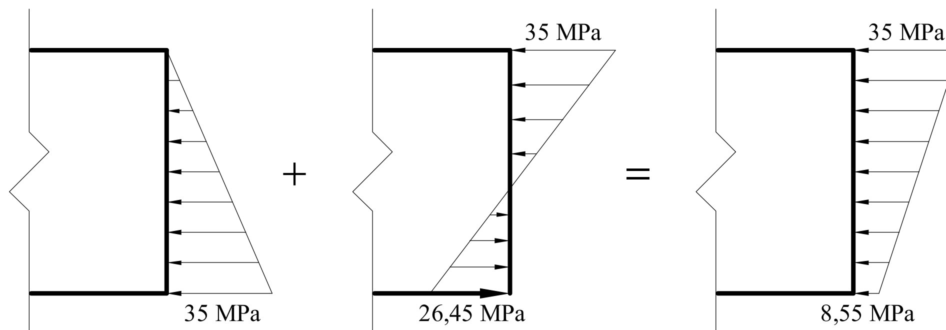


Fig. 4 Distribución de tensiones

Problema 4.42 *Hallar y dibujar el núcleo central de la sección de paredes delgadas de la figura 1. Todas las paredes tienen el mismo espesor: 1 cm.*

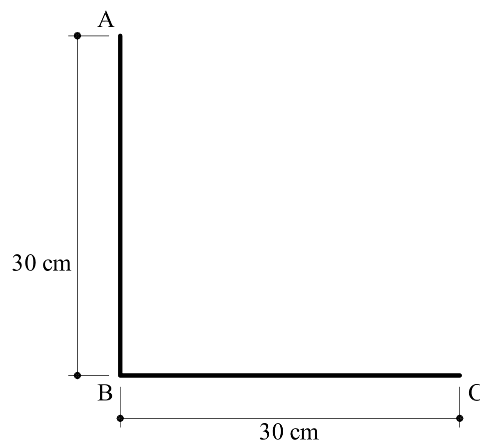


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 4.42

Solución

Las propiedades mecánicas de la sección valen:

- *Centro de gravedad*

  $x_{3g} = 7{,}5\ cm.$ $\qquad$ $x_{2g} = x_{3g}$

- *Momentos de inercia y radios de giro*

$$I_2 = I_3 = 5625\, cm^4 \qquad I_{23} = -3375\, cm^4$$
$$\hat{I}_2 = 9000\, cm^4 \qquad \hat{I}_3 = 2250\, cm^4$$
$$\hat{r}_2^2 = 150\, cm^2 \qquad \hat{r}_3^2 = 37{,}5\, cm^2$$

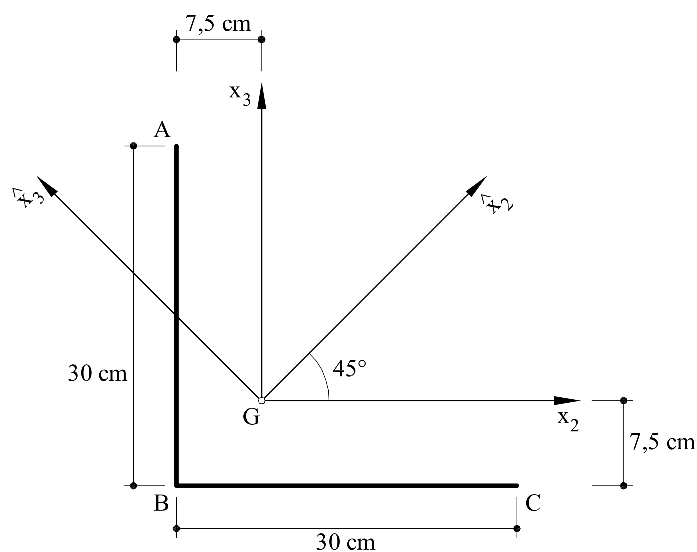


Fig. 2 Centro de gravedad y ejes principales de inercia

La ecuación de la fibra neutra se escribe

$$0 = 1 + \frac{\hat{e}_3\ \hat{x}_3}{\hat{r}_2^2} + \frac{\hat{e}_2\ \hat{x}_2}{\hat{r}_3^2}$$

es decir

$$0 = 1 + \frac{\hat{e}_3}{150}\hat{x}_3 + \frac{\hat{e}_2}{37,5}\hat{x}_2$$

Para determinar el núcleo central se rodea la sección con las rectas envolventes, determinándose los centros de presiones correspondientes a cada una de ellas. En este caso, se tendrá que determinar el centro de presiones correspondiente a las rectas *AB, BC* y *AC*.

- *Recta AB*
  La ecuación de la recta *AB* se escribe

  $$0 = 1 - 0,0943\,\hat{x}_3 + 0,0943\,\hat{x}_2$$

  e identificando términos con la ecuación de la fibra neutra

  $$\hat{e}_2 = 0,0943 \times 37,5 = 3,54\,cm$$
  $$\hat{e}_3 = -0,0943 \times 150 = -14,14\,cm$$

  y dado que la relación entre las excentricidades repecto a los ejes principales y los ejes x_2 , x_3 se escribe

  $$\begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45 & -\sin 45 \\ \sin 45 & \cos 45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{bmatrix}$$

  Sustituyendo valores

  $e_2 = 12,50\,cm$ $\qquad$ $e_3 = -7,5\,cm$

- *Recta BC*
  Por simetría respecto al eje $\hat{x}_2$

  $e_2 = -7,5\ cm$ $\qquad$ $e_3 = 12,5\ cm$

- *Recta AC*
  La ecuación de la recta *AC* se escribirá

  $$0 = 1 - 0 \times \hat{x}_3 - 0,0943\,\hat{x}_2$$

  e identificando términos con la ecuación de la fibra neutra

$\hat{e}_3 = 0$ $\hat{e}_2 = -3{,}54\ cm$

y también

$e_2 = -2{,}5\,cm$ $e_3 = -2{,}5\,cm$

En la figura 3 puede verse representado el núcleo central

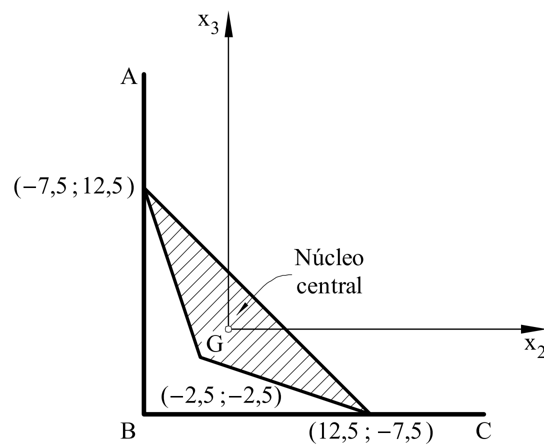


Fig. 3 Núcleo central

Problema 4.43 *En el soporte de hormigón cuya sección se representa en la figura 1.*

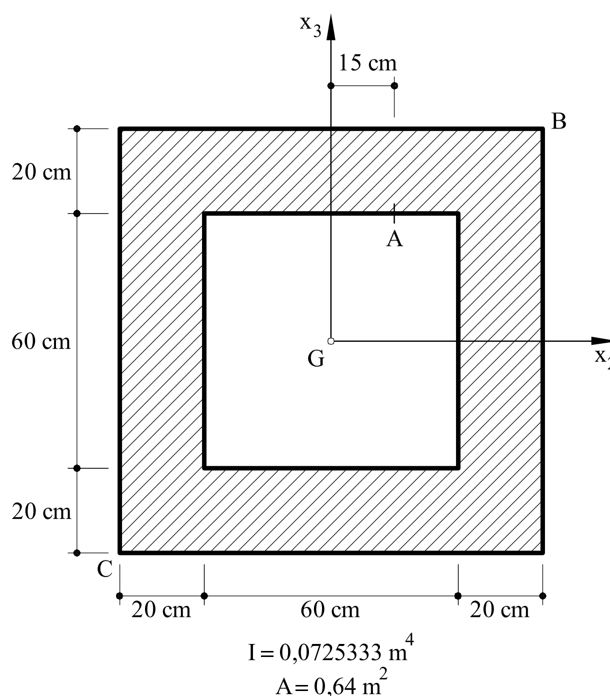


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 4.43

SE PIDE:

1. *Hallar y dibujar el núcleo central.*
2. *Máximas tracciones de tracción y compresión, cuando en el punto A actúa una fuerza P normal a la sección y de valor* $P = 2.500\ kN$.
3. *Área de aplicación de una fuerza N, para que se cumpla que* $\dfrac{\sigma_m}{\sigma'_m} \leq 4$

Siendo:

σ_m *módulo de la máxima tensión a compresión.*

σ'_m *módulo de la máxima tensión a tracción.*

Solución

1. Para obtener el núcleo central, habida cuenta de las simetrías, será suficiente obtener únicamente un punto, por ejemplo el que corresponde a la fibra neutra coincidente con la fibra inferior de la sección.

$$\sigma = N\left(1 + \frac{e_3 x_3^0}{r_2^2}\right) = 0$$

Sustituyendo

$$x_3^0 = -50\ cm = -0{,}5\ m$$

$$r_2^2 = \frac{I_2}{A} = \frac{0{,}0725333\ m^4}{0{,}64\ m^2} = 0{,}113333\ m^2$$

$$e_3 = 0{,}2265\ m = 22{,}65\,cm$$

En la figura 2 puede verse representado el núcleo central

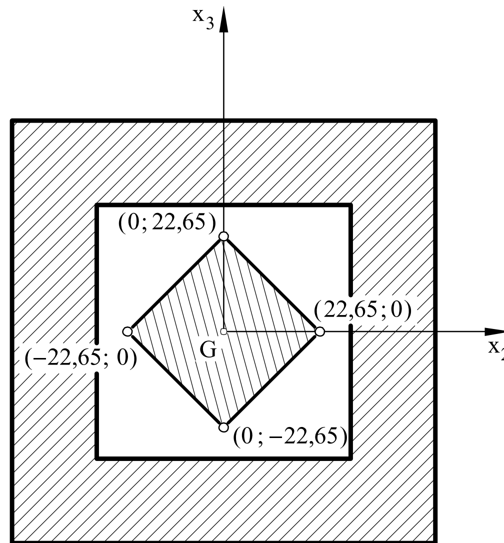


Fig. 2 Núcleo central

2. Cuando una fuerza *P* actúa en *A*, las excentridades valen

$e_2 = 0{,}15\ m$ $\qquad\qquad$ $e_3 = 0{,}30\ m$

Las máximas tensiones de compresión se producirán en el punto *B* y las máximas de tracción en el punto *C*.

$$\sigma_B = \frac{-2500\ kN}{0{,}64\ m^2} + \frac{-2500\ kN \times 0{,}30\ m}{0{,}0725333\ m^4} \times 0{,}5\ m + \frac{-2500\ kN \times 0{,}15\ m}{0{,}0725333\ m^4} \times 0{,}5\ m =$$
$$= -11{,}661\ MPa \quad (compresión)$$

$$\sigma_C = \frac{-2500\ kN}{0{,}64\ m^2} + \frac{-2500\ kN \times 0{,}3\ m}{0{,}0725333} \times (-0{,}5) m + \frac{-2500\ kN \times 0{,}15\ m}{0{,}0725333\ m^4} \times (-0{,}5\ m) = 3{,}85\ MPa\ (tracción)$$

3. El área de aplicación de la fuerza *N* será un cuadrado con los cuatro vértices situados en los ejes coordenados. Bastará obtener un punto *R* (figura 3).

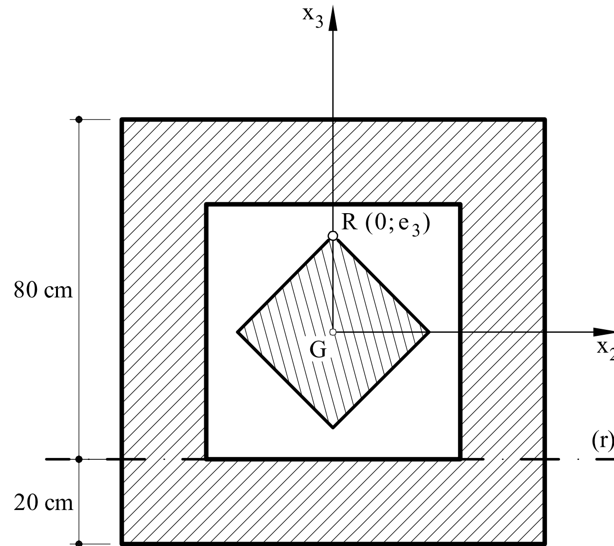


Fig. 3 Área de aplicación de N

La fibra neutra (r) deberá estar situada tal como indica la figura 3 si se quiere garantizar que la relación entre las máximas tensiones de compresión y de tracción valga 4.

Las tensiones en la fibra superior valdrán

$$|\sigma_m| = \frac{N}{A} + \frac{N e_3}{I_2} x_3 = \frac{N}{A}\left[1 + \frac{e_3}{0{,}113333} \times 0{,}5\right]$$

Las tensiones en la fibra inferior valen

$$|\sigma'_m| = -\frac{N}{A} + \frac{N e_3}{I_2} x_3 = \frac{N}{A}\left[-1 + \frac{e_3}{0{,}113333} \times 0{,}5\right]$$

y como $\dfrac{|\sigma_m|}{|\sigma'_m|} = 4$

resulta que $e_3 = 0{,}378\ m = 37{,}8\ cm$

Problema 4.44 *En la sección de paredes delgadas de la figura 1 (las dimensiones están dadas en centímetros) las paredes horizontales tienen un espesor de 1 cm y las verticales de 0,6 cm. Determinar:*

- *Valor de x para que cuando actúe un momento flector situado en un plano vertical las máximas tracciones sean iguales a las máximas compresiones.*
- *Núcleo central de la sección.*

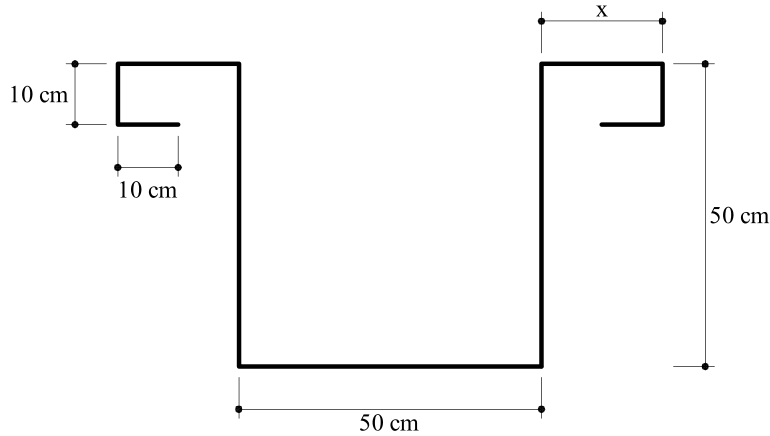


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 4.44

Solución

Para que las máximas tensiones sean iguales a las máximas compresiones, es preciso que el centro de gravedad de la sección esté situado en la mitad del centro, es decir

$$x = 14{,}2 \ cm$$

Con este valor, los momentos de inercia repecto a un eje horizontal y vertical respectivamente valen

$$I_2 = 70.900 \ cm^4$$
$$I_3 = 119.657 \ cm^4$$

y el área

$$A = 170{,}4 \ cm^2$$

Los radios de giro valen

$$r_2^2 = \frac{I_2}{A} = 416{,}1 \ cm^2$$
$$r_3^2 = \frac{I_3}{A} = 702{,}2 \ cm^2$$

Para determinar el núcleo central se envuelve la sección mediante rectas que serán fibras neutras. Por otro lado, la ecuación de cada fibra neutra viene dada por

$$1+\frac{e_3}{r_2^2}x_3+\frac{e_2}{r_3^2}x_2=0$$

es decir

$$1+\frac{e_3}{416{,}1}x_3+\frac{e_2}{702{,}2}x_2=0$$

a) *Recta (1) como fibra neutra*
La ecuación de la recta (1) es

$$1+\frac{x_3}{25}=0$$

Identificando términos

$$\frac{e_3}{416{,}1}=\frac{1}{25}$$

Es decir

$e_3 = 16{,}64\ cm$ $\qquad$ $e_2 = 0\ cm$

b) *Recta (2) como fibra neutra*
La ecuación de la recta (2) es

$$1+\frac{x_3}{95{,}42}-\frac{2{,}82\,x_2}{95{,}42}=0$$

Identificando términos

$$\frac{e_3}{416{,}1}=\frac{1}{95{,}42} \qquad \frac{e_2}{702{,}2}=-\frac{2{,}82}{95{,}42}$$

con lo cual

$e_3 = 4{,}36\ cm$ $\qquad$ $e_2 = -\ 20{,}75\ cm$

c) *Recta (3) como fibra neutra*
La ecuación de la recta (3) se escribe

$$1-\frac{x_2}{39{,}2}=0$$

Identificando términos:

$$\frac{e_2}{702{,}2}=-\frac{1}{39{,}2}$$

con lo cual

$e_3 = 0$ $e_2 = -17{,}91\ cm$

d) Recta (4) como fibra neutra

La ecuación de la recta (4) se escribe

$$1 - \frac{x_3}{25} = 0$$

con lo que, identificando términos se obtiene

$e_3 = -16{,}64\ cm$ $e_2 = 0$

En la figura 2 puede verse representado el núcleo central.

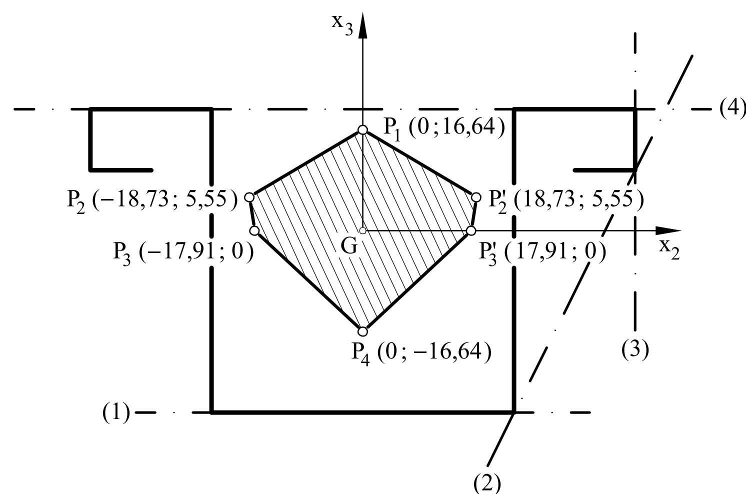


Fig. 2 Núcleo central

Problema 4.45 *Construir el núcleo central de las secciones representadas en la figura 1*

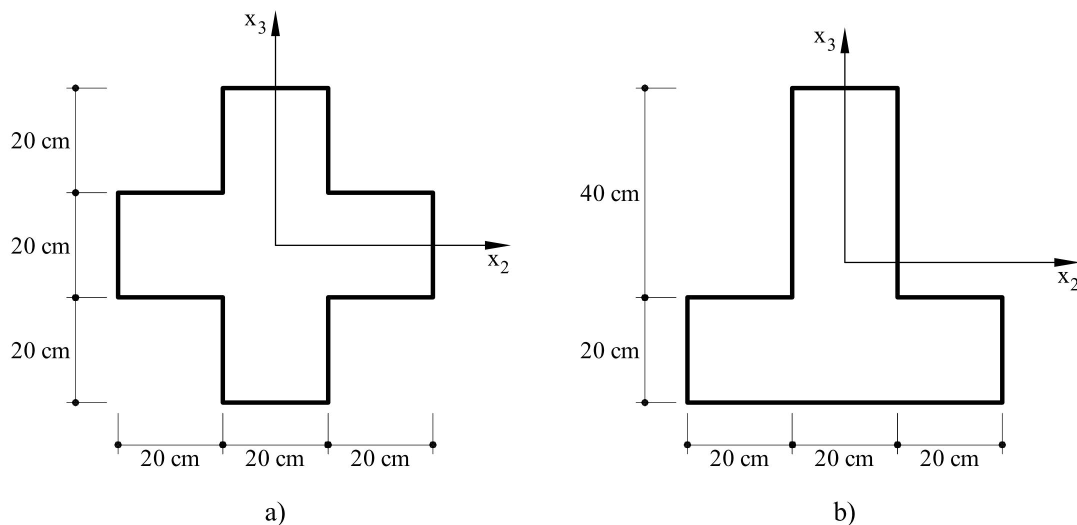


Fig. 1 Secciones correspondientes al problema 4.45

Solución

Sección a):

Las coordenadas de los vértices del núcleo central son:

$$(6{,}42\,;0) \qquad (-6{,}42\,;0) \qquad (0\,;6{,}42) \qquad (0\,;-6{,}42)$$
$$(4{,}8\,;4{,}8) \qquad (-4{,}8\,;4{,}8) \qquad (4{,}8\,;-4{,}8) \qquad (-4{,}8\,;-4{,}8)$$

Sección b)

Las coordenadas de los vértices del núcleo central son

$$(6{,}42\,;0) \qquad (-6{,}42\,;0) \qquad (6{,}78\,;5{,}16)$$
$$(-6{,}78\,;5{,}16) \qquad (0\,;13{,}56) \qquad (0\,;-7{,}86)$$

Capítulo 5:
Esfuerzo cortante

Problema 5.1 *Hallar la distribución de tensiones tangenciales en las dos secciones de la figura 1, cuando actúa un esfuerzo cortante de valor Q, vertical ascendente de valor Q=300 kN.*

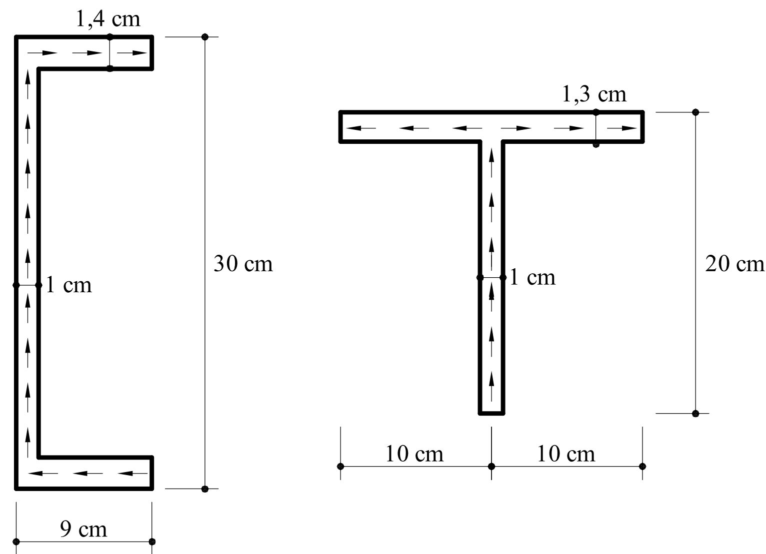


Fig.1 Secciones correspondientes al problema 5.1

Solución

1. Sección en U

El momento de inercia respecto a un eje horizontal que pasa por el centro de gravedad vale

$$I = 6816{,}33 \quad cm^4$$

La distribución de tensiones tangenciales viene dada por la expresión.

$$\tau = \frac{Q_3 m_{e2}}{e I_2}$$

Los valores de los momentos estáticos m_{e2} (de acuerdo con la nomenclatura de la figura 2) valen

$$m_{e2}\Big|_A^B = 1{,}4 \times 14{,}3\xi = 20{,}02\ \xi$$

$$m_{e2}\Big|_B^C = 20{,}02 \times 8{,}5 + 1 \times \xi \times \left(14{,}3 - \xi/2\right) = 170{,}17 + \xi\left(14{,}3 - \xi/2\right)$$

$$m_{e2}\Big|_C^D = 170{,}17 - 20{,}02\,\xi$$

con lo cual,

$$\tau\Big|_A^B = -\frac{300 \times 20{,}02\,\xi}{1{,}4 \times 6816{,}33} = -0{,}63\,\xi$$

$$\tau\Big|_B^C = -\frac{300\times\left[170{,}17+\xi\left(14{,}3-\xi/2\right)\right]}{1\times 6816{,}33} = -0{,}044\left[170{,}17+\xi\left(14{,}3-\xi/2\right)\right]$$

$$\tau\Big|_C^D = -\frac{300\times\left(170{,}17-20{,}02\,\xi\right)}{1{,}4\times 6816{,}33} = -0{,}03144\left(170{,}17-20{,}02\,\xi\right)$$

Fig.2 Distribución de tensiones tangenciales en la sección en U

2. Sección en T

El momento de inercia respecto a un eje horizontal que pasa por el centro de gravedad vale

$$I = 1642{,}2\,cm^4$$

La distribución de tensiones valdrá (ver figura 3)

$$\tau\Big|_A^B = \tau\Big|_B^C - \frac{300\times 1{,}3\times 4{,}13\,\xi}{1{,}3\times 1642{,}2} = -0{,}7545\,\xi$$

$$\tau\Big|_B^D = -\frac{300\times\left[1{,}3\times 20\times 4{,}13+\xi\left(4{,}13-\xi/2\right)\right]}{1\times 1642{,}2} = -0{,}182682\left[107{,}38+\xi\left(4{,}13-\xi/2\right)\right]$$

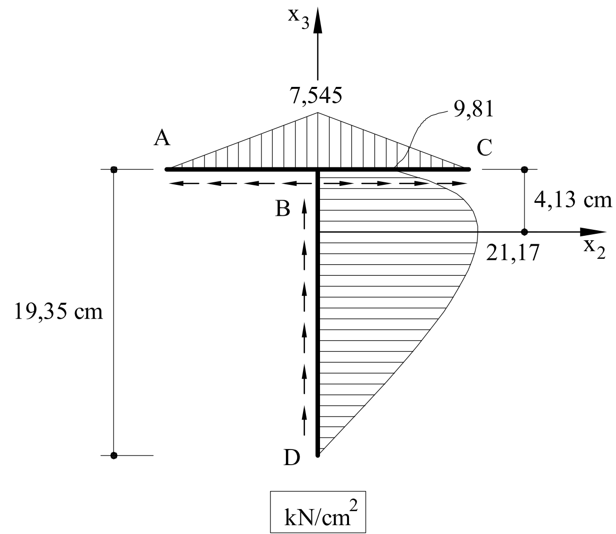


Fig.3 Distribución de tensiones en la sección en T

Problema 5.2 *La sección que se representa en la figura 1 es de paredes delgadas y espesor constante e. La longitud de cada una de las paredes es L. Entre sí forman un ángulo recto y cada una de ellas está inclinada 45º. Determinar, exclusivamente en función de e y L, la distribución de tensiones tangenciales y el valor de la sección reducida cuando actúa un esfuerzo cortante vertical.*

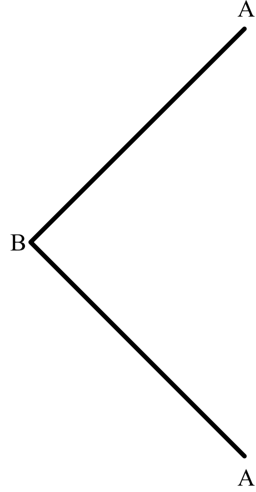


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 5.2

Solución

El momento de inercia respecto a un eje horizontal que pasa por el centro de gravedad vale

$$I = \frac{1}{3} e\, L^3$$

El momento estático en cualquier punto entre *A* y *B* vale

$$m_e(\xi)\Big|_A^B = e\, \xi\, \frac{\sqrt{2}}{4}(2L - \xi)$$

y entre *B* y *A'*

$$m_e(\xi)\Big|_{A'}^B = -e\, \xi\, \frac{\sqrt{2}}{4}(2L - \xi)$$

Cuando actúa un esfuerzo cortante vertical, la distribución de tensiones tangenciales vale (figura 2).

$$\tau = -\frac{Q\, m_e}{e\, I} = -\frac{Q\, e\, \xi\, \frac{\sqrt{2}}{4}(2L - \xi)}{e\, \frac{1}{3}\, e\, L^3} = -Q\frac{3\sqrt{2}}{4\, e\, L^3}(2L - \xi)\, \xi$$

La sección reducida viene dada por

$$kA = \frac{I^2}{\oint \frac{m_e^2}{e}\, d\xi} = \frac{\frac{1}{9} e^2\ L^6}{\frac{2}{e}\int_O^L \left[\frac{e\sqrt{2}}{4}\ \xi\left(2L-\xi\right)\right]^2\ d\xi} = \frac{5}{6}\, e\ L$$

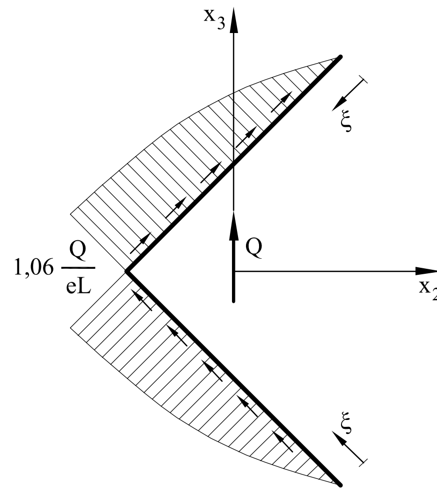


Fig. 2 Distribución de tensiones tangenciales

Problema 5.3 *En la sección de la figura 1 hallar la distribución de tensiones tangenciales producidas por un esfuerzo cortante vertical de valor* $Q = 250\ kN$ *. Hallar asimismo el valor de la sección reducida.*

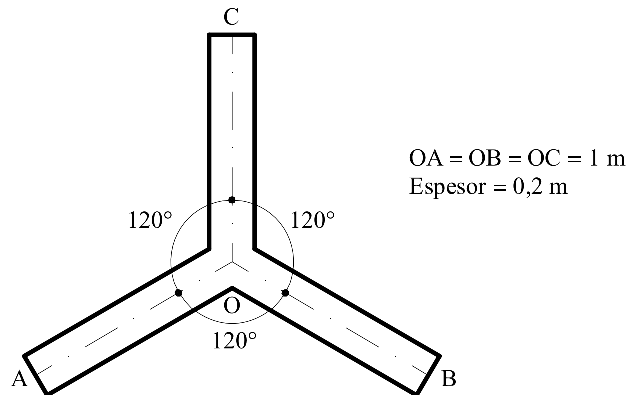


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 5.3

Solución

El momento de inercia respecto a cualquier eje que pasa por el c.d.g. vale

$$I = 0{,}1\ \ m^4$$

El esfuerzo cortante que actúa vale $Q = 250\ kN = 0{,}25\ MN$. La distribución de tensiones tangenciales valdrá (figura 2)

$$\tau\Big|_O^C = -\frac{Q\ m_{e2}}{e\ I} = -\frac{0{,}25 \times 0{,}2\ \xi\ (1 - \xi/2)}{0{,}2 \times 0{,}1} = -2{,}5\ \xi + 1{,}25\ \xi^2$$

$$\tau\Big|_A^O = \tau\Big|_B^O = \frac{0{,}25 \times 0{,}2\ \xi\ (1 - \xi/2) \sin 30}{0{,}2 \times 0{,}1} = 1{,}25\ \xi - 0{,}625\ \xi^2$$

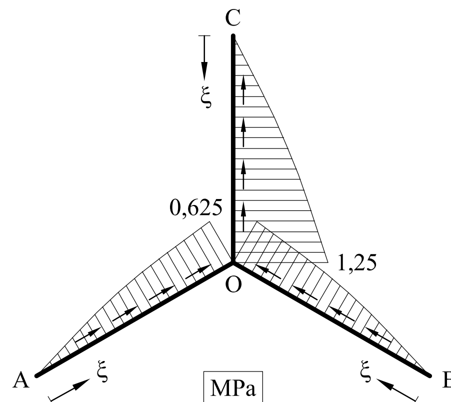


Fig. 2 Distribución de tensiones tangenciales

La sección reducida se obtiene a partir de

$$kA = \frac{I^2}{\int \frac{m_e^2}{e}\, d\xi} = \frac{Q^2}{\int \tau^2 e\, d\xi}$$

$$\int \tau^2 e\, d\xi = \int_0^1 \left(-2{,}5\,\xi + 1{,}25\,\xi^2\right)^2 \times 0{,}2\, d\xi + 2\int_0^1 \left(1{,}25\,\xi - 0{,}625\,\xi^2\right)^2 \times 0{,}2\, d\xi = 0{,}25$$

con lo cual

$$kA = \frac{0{,}25^2}{0{,}25} = 0{,}25\ m^2$$

Problema 5.4 *La sección que se representa en la figura 1 está sometida a un esfuerzo cortante Q = 200 kN vertical ascendente. El espesor de todas las paredes vale 1 cm.*

SE PIDE:

Dibujar la distribución de tensiones tangenciales indicando claramente su sentido, el valor en los vértices de las paredes y el valor y posición de la máxima tensión tangencial.

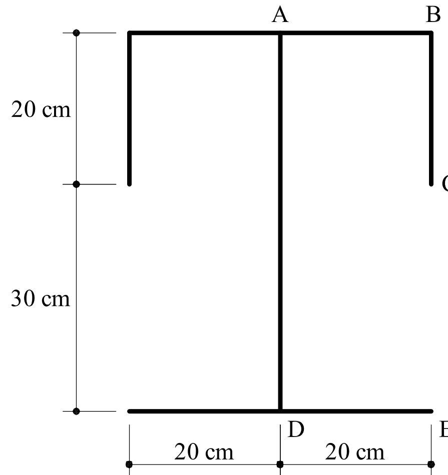


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 5.4

Solución

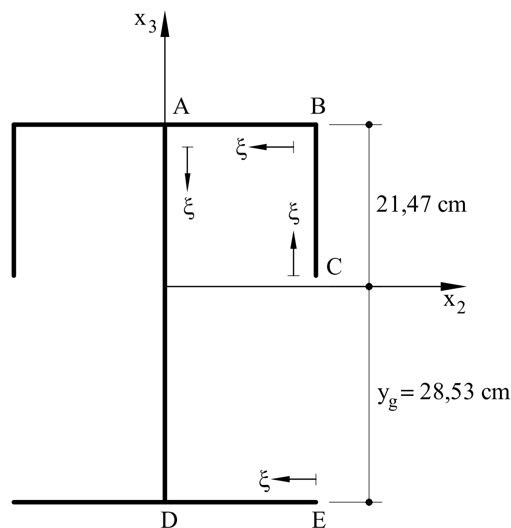


Fig. 2 Ejes y posición del centro de gravedad

-Área:

$$A = 20 \times 2 + 50 + 20 \times 2 + 20 \times 2 = 170\ cm^2$$

-Posición del centro de gravedad

$$y_g \times 170 = 130 \times 25 + 40 \times 40$$

$$y_g = 28{,}53\ cm$$

-Momento de inercia

$$I = \frac{1}{12} \times 1 \times 50^3 + 40 \times 25^2 \times 2 + 130 \times 3{,}53^2 + 2 \times \frac{1}{12} \times 1 \times 20^3 + 40 \times 11{,}47^2 =$$
$$= 68\ 632\ cm^4$$

Distribución de tensiones tangenciales:

$$\tau\Big|_C^B = -\frac{Q\, m_e}{e\, I} = -\frac{200\ \xi\ (1{,}47 + \xi/2)}{68\ 632}\frac{kN}{cm^2} = -2{,}914 \times 10^{-3}\ \xi(1{,}47 + \xi/2)$$

$$\tau\Big|_B^A = -\left[0{,}668 + \frac{200\ \xi \times 21{,}47}{68\ 632}\right] = -(0{,}668 + 0{,}0626\ \xi)$$

$$\tau\Big|_A^D = -\left[1{,}919 \times 2 + \frac{200\ \xi(21{,}47 - \xi/2)}{68\ 632}\right] = -\left[3{,}839 + 2{,}914 \times 10^{-3}\ \xi(21{,}47 - \xi/2)\right]$$

$$\tau\Big|_E^D = \frac{200\ \xi\ 28{,}53}{68\ 632} = 0{,}0831\ \xi$$

En la figura 3 puede verse representada la distribución de tensiones tangenciales.

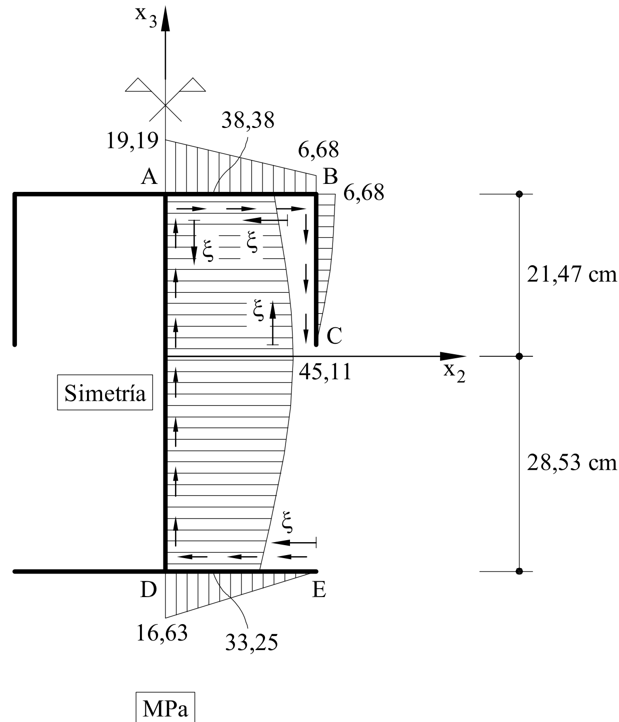


Fig. 3 Distribución de tensiones tangenciales

Problema 5.5 *En la sección de paredes delgadas que se representa en la figura 1, todas las paredes tienen 1 cm de espesor. Sobre dicha sección, actúa un esfuerzo cortante vertical ascendente de valor* $Q = 50\,kN$ *. Hallar y dibujar la distribución de tensiones tangenciales acotando los valores de sus puntos más significativos.*

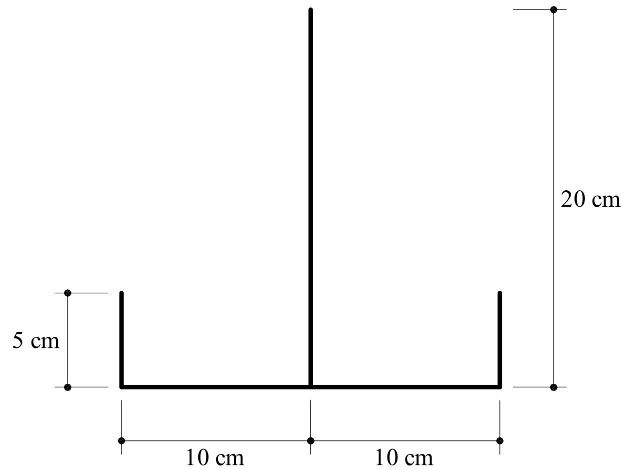


Fig.1 Sección correspondiente al problema 5.5

Solución

El centro de gravedad está situado a 4,5 cm de la fibra inferior. En la figura 2 pueden verse representados los ejes de la sección así como el eje local de cada una de las paredes

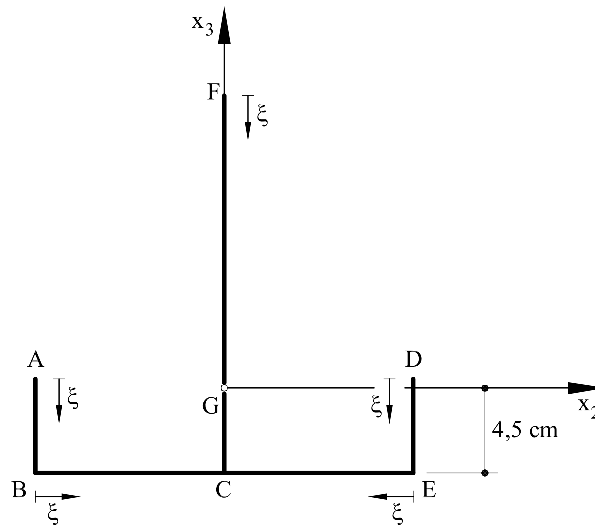


Fig.2. Ejes locales

El momento de inercia respecto de un eje horizontal que pasa por el centro de gravedad vale:

$$I_2 = 1.737,5\,cm^4$$

Utilizando como unidades el *kN* y el *cm*, las leyes de tensiones tangenciales se escriben:

$$\tau = -\frac{Q\, m_{e2}}{e\, I_2}$$

$$\tau\Big|_A^B = \tau\Big|_D^E = -\frac{50\times\xi\left(0{,}5-\xi/2\right)}{1737{,}5} = -2{,}8777\times10^{-2}\,\xi\left(0{,}5-\xi/2\right)$$

$$\tau\Big|_B^C = \tau\Big|_C^E = -\frac{50\left[5\left(0{,}5-5/2\right)-4{,}5\xi\right]}{1737{,}5} = 0{,}28777+0{,}1295\,\xi$$

$$\tau\Big|_C^F = -\frac{50\times\xi\left(15{,}5-\xi/2\right)}{1737{,}5} = -2{,}8777\times10^{-2}\,\xi\left(15{,}5-\xi/2\right)$$

En la figura 3 puede verse representada la anterior distribución de tensiones tangenciales. Las unidades están dadas en *MPa*.

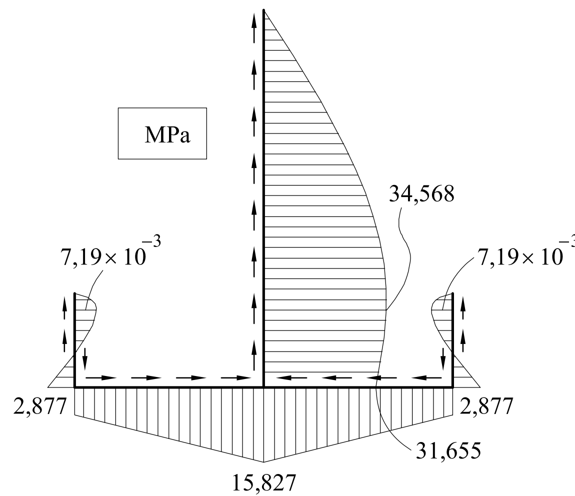


Fig.3. Distribución de tensiones tangenciales

Problema 5.6 *En la sección de la figura 1 de paredes delgadas, todas las chapas tienen el mismo espesor* $e = 1 cm$*, excepto la chapa horizontal BB' en la cual el espesor vale* $e' = 2 cm$*. En la sección actúa un esfuerzo cortante vertical ascendente* $Q = 100 kN$*. Hallar y dibujar la distribución de tensiones tangenciales*

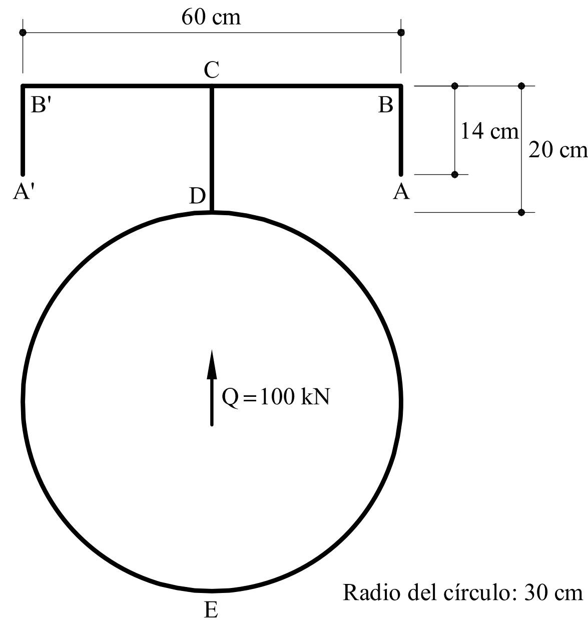


Fig.1 Sección correspondiente al problema 5.6

Solución

El centro de gravedad está situado a 52,4519 cm de la fibra inferior (ver figura 2).

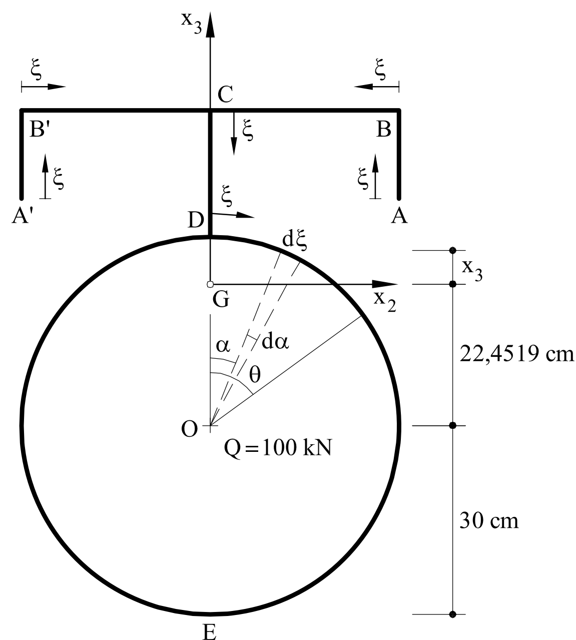


Fig.2. Centro de gravedad y ejes locales

El momento de inercia respecto a un eje horizontal que pasa por el centro de gravedad vale

$$I_2 = 2,89 \times 10^5 \, cm^4$$

Por simetría, las tensiones tangenciales en E serán nulas. Además, las tensiones tangenciales en D de DE serán la mitad que las tensiones tangenciales en D de CD.

Los momentos estáticos de las distintas paredes respecto al eje x_2 valdrán:

$$m_{e2}\Big|_A^B = m_{e2}\Big|_{A'}^{B'} = 1 \times \xi \times (13,5481 + \xi/2)$$

$$m_{e2}\Big|_B^C = m_{e2}\Big|_{B'}^C = 287,67 + 2 \times 27,5481 \times \xi = 287,67 + 55,1 \times \xi$$

$$m_{e2}\Big|_C^D = 3881,34 + \xi(27,5481 - \xi/2)$$

Para obtener el momento estático en la pieza DE se procede como sigue:

$$dm_{e2}\Big|_D^E = x_3 \, d\xi = (30 \times \cos\alpha - 22,4519) \times 30 \times d\alpha$$

e integrando:

$$m_{e2}\Big|_D^E = 2116,15 + \int_0^\theta (30 \times \cos\alpha - 22,4519) \times 30 \times d\alpha = 2116,15 + 900 \sin\theta - 673,56\theta$$

Como puede comprobarse el momento estático es nulo para el punto $E(\theta = \pi)$

Utilizando la expresión

$$\tau = -\frac{Q \, m_{e2}}{e \, I_2} = -\frac{100}{3,78759 \times 10^5} \frac{m_{e2}}{e}$$

se obtiene la distribución de tensiones tangenciales, la cual puede verse representada en la figura 3

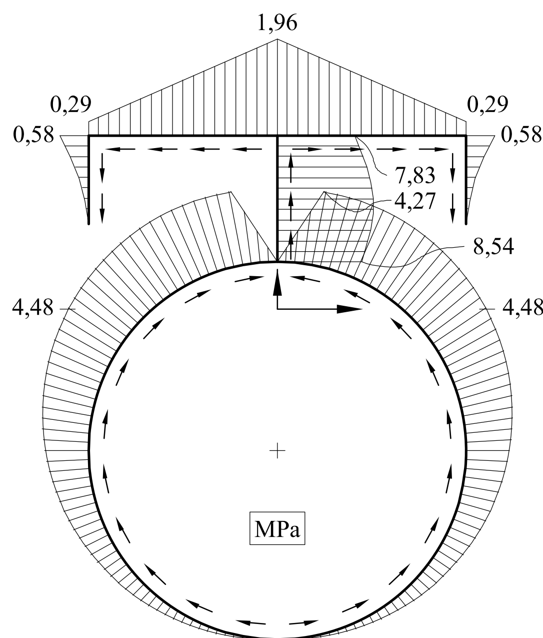


Fig.3. Distribución de tensiones tangenciales

Problema 5.7 *En la sección de la figura 1, todas las paredes tienen el mismo espesor* $e = 1cm$. *Hallar el centro de esfuerzos cortantes de la sección*

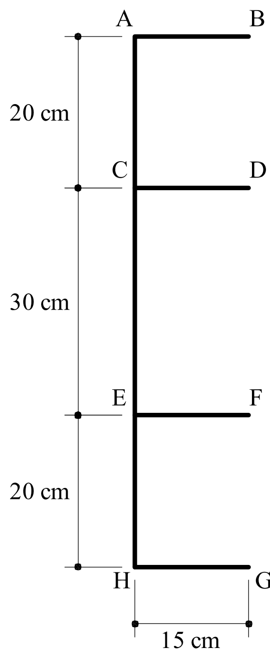


Fig.1 Sección correspondiente al problema 5.7

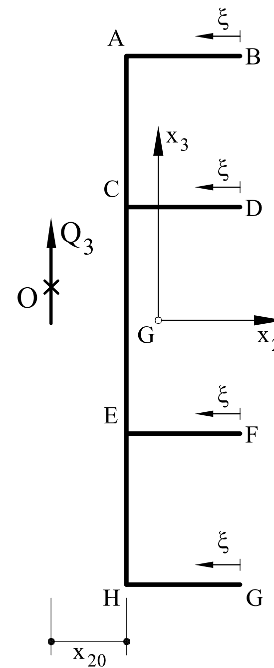


Fig.2. Ejes locales

Solución

Por simetría, el centro de esfuerzos cortantes estará situado en un eje horizontal que pase por el centro de gravedad. El momento de inercia de la sección respecto a dicho eje vale

$$I_2 = 86.500\,cm^4$$

Para determinarlo, se sitúa en la sección un esfuerzo cortante Q_3 vertical, ascendente y que pasa por el centro de esfuerzos cortantes. De acuerdo con los ejes locales de la figura 2 la distribución de tensiones tangenciales, en las paredes horizontales, valdrá:

$$\tau\Big|_B^A = -\frac{Q_3\, m_{e2}\big|_A^B}{e\, I_2} = -\frac{Q_3 \times 35\xi}{1 \times 86500} = -4{,}0462 \times 10^{-4}\,\xi\, Q_3$$

$$\tau\Big|_C^D = -\frac{Q_3\, m_{e2}\big|_C^D}{e\, I_2} = -\frac{Q_3 \times 15\xi}{1 \times 86500} = -1{,}7441 \times 10^{-4}\,\xi\, Q_3$$

$$\tau\Big|_E^F = -\tau\Big|_C^D = -1{,}7441 \times 10^{-4}\,\xi\, Q_3$$

$$\tau\Big|_H^G = -\tau\Big|_A^B = 4{,}0462 \times 10^{-4}\,\xi\, Q_3$$

La anterior distribución de tensiones tangenciales se representa en la figura 3

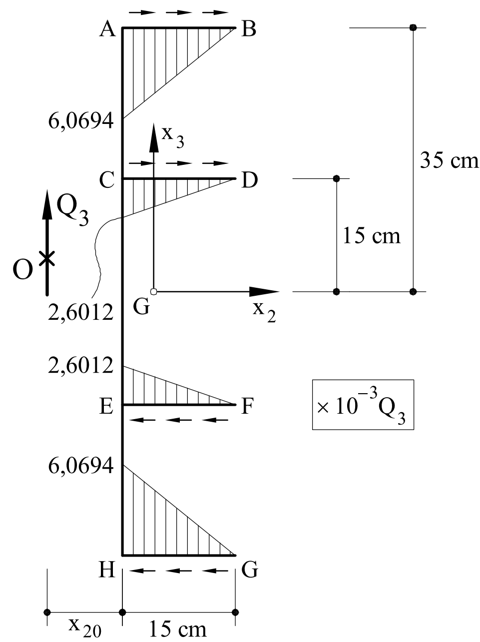


Fig.3. Distribución de tensiones tangenciales en las paredes horizontales

Tomando momentos respecto a cualquier punto de la pared vertical:

$$2\times\left(\frac{6{,}0694\times 15}{2}\times 35+\frac{2{,}6012\times 15}{2}\times 15\right)\times 10^{-3}Q_3=x_{20}\;Q_3$$

De donde:

$$x_{20}=3{,}77\,cm$$

Problema 5.8 *En la sección de paredes delgadas de la figura 1 (espesor constante $e = 1\,cm$) actúa un esfuerzo cortante $Q = 500\,kN$ vertical, ascendente. Hallar y dibujar la distribución de tensiones tangenciales.*

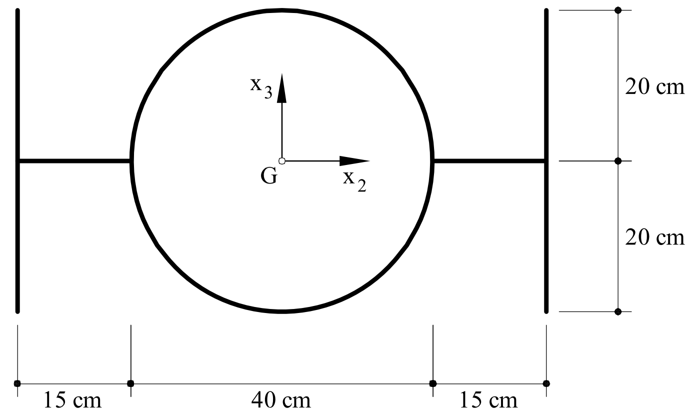


Fig.1 Sección correspondiente al problema 5.8

Solución

El momento de inercia respecto al eje x_2 vale

$$I_2 = 35799{,}4\,cm^4$$

La distribución de tensiones tangenciales vendrá dada por:

$$\tau = -\frac{Q\,m_{e2}}{e\,I_2} = -\frac{500\,m_{e2}}{1 \times 35799{,}4} = -0{,}0139667\,m_{e2}\left[\frac{kN}{cm^2}\right]$$

Dado que la sección es simétrica respecto a un eje vertical, la tensión tangencial será nula en los puntos *D* y *D'* (figura 2)

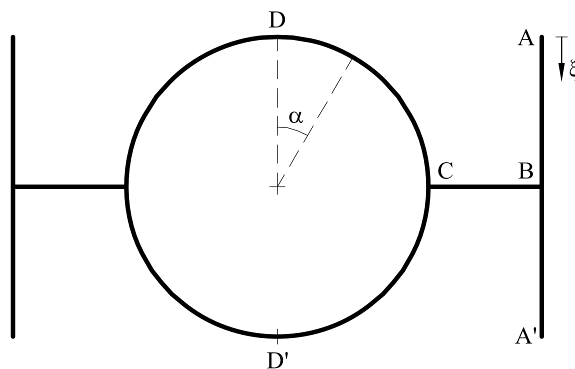


Fig.2. Ejes locales

La distribución de tensiones tangenciales se escribe:

$$\tau\Big|_{A}^{A'} = -0{,}0139667\, m_{e2} = -0{,}0139667\left[\xi\left(20-\xi/2\right)\right] = 0{,}0069834\,\xi^2 - 0{,}279334\,\xi$$

$$\tau\Big|_{C}^{B} = 0$$

$$\tau\Big|_{D}^{D'} = -0{,}0139667\, m_{e2} = -0{,}0139667 \times 20^2 \times \sin\alpha = -5{,}5867\sin\alpha$$

En la figura 3 se representa la distribución anterior

Fig.3. Distribución de tensiones tangenciales

Problema 5.9 *La sección que se representa en la figura es de paredes delgadas. El espesor es constante e igual a 1,2 cm. En la sección actúa un esfuerzo cortante vertical, ascendente de valor $Q = 500\,kN$. Hallar la distribución de tensiones tangenciales.*

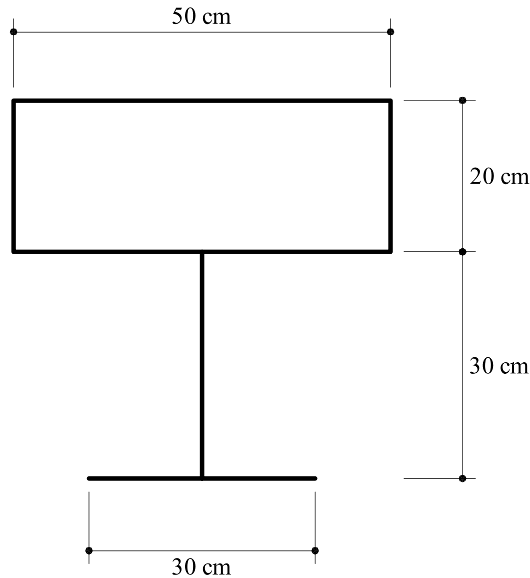


Fig.1 Sección correspondiente al problema 5.9

Solución

El momento de inercia respecto a un eje horizontal que pasa por el centro de gravedad (figura 2) vale

$$I_2 = 73.585\,cm^4$$

Las tensiones tangenciales, por simetría, serán nulas en el punto F (figura 2). La distribución de tensiones tangenciales viene dada por

$$\tau = -\frac{Q\,m_{e2}}{e\,I_2} = -\frac{500\,m_{e2}}{1{,}2 \times 73585} = -5{,}6624 \times 10^{-3}\,m_{e2} \left[\frac{kN}{cm^2}\right]$$

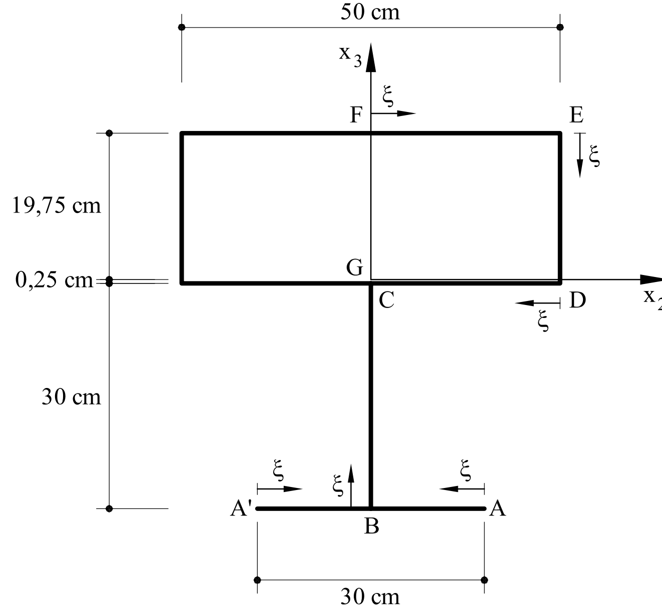


Fig.2 Posición del centro de gravedad y ejes locales

Los momentos estáticos respecto al eje x_2 valen:

$$m_{e2}\Big|_F^E = 1{,}2\,\xi \times 19{,}75 = 23{,}7\,\xi$$

$$m_{e2}\Big|_E^D = 23{,}7 \times 25 + 1{,}2\,\xi\left(19{,}75 - \xi/2\right) = 592{,}5 + 23{,}7\,\xi - 0{,}6\,\xi^2$$

$$m_{e2}\Big|_C^D = 592{,}5 + 23{,}7 \times 20 - 0{,}6 \times 20^2 + 1{,}2\,\xi\left(-0{,}25\right) = 826{,}5 - 0{,}3\,\xi^2$$

$$m_{e2}\Big|_A^B = 1{,}2\,\xi\left(-30{,}25\right) = -36{,}3\,\xi$$

$$m_{e2}\Big|_B^C = \left(-36{,}3 \times 15\right) \times 2 + 1{,}2\,\xi\left(-30{,}25 + \xi/2\right) = -1089 - 36{,}3\,\xi + 0{,}6\,\xi^2$$

con lo cual, la distribución de tensiones tangenciales se escribe

$$\tau\Big|_E^F = -5{,}6622 \times 10^{-3} \times 23{,}7\,\xi = -0{,}134199\,\xi \qquad \left[kN/cm^2\right]$$

$$\tau\Big|_E^D = -5{,}6622 \times 10^{-3} \times \left(592{,}5 + 23{,}7\,\xi - 0{,}6\,\xi^2\right) =$$

$$= -3{,}355 - 0{,}1342\ \xi + 3{,}3974 \times 10^{-3}\,\xi^2 \qquad \left[kN/cm^2\right]$$

$$\tau\Big|_C^D = -5{,}6622 \times 10^{-3} \times \left(826{,}5 - 0{,}3\,\xi^2\right) = -4{,}68 + 1{,}699 \times 10^{-3}\,\xi^2 \qquad \left[kN/cm^2\right]$$

$$\tau\Big|_C^B = -5{,}6622 \times 10^{-3} \times \left(-1089 - 36{,}3\,\xi + 0{,}6\,\xi^2\right) =$$

$$= 6{,}1663 + 0{,}2055\ \xi - 3{,}397 \times 10^{-3}\,\xi^2 \qquad \left[kN/cm^2\right]$$

$$\tau\Big|_A^B = \tau\Big|_{A'}^B = -5{,}6622 \times 10^{-3} \times \left(-36{,}3\,\xi\right) = 0{,}2055\xi \qquad \left[kN/cm^2\right]$$

En la figura 3 puede verse representada la anterior distribución

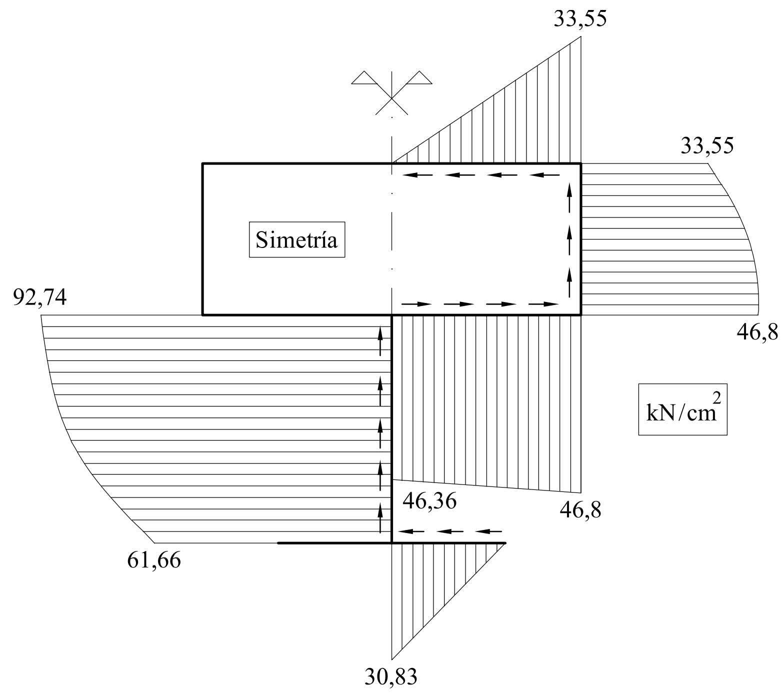


Fig.3. Distribución de tensiones tangenciales

Problema 5.10 *En la sección de paredes delgadas de la figura 1 (las dimensiones están dadas en centímetros) las paredes horizontales tienen un espesor de 1 cm y las verticales de 0,6 cm. Determinar la distribución de tensiones tangenciales cuando actúa un esfuerzo cortante vertical ascendente de valor 100 kN.*

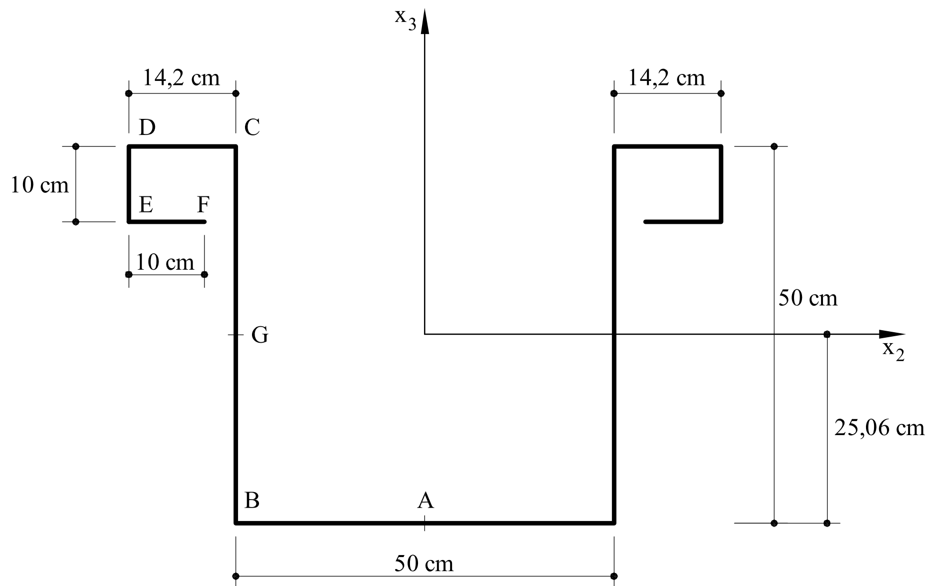


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 5.10

Solución

El momento de inercia respecto a un eje horizontal que pasa por el centro de gravedad vale

$$I = 70\,893{,}00\ cm^4$$

En la figura 2 puede verse la distribución de tensiones tangenciales.

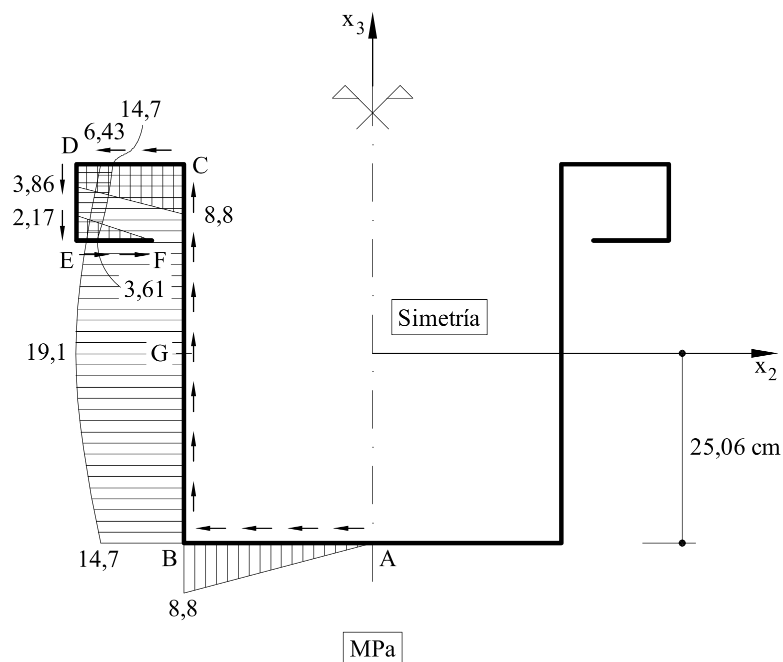


Fig. 2 Distribución de tensiones tangenciales

Problema 5.11 *Las dos secciones de paredes delgadas de la figura 1 tienen 20 cm de lado cada una y un espesor de 0,6 cm. Se distinguen en que la sección a) es cerrada, mientras que la b) está abierta por el punto A. Determinar la relación entre las tensiones tangenciales* τ_a / τ_b *en el punto D (punto medio de la pared vertical derecha) de ambas secciones, cuando actúa un esfuerzo cortante Q, vertical ascendente.*

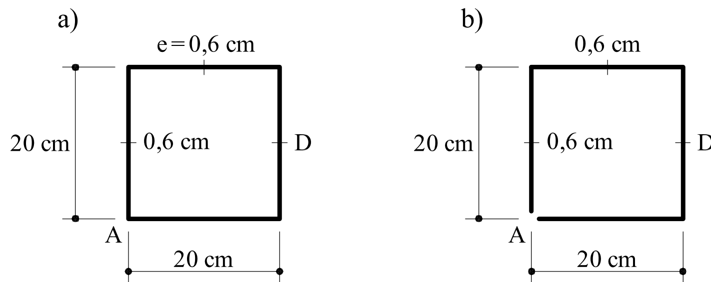


Fig. 1 Secciones correspondientes al problema 5.11

Solución

Dado que en la sección a) las tensiones tangenciales son nulas en los puntos medios de las paredes horizontales, el flujo de tensiones tangenciales en *D* valdrá:

$$\phi_D = 0{,}6\ \tau_D = -\frac{Q\,(m_{e2})_D}{I} = -\frac{Q}{I}\left(10\times 0{,}6\times 10 + 10\times 0{,}6\times 5\right) = -150\times 0{,}6\ \frac{Q}{I} = -90\ \frac{Q}{I}$$

En la sección b), el flujo de tensiones tangenciales en *D* vale:

$$\phi_D^{'} = -\frac{Q}{I}\left(20\times 0{,}6\times 10 + 10\times 0{,}6\times 5\right) = -0{,}6\times 250\ \frac{Q}{I} = -150\ \frac{Q}{I}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\tau_a}{\tau_b} = \frac{\phi_D}{\phi_D^{'}} = \frac{90}{150} = 0{,}667$$

Problema 5.12 *En la sección de paredes delgadas que se acota en la figura 1, el espesor es constante e igual a 1 cm. Sobre dicha sección actúa un esfuerzo cortante vertical ascendente de valor* $40\,kN$. *Representar, acotándola convenientemente, la distribución de tensiones tangenciales indicando claramente el sentido de las mismas.*

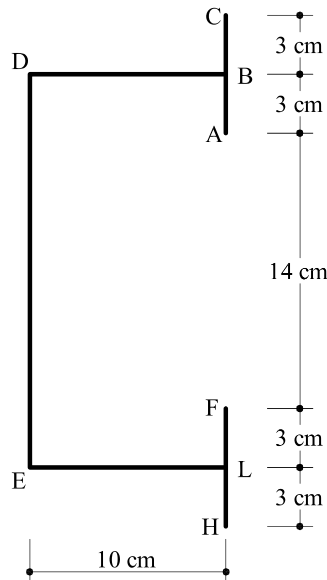


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 5.12

Solución

El momento de inercia respecto a un eje horizontal que pasa por el centro de gravedad vale

$$I = 3.902{,}7\,cm^4$$

Los momentos estáticos valen (ver figura 2)

$$m_{e2}\Big|_A^B = 7\,\xi + \xi^2/2$$

$$m_{e2}\Big|_B^C = 13\,\xi - \xi^2/2$$

$$m_{e2}\Big|_D^B = 60 + 10\,\xi$$

$$m_{e2}\Big|_D^E = 160 + 10\,\xi - \xi^2/2$$

$$m_{e2}\Big|_F^L = -\left(7\,\xi + \xi^2/2\right)$$

$$m_{e2}\Big|_L^H = -13\,\xi + \xi^2/2$$

$$m_{e2}\Big|_L^E = -60 - 10\,\xi$$

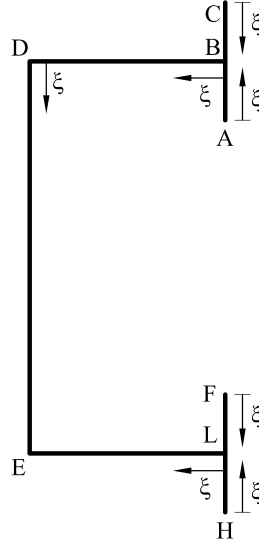


Fig. 2 Ejes locales

Las tensiones tangenciales valen (se utilizarán como unidades el *kN* y el *cm*).

$$\tau = -\frac{40}{1\times 3902{,}7} m_{e2} \qquad \left(unidades: kN/cm^2\right)$$

Es decir:

$$\tau\Big|_A^B = -1{,}025\times 10^{-2}\left(7\xi + \xi^2/2\right)$$

$$\tau\Big|_B^C = -1{,}025\times 10^{-2}\left(13\xi - \xi^2/2\right)$$

$$\tau\Big|_B^D = -1{,}025\times 10^{-2}\left(60 + 10\xi\right)$$

$$\tau\Big|_D^E = -1{,}025\times 10^{-2}\left(160 + 10\xi - \xi^2/2\right)$$

$$\tau\Big|_F^L = 1{,}025\times 10^{-2}\left(7\xi + \xi^2/2\right)$$

$$\tau\Big|_L^H = 1{,}025\times 10^{-2}\left(13\xi - \xi^2/2\right)$$

$$\tau\Big|_L^E = 1{,}025\times 10^{-2}\left(60 + 10\xi\right)$$

En la figura 3 puede verse representada la distribución de tensiones tangenciales.

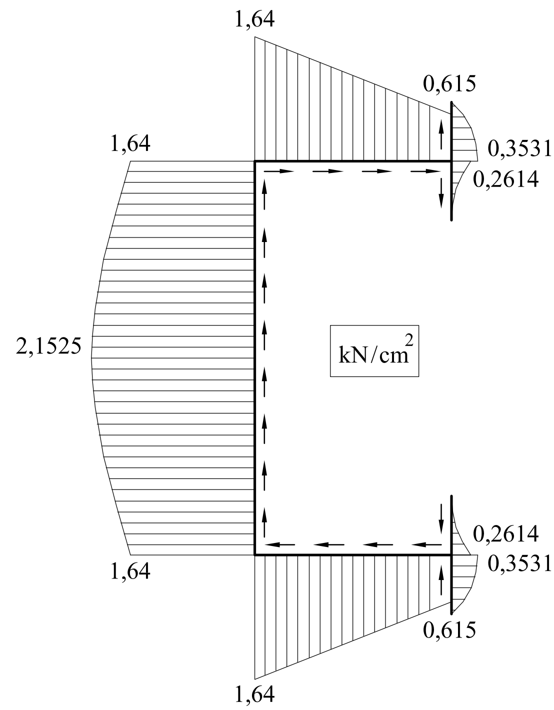


Fig. 3 Distribución de tensiones tangenciales

Problema 5.13 *En la sección en* T *de la figura 1, el espesor de todas las paredes vale* $0{,}8\,cm$. *En dicha sección actúa un esfuerzo cortante vertical. Determinar el valor de la sección reducida.*

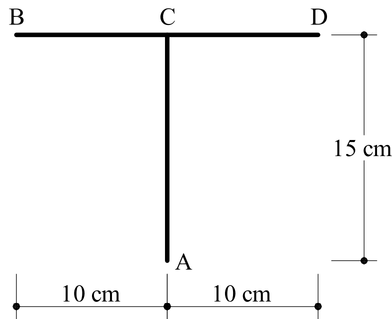


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 5.13

Solución

El centro de gravedad está situado a 3,214 cm. de la fibra superior. El momento de inercia respecto a un eje horizontal que pasa por el centro de gravedad vale

$$I = 610{,}71\,cm^4$$

Los momentos estáticos respecto a un eje horizontal que pasa por el centro de gravedad valen (figura 2).

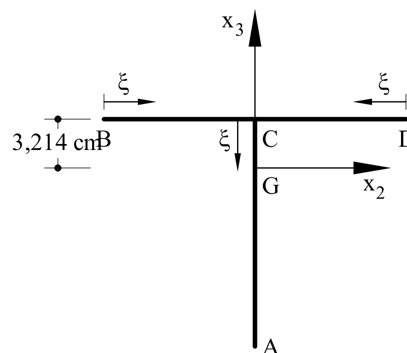


Fig. 2 Centro de gravedad y ejes locales ξ

$$m_{e2}\Big|_D^C = 0{,}8 \times 3{,}214\,\xi = 2{,}57\,\xi$$

$$m_{e2}\Big|_C^B = 2{,}57\,\xi$$

$$m_{e2}\Big|_A^C = 20 \times 0{,}8 \times 3{,}214 + \xi \times 0{,}8\left(3{,}214 - \frac{\xi}{2}\right) = 51{,}42 + 2{,}57\,\xi - 0{,}4\,\xi^2$$

La sección reducida vale:

$$\Omega^* = kA = \frac{I^2}{\int \frac{m_{e2}^2}{e} d\,\xi} = \frac{I^2\,e}{\int m_{e2}^2\, d\,\xi}$$

La integral de los momentos estáticos al cuadrado vale:

$$\int m_{e2}^2\, d\,\xi = 2 \times \int_0^{10} \left(2{,}57\,\xi\right)^2 d\,\xi + \int_0^{15} \left(51{,}42 + 2{,}57\,\xi - 0{,}4\,\xi^2\right)^2 d\xi = 0{,}331925 \times 10^5$$

y sustitutendo:

$$\Omega^* = kA = \frac{(610{,}71)^2 \times 0{,}8}{0{,}331925 \times 10^5} = 8{,}99\,cm^2$$

y también:

$$k = \frac{\Omega^*}{A} = \frac{8{,}99}{28} = 0{,}32$$

Problema 5.14 *Determinar la distribución de tensiones tangenciales cuando actúa un esfuerzo cortante vertical ascendente de valor 200 kN en la sección dada en la figura 1.*

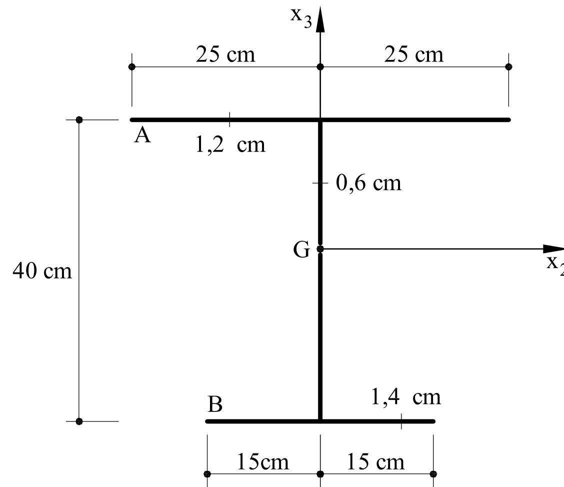


Fig. 1. Sección correspondiente al problema resuelto 5.14

Determinar asimismo:

1. *Movimiento relativo de A con respecto a B.*
2. *Energía de deformación.*
3. *Sección reducida.*
4. *Si el esfuerzo cortante actuara horizontalmente en vez de actuar verticalmente, ¿Cambiaría el valor de la sección reducida?*

Solución

El centro de gravedad está situado a una distancia de *22,86 cm* de la fibra inferior.
El momento de inercia I_2 vale:

$$I_2 = 42\,971{,}43 \; cm^4 = 4{,}297 \times 10^{-4} \; m^4$$

De acuerdo con (5.15) la distribución de tensiones (se trabajará en Meganewton y metros) valdrá (ver figura 2):

-Tramos *AE* y *EC*

$$\tau\Big|_A^C = \tau\Big|_E^C = -\frac{0{,}2 \times 0{,}1714\;\xi}{4{,}297 \times 10^{-4}} = -79{,}78\;\xi$$

-Tramo *EGF*

$$\tau\Big|_E^F = -\frac{0{,}2 \times \left[0{,}50 \times 0{,}012 \times 0{,}1714 + 0{,}006\;\xi(0{,}1714 - \xi/2)\right]}{0{,}006 \times 4{,}297 \times 10^{-4}} =$$
$$79{,}8 - 465{,}44\;\xi(0{,}1714 - \xi/2)$$

-Tramo *BF* y *FD*

$$\tau\Big|_B^F = \tau\Big|_D^F = \frac{0{,}2\times 0{,}2286\ \xi}{4{,}297\times 10^{-4}} = 106{,}4\ \xi$$

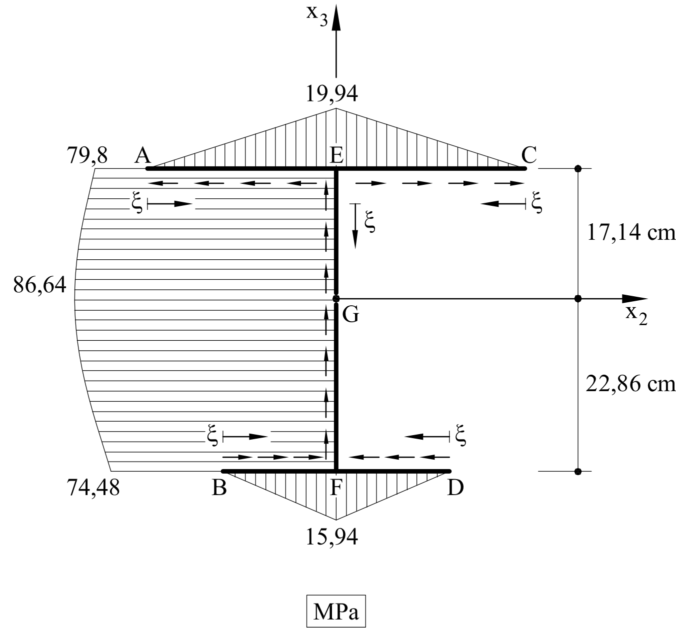


Fig.2 Distribución de tensiones tangenciales

El movimiento relativo entre el punto *A* y *B* se obtendrá a partir de

$$\delta_{AB} = \oint_{AEFB} \gamma\ d\xi = \oint_{AEFB} \frac{\tau}{G}\ d\xi = \int_0^{0,25} \frac{79{,}78\ \xi\ d\xi}{G} + \int_0^{0,4} \left[79{,}8 + 465{,}44\ \xi\left(0{,}1714 - \frac{\xi}{2}\right)\right]\frac{d\xi}{G} +$$

$$+ \int_0^{0,15} 106{,}4\ \xi\ \frac{d\xi}{G} = \frac{37{,}03}{G}\ m$$

(*G* se expresa en *Mpa*)

Por lo que respecta a la sección reducida, se utilizará la expresión (5.72)

$$k = \frac{I_2^2}{A\displaystyle\oint_A \frac{m_{e2}^2}{e}\, d\xi}$$

$$\oint \frac{m_{e2}^2}{e}\, d\xi = 2\int_0^{0,25} \frac{(0{,}012\times 0{,}1714\ \xi)^2}{0{,}012}\, d\xi + \int_0^{0,4} \frac{[0{,}5\times 0{,}012\times 0{,}1714 + 0{,}006\ \xi(0{,}1714 - \xi/2)]^2}{0{,}006}\, d\xi +$$

$$+ 2\int_0^{0,15} \frac{(0{,}014\times 0{,}2286\ \xi)^2}{0{,}014}\, d\xi = 8{,}234\times 10^{-5}$$

con lo que

$$k = \frac{\left(4{,}297 \times 10^{-4}\right)^2}{0{,}0126 \times 8{,}234 \times 10^{-5}} = 0{,}18$$

Si el cortante actuara horizontalmente la sección reducida cambiaría, siendo igual a 5/6 del área de las alas, es decir

$$k^{'} = \frac{5}{6}\,\frac{A_{alas}}{A} = \frac{5}{6}\,\frac{0{,}0102}{0{,}0126} = 0{,}675$$

Problema 5.15 *Se considera una viga mixta biapoyada sometida a una carga uniformemente repartida de valor* $p = 30\ kN/m$. *Dicha viga está formada por una doble T de ala ancha sobre la que se coloca la subsección de hormigón. Para garantizar el funcionamiento solidario del hormigón con el acero se colocan unos pasadores de acero de 2 cm. de diámetro cada 50 cm. Determinar la tensión máxima que soportan los pasadores*

$n = E_a / E_h = 7$

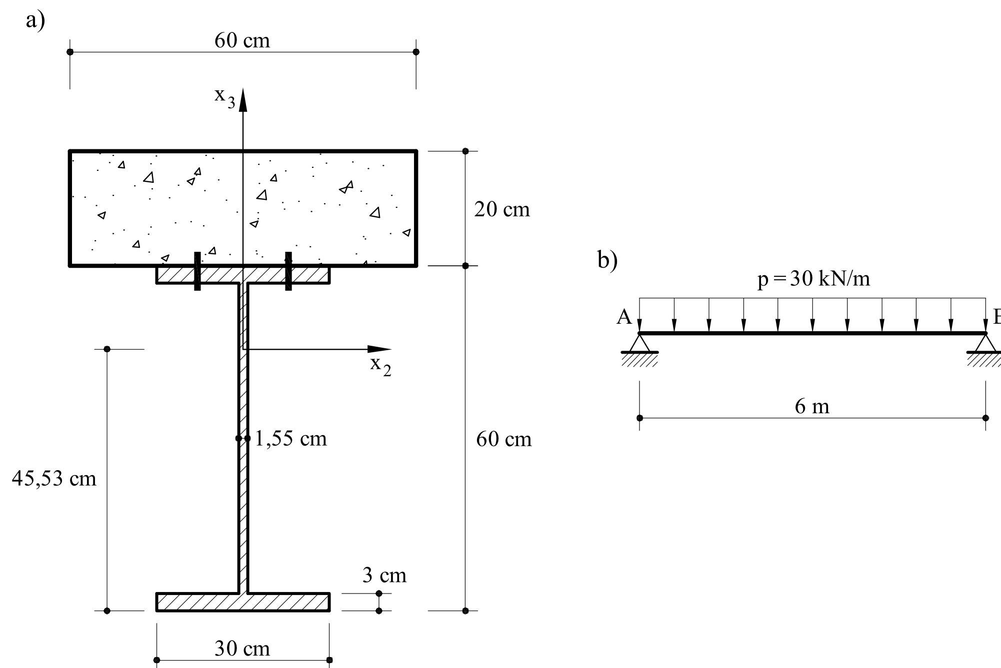


Fig. 1 Viga y sección mixta correspondiente al problema 5.15

Solución

Las características mecánicas de la sección mixta (reducida al hormigón) son:

Área mecánica: $A^* = 3\,090\ cm^2 = 0{,}309\ m^2$

Momento de inercia mecánico: $I_2^* = 2\,731\,369\ cm^4 = 2{,}73 \times 10^{-2}\ m^4$

La ley de momentos flectores M_{f2} se escribe

$$M_{f2} = 90\ x_1 - 15\ x_1^2$$

En la figura 2 puede verse representada dicha ley de momentos flectores.
Las tensiones normales en la zona de hormigón serán de compresión, y su módulo valdrá

$$\sigma = \frac{M_{f2}}{I_2^*}\, x_3 = \frac{90\ x_1 - 15\ x_1^2}{2{,}73 \times 10^{-2}}\, x_3 = 36{,}63\left(90\ x_1 - 15\ x_1^2\right) x_3$$

Si se realizan dos cortes en la viga separados entre ellos *50 cm* (ver figura 2), es evidente que entre dichos cortes habrá dos pasadores.

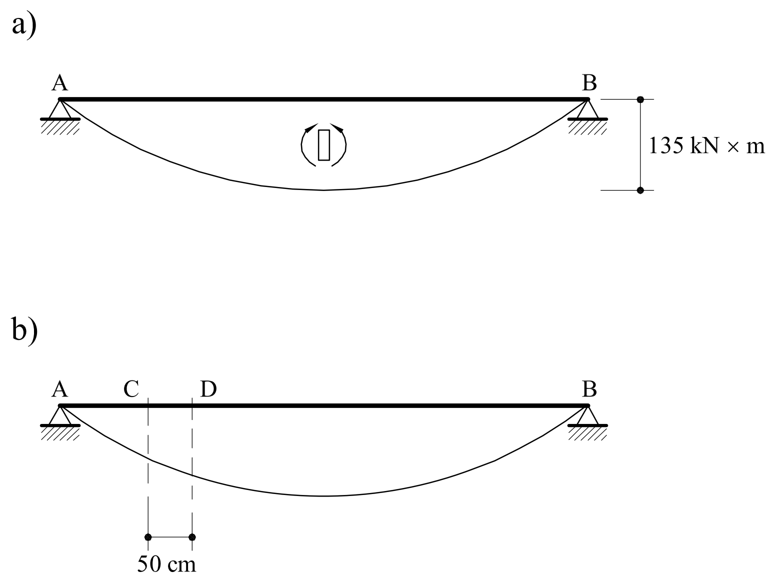


Fig.2 Ley de momentos flectores y cortes en dos puntos C y D separados 50 cm.

Las tensiones en el hormigón en las correspondientes secciones *C* y *D* valdrán

$$\sigma_C = 36{,}63\left(90\ x_{1C} - 15\ x_{1C}^2\right) x_3$$
$$\sigma_D = 36{,}63\left(90\ x_{1D} - 15\ x_{1D}^2\right) x_3 = \sigma_C + \left(-549{,}45\ x_{1C} + 1\,511\right) x_3$$

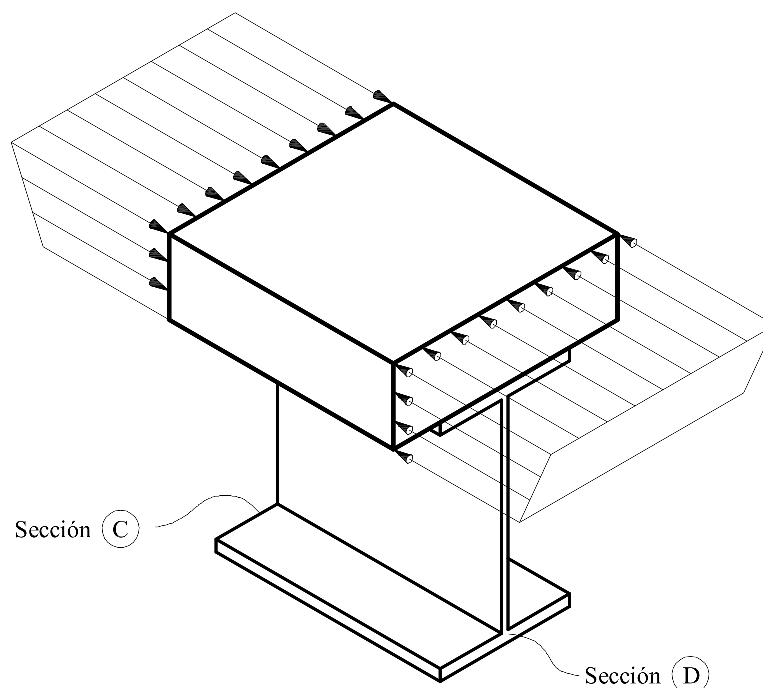


Fig.3 Distribución de tensiones en el hormigón en las secciones C y D

La resultante de las tensiones en la zona de hormigón de la sección *C* valdrá

$$F_C = \int_{0,1447}^{0,3447} 0,6\, \sigma_C \; dx_3$$

y análogamente para la sección D

$$F_D = \int_{0,1447}^{0,3447} 0,6\, \sigma_D \; dx_3 = \int_{0,1447}^{0,3447} 0,6\left(\sigma_C - 549,45\; x_{1C}\; x_3 + 1\,511 x_3\right) dx_3$$

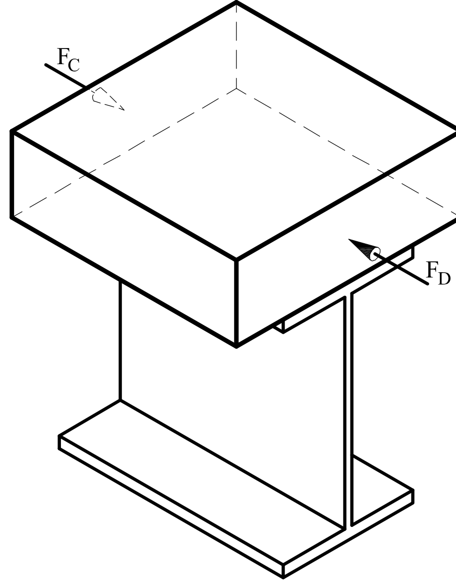


Fig. 4 Equilibrio de fuerzas en el hormigón

Aparece por tanto una fuerza desequilibrada F de valor $F = F_D - F_C$ y que deben absorber los pasadores

$$F = F_D - F_C = -0,6 \times 549,45\; x_{1C} \int_{0,1447}^{0,3447} x_3 \; dx_3 + 0,6 \times 1\,511 \int_{0,1447}^{0,3447} x_3 \; dx_3$$

Lógicamente F será máxima cuando x_{1C} sea cero (zona de mayor cortante), por lo que

$$F_{\max} = 0,6 \times 1\,511 \int_{0,1447}^{0,3447} x_3 \; dx_3 = 44,37 \; kN$$

La tensión media en los pasadores valdrá

$$\tau_p = \frac{F_{\max}}{2A_p}$$

siendo A_p el área de cada pasador, es decir, $A_p = \pi \; cm^2$

$$\tau_p = \frac{44{,}37}{2\pi}\ \frac{kN}{cm^2} = 7{,}06\ \frac{kN}{cm^2} = 70{,}6\ MPa$$

Problema 5.16 *Hallar la distribución de tensiones en el anillo circular de la figura 1 cuando actúa un esfuerzo cortante T = 400 kN.*

1. *Hallar esta tensión $\tau(\theta)$ en función de θ.*
2. *Hallar también la sección reducida de dicho anillo.*

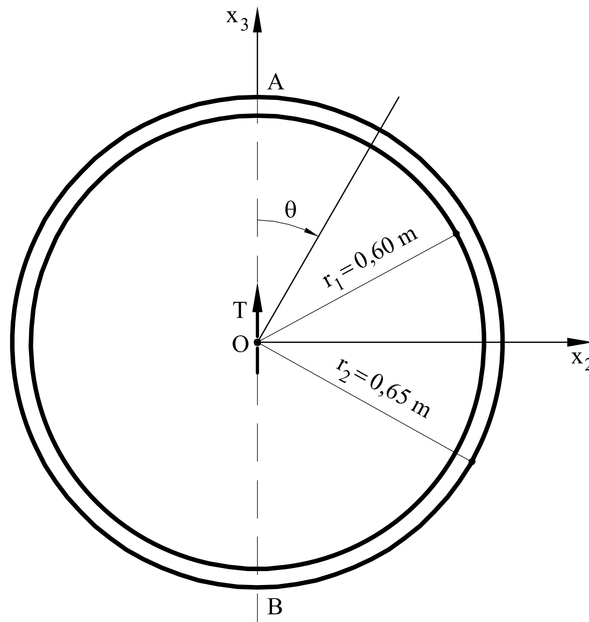


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 5.16

Solución

1. Por simetría la tensión cortante en *A* es cero (ver figura 2)
   En un punto genérico *M* será:

$$\tau(\theta) = -\frac{T}{I_2 \times e}\int_O^\theta e\ r_m\ d\alpha\ r_m \times cos\,\alpha = -\frac{T}{I_2}\ r_m^2 \times sin\,\theta$$

siendo *T = 400 kN*

$$I_2 = \frac{\pi}{4}\left(0{,}65^4 - 0{,}60^4\right) = \pi\ r_m^3 e = 0{,}03841\ m^4$$

$$r_m = \frac{0{,}65 + 0{,}60}{2} = 0{,}625\ m$$

con lo cual

$$\tau(\theta) = -4{,}068\,sin\,\theta$$

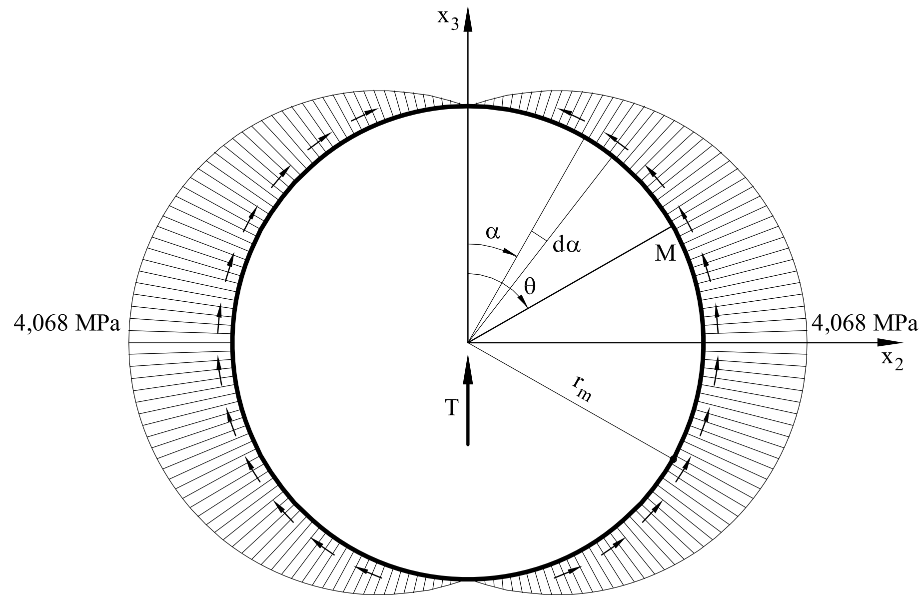


Fig. 2 Distribución de tensiones tangenciales

2. La sección reducida viene dada por

$$kA=\frac{I_2^2}{\oint \frac{m_e^2}{e}\,d\xi}=\frac{I_2^2}{\oint \frac{m_e^2}{e}\,r_m\,d\theta}=\frac{T^2 I^2}{e\,I_2^2\oint \tau^2 r_m\,d\theta}=\frac{T^2}{e\oint \tau^2 r_m\,d\theta}=\frac{2\pi\,r_m e}{2}=$$

$$=\pi\,r_m e=\frac{A}{2}$$

Siendo *A* el área del anillo.

Problema 5.17 *La sección de la figura 1 es de paredes delgadas. El espesor de cada una de las mismas es de 0,9 cm. y la distancia AB vale 30 cm. En dicha sección actúa un esfuerzo cortante horizontal Q dirigido hacia la derecha. Hallar:*

- *Valor de Q de manera que las máximas tensiones tangenciales no sobrepasen los 30 MPa.*
- *Distribución de las tensiones tangenciales dando su valor explícito en los puntos más significativos de la sección.*

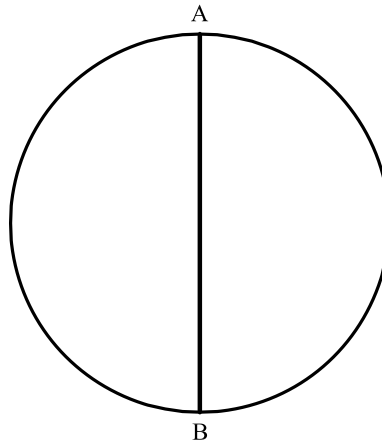


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 5.17

Solución

El momento de inercia respecto a un eje vertical que pasa por el centro de gravedad vale

$$I = 9\,542{,}6\ cm^4$$

En los puntos de corte del eje horizontal de simetría con la sección, las tensiones tangenciales son nulas. Por otro lado, el momento estático, en cualquier punto, respecto a un eje vertical vale (figura 2).

$$m_e = \int_O^{\alpha} e\ R \cos\varphi\ R\ d\varphi = eR^2 \sin\alpha$$

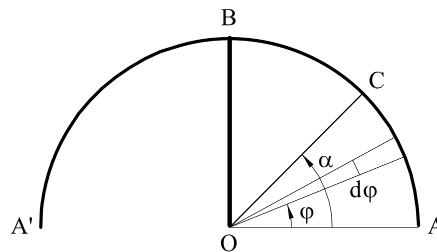


Fig. 2 momento estático en C respecto al eje OB

Por tanto:

$$\tau = -\frac{Q \times 0{,}9 \times 15^2 \sin\alpha}{0{,}9 \times 9\ 542{,}6} = -0{,}0235785 \sin\alpha\ Q$$

En la expresión anterior, si Q viene dado en kN, las unidades de τ son kN/cm^2. La tensión máxima se produce en B ($\sin\alpha = 1$). Por tanto:

$$\tau_{\max} = 30\ MPa = 3\ kN/cm^2 = 0{,}0235785\ Q$$

O sea:

$$Q = \frac{3}{0{,}0235785} = 127{,}23\ kN$$

Problema 5.18 *En la sección de la figura 1 todas las paredes tienen el mismo espesor (e = 1,2 cm). El módulo de elasticidad es el mismo para todas las paredes.*

- *Hallar el valor de la sección reducidad a esfuerzo cortante vertical*
- *Cuando actúa un esfuerzo cortante vertical de valor 500 kN, dibujar la distribución de tensiones tangenciales dando el valor en los puntos más significativos.*

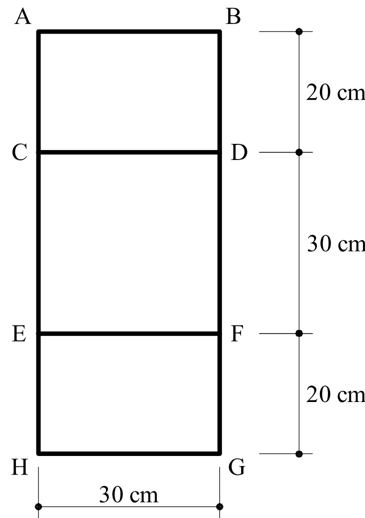


Fig1 Sección correspondiente al problema 5.18

Solución

El área y el momento de inercia respecto a un eje horizontal que pasa por el centro de gravedad valen, respectivamente

$$A = 312\ cm^2 \qquad\qquad I = 173\ 000\ cm^2$$

Por simetría, la tensión tangencial en los puntos medios de las paredes horizontales es nula. La distribución de tensiones tangenciales valdrá (figura 5.27.2).

$$\tau = -\frac{Q\ m_e}{e\ I}$$

$$\tau\Big|_O^A = -\frac{500 \times 1{,}2 \times 35\ \xi}{1{,}2 \times 173\ 000} = -0{,}10116\ \xi$$

$$\tau\Big|_A^C = -\frac{500 \times 1{,}2 \times [35 \times 15 + \xi(35 - \xi/2)]}{1{,}2 \times 173\ 000} = -1{,}5173 - 0{,}10116\ \xi + 0{,}001445\ \xi^2$$

$$\tau\Big|_O^C = -\frac{500 \times 1{,}2 \times 15\ \xi}{1{,}2 \times 173\ 000} = -0{,}04335\ \xi$$

$$\tau\Big|_C^E = -\frac{500\times 1{,}2\,\left[35\times 15+15\times 15+20(35-20/2)+\xi\,(15-\xi/2)\right]}{1{,}2\times 173\,000} =$$

$$-3{,}6127-0{,}04335\,\xi+0{,}001445\,\xi^2$$

$$\tau\Big|_O^E = 0{,}04335\,\xi$$

$$\tau\Big|_O^H = 0{,}10116\,\xi$$

$$\tau\Big|_H^E = 1{,}5173+0{,}10116\,\xi-0{,}001445\,\xi^2$$

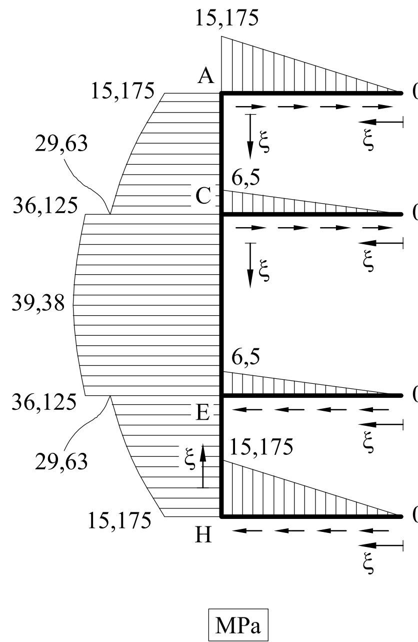


Fig. 2 Distribución de tensiones tangenciales

La sección reducida se determina a partir de

$$kA = \frac{I^2}{\oint \frac{m_e^2}{e}\,d\xi} = \frac{Q^2}{\oint \tau^2 e\,d\xi}$$

La integral vale:

$$\oint \tau^2 e\,d\xi = 4\times 1{,}2\times\left[\int_0^{15}(-0{,}10116\,\xi)^2\,d\xi+\int_0^{20}\left(-1{,}5173-0{,}10116\,\xi+0{,}001445\,\xi^2\right)^2 d\xi + \right.$$

$$\left.\int_0^{15}\left(-3{,}6127-0{,}04335\,\xi+0{,}001445\,\xi^2\right)d\xi+\int(-0{,}04335\,\xi)^2\,d\xi\right]$$

con lo cual, operando y sustituyendo:

$$kA = 150,35\ cm^2$$

Problema 5.19 *Una viga, cuya sección recta se representa en la figura 1, está formada por la unión de dos vigas rectangulares de secciones ABCD* y *CDEF del mismo ancho y unidas monolíticamente a través de la cara común CD. De esta forma al deformarse la viga conjunta, es imposible que haya deslizamientos de una parte respecto a la otra, trabajando como una viga única.*

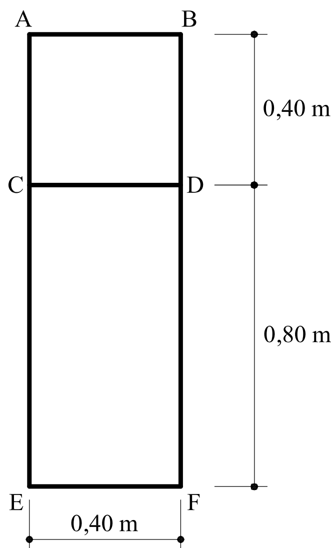


Fig. 1 Sección mixta correspondiente al problema resuelto 5.19

El módulo de elasticidad E_2 de la parte superior es el doble del módulo de elasticidad E_1, de la parte inferior ($E_2 = 2E_1$). Se pide:

-Distribución de tensiones tangenciales y valor máximo de éstas, indicando donde se producen, cuando actúa un esfuerzo cortante vertical ascendente de valor 600 kN.

Solución

El centro de gravedad mecánico está situado a una distancia de *70 cm*. de la fibra inferior, y el momento de inercia respecto a un eje horizontal y que pase por dicho centro de gravedad vale :
$I_2^* = 0{,}07893\ m^4$ (homogeneizado respecto a E_1).
Las tensiones tangenciales serán verticales, ascendentes y constantes a lo largo de una línea horizontal (eje x_2). La distribución vertical vendrá dada por (5.64).

$$\tau = -\frac{Q_3\ m_{e2}^*}{e\ I_2^*}$$

En lo sucesivo se utilizarán como unidades el meganewton y el metro. Por lo cual:

-Tramo *AC*

$$\tau\Big|_A^C = -\frac{0{,}6 \times 0{,}4\ \xi\ (0{,}5 - \xi/2)}{0{,}4 \times 0{,}07893} \times 2 = -15{,}20\ \xi\ (0{,}5 - \xi/2)$$

-Tramo *CE*

$$\tau\Big|_C^E = -1{,}8244 - \frac{0{,}6\times 0{,}4\ \xi\left(0{,}1-\xi/2\right)}{0{,}4\times 0{,}07893} = -1{,}8244 - 7{,}6\ \xi\left(0{,}1-\xi/2\right)$$

En la figura 2 puede verse representada la distribución anterior.

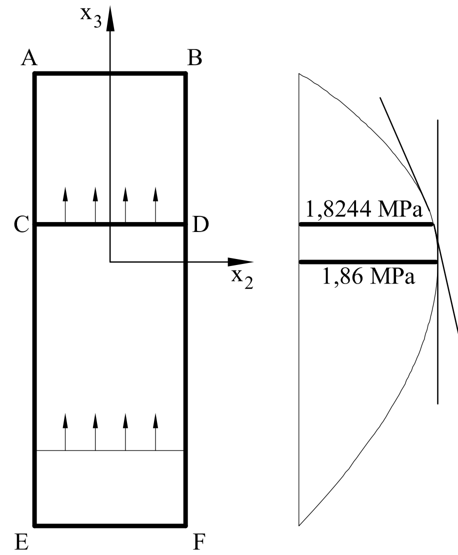


Fig. 2 Distribución de tensiones tangenciales

Problema 5.20 *La sección de paredes delgadas que se representa en la figura .1 está sometida a un esfuerzo cortante, vertical ascendente de valor* $Q = 30\ kN$*. Se desea saber:*

- *Valor de la máxima tensión tangencial en BD.*
- *Posición y sentido de dicha tensión tangencial.*
- *Valor de la tensión tangencial en D para la pared BD.*

El espesor es constante y vale $e = 1\ cm$.

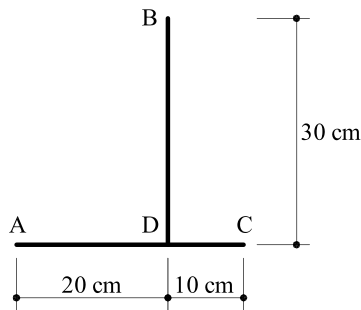


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 5.20

Solución

En la figura 2 puede verse la posición del centro de gravedad.
Los momentos de inercia valen:

$$I_2 = 0{,}5625 \times 10^{-4}\, m^4$$
$$I_3 = 0{,}2625 \times 10^{-4}\, m^4$$
$$I_{23} = 0{,}1125 \times 10^{-4}\, m^4$$

asimismo,

$$\Delta = I_2 I_3 - I_{23}^2 = 0{,}135 \times 10^{-8}\, m^8$$

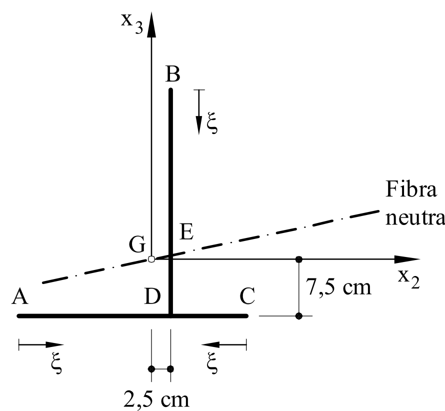


Fig. 2 Centro de gravedad y fibra neutra

La fibra neutra correspondiente a un momento flector M_{f2} viene dada por (expresión 4.82).

$$x_3\ I_3 - x_2\ I_{23} = 0$$

y sustituyendo

$$x_3 = 0{,}2\ x_2$$

El flujo de tensiones tangenciales viene dado por

$$\tau\ e = -\frac{Q_3}{\Delta}\left(I_3\ m_{e2} - I_{23}\ m_{e3}\right)$$

La máxima tensión tangencial en *BD* se producirá en el punto *E*, distante de *B* una cantidad igual a

$$\overline{BE} = 30 - 7{,}5 - 2{,}5 \times 0{,}2 = 22\ cm$$

con lo cual

$$\left(m_{e2}\right)_E = 0{,}22 \times 0{,}01 \times 0{,}115 = 2{,}53 \times 10^{-4}\ m^3$$

$$\left(m_{e3}\right)_E = 0{,}22 \times 0{,}01 \times 0{,}025 = 5{,}5 \times 10^{-5}\ m^3$$

con lo cual, sustituyendo:

$$\tau_E = -\frac{30 \times 10^{-3}}{10^{-2} \times 0{,}135 \times 10^{-8}}\left(0{,}2625 \times 10^{-4} \times 2{,}53 \times 10^{-4} - 0{,}1125 \times 10^{-4} \times 5{,}5 \times 10^{-5}\right) =$$
$$= -13{,}38\ MPa \quad \left(sentido\ ascendente\right)$$

En el punto*D* de la pared *BD* los momentos estáticos valen:

$$\left(m_{e2}\right)_D = 0{,}30 \times 0{,}01 \times 0{,}075 = 2{,}25 \times 10^{-4}\ m^3$$

$$\left(m_{e3}\right)_D = 0{,}30 \times 0{,}01 \times 0{,}025 = 7{,}5 \times 10^{-5}\ m^3$$

Con lo cual

$$\tau_D = -\frac{30 \times 10^{-3}}{10^{-2} \times 0{,}135 \times 10^{-8}}\left(0{,}2625 \times 10^{-4} \times 2{,}25 \times 10^{-4} - 0{,}1125 \times 10^{-4} \times 7{,}5 \times 10^{-5}\right) =$$
$$= -11{,}25\ MPa \quad \left(en\ sentido\ ascendente\right)$$

Problema 5.21 *La sección de la figura 1 está sometida a un esfuerzo cortante vertical ascendente de valor* $Q = 100\ kN$. *Determinar la distribución de tensiones tangenciales así como la sección reducida.*

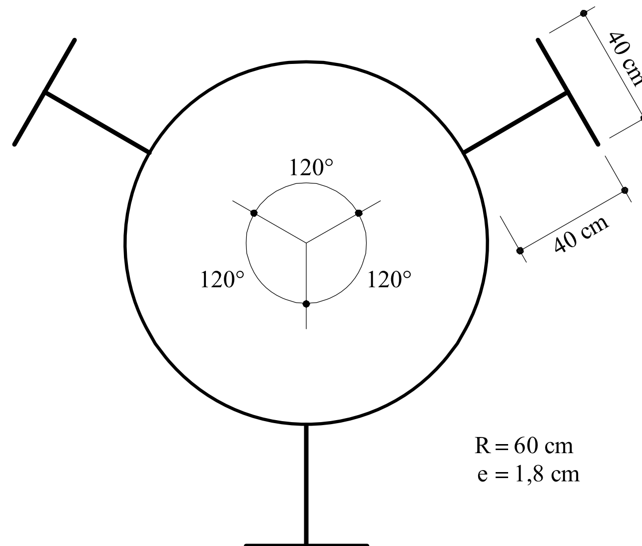


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 5.21

Solución

El momento de inercia respecto a un eje horizontal que pasa por el centro de gravedad vale

$$I = 3{,}02 \times 10^6\ cm^4$$

En el punto de corte del círculo con el eje vertical que pasa por el c.d.g. (punto *A*, figura 2) la tensión tangencia les nula.

La distribución de tensiones tangenciales se escribe:

$$\tau = -\frac{Q\, m_e}{e\, I}$$

$$m_e\Big|_A^B = \int_O^\alpha d\ m_e = \int_O^\alpha R^2 e \cos\theta\ d\theta = R^2 e \sin\alpha \quad (ver\ \ figura\ 2)$$

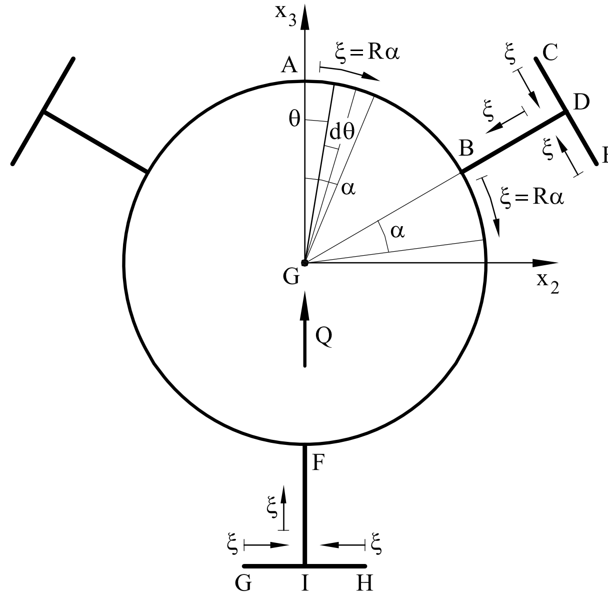


Fig.2 Momento estático en AB

Con lo cual:

$$\tau\Big|_A^B = -\frac{100\times 60^2 \times 1{,}8\ \sin\alpha}{1{,}8\times 3{,}02\times 10^6} = -0{,}119\ \sin\alpha$$

$$\tau\Big|_C^D = \frac{-100\times 1{,}8\ \xi\ (77{,}735-\xi/2)\cos 30}{1{,}8\times 3{,}02\times 10^6} = -0{,}002229\ \xi + 0{,}000014338\ \xi^2$$

$$\tau\Big|_D^E = \frac{-100\times 1{,}8\ \xi\ (37{,}735+\xi/2)\cos 30}{1{,}8\times 3{,}02\times 10^6} = -0{,}001082\ \xi - 0{,}000014338\ \xi^2$$

$$\tau\Big|_D^B = -0{,}06622 - \frac{100\times 1{,}8\ \xi\ (100-\xi/2)\sin 30}{1{,}8\times 3{,}02\times 10^6} = -0{,}06622 - 0{,}001656\ \xi + 0{,}000008278\ \xi^2$$

$$\tau\Big|_B^F = -0{,}1192152 - 0{,}119\ \sin\left(60+\alpha\right)$$

$$\tau\Big|_G^I = \tau\Big|_H^I = \frac{100\times 1{,}8\ \xi\times 100}{1{,}8\times 3{,}02\times 10^6} = 0{,}00331126\ \xi$$

$$\tau\Big|_F^I = 0{,}13245 + \frac{100\times 1{,}8\ \xi\ (100-\xi/2)}{1{,}8\times 3{,}02\times 10^6} = 0{,}13245 + 0{,}00331126\ \xi - 0{,}000016556\ \xi^2$$

En las expresiones anteriores, el valor de ξ se expresa en centímetros y los valores de las tensiones vienen dados en kN/cm^2. En la figura 3 puede verse representada la anterior distribución de tensiones tangenciales.

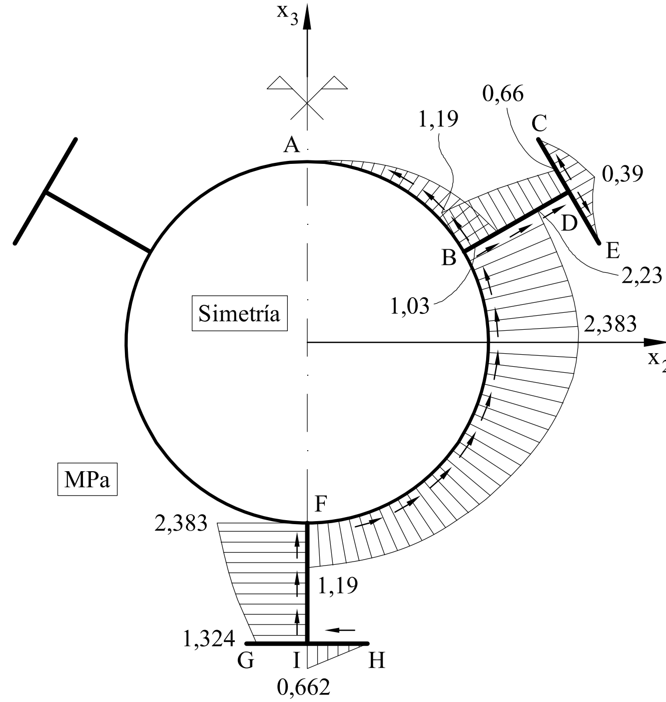


Fig. 3 Distribución de tensiones tangenciales

Seguidamente se obtiene la sección reducida:

$$kA = \frac{I^2}{\int \frac{m_e^2}{e}\, d\xi} = \frac{I^2}{\frac{I^2}{Q^2}\int \tau^2 e\, d\xi} = \frac{Q^2}{\int \tau^2 e\, d\xi}$$

La integral del denominador se escribe

$$\int \tau^2 e\, d\xi = 2\int_H^I \tau^2 e\, d\xi + \int_I^F \tau^2 e\, d\xi + 2\int_F^B \tau^2 e\, d\xi + 2\int_B^D \tau^2 e\, d\xi + 2\int_C^D \tau^2 e\, d\xi +$$

$$+ 2\int_D^E \tau^2 e\, d\xi + 2\int_A^B \tau^2 e\, d\xi$$

y sustituyendo los valores de las integrales

$$\int \tau^2 e\, d\xi = 24{,}5815$$

con lo que

$$kA = \frac{10\ 000}{24{,}5815} = 416{,}67\ cm^2$$

$$k = 0{,}375$$

Problema 5.22 *En la sección que se indica en la figura, el espesor de las paredes AB y BC es de 20 cm, y en el resto de 10 cm. Hallar:*

- *Distribución de tensiones tangenciales cuando actúa en la sección un esfuerzo cortante vertical descendente de valor* $Q = 50\ kN$

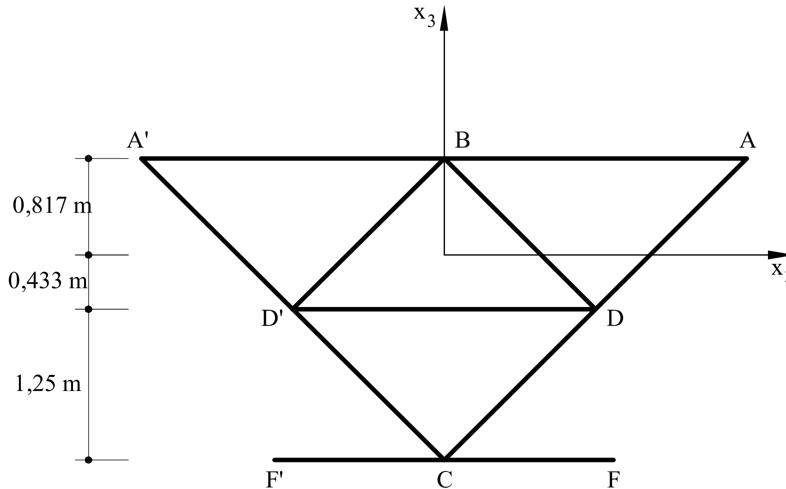


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 5.22

Solución

En la figura 2 puede verse la posición del centro de gravedad. Respecto a unos ejes horizontal y vertical que pasan por dicho punto los momentos de inercia valen:

$$I_2 = 2{,}067\ m^4$$
$$I_3 = 4{,}054\ m^4$$

Asimismo:

Cuando actúa un esfuerzo cortante vertical $Q = 50\ kN$

La sección es simétrica respecto al eje x_3. Se realiza un corte en los puntos medios de *A'B* y *AB* introduciendo una tensión tangencial hiperestática τ_0. Por simetría se estudiará únicamente la mitad de la sección. La distribución de tensiones correspondiente a la sección abierta será (figura 3).

$$\tau_a\Big|_A^B = \tau_a\Big|_O^A = \frac{50 \times 0{,}2 \times 0{,}817\ \xi}{0{,}2 \times 2{,}067} = 19{,}763\ \xi$$

$$\tau_a\Big|_B^D = \tau_a\Big|_A^D = \frac{50 \times \left[0{,}20425 + 0{,}1\ \xi\ \left(0{,}817 - \xi\ \sqrt{2}/4\right)\right]}{0{,}1 \times 2{,}067} =$$
$$241{,}9\ \left[0{,}20425 + 0{,}1\ \xi\ \left(0{,}817 - 0{,}35355\ \xi\right)\right] =$$
$$49{,}41 + 19{,}763\ \xi - 8{,}5524\ \xi^2$$

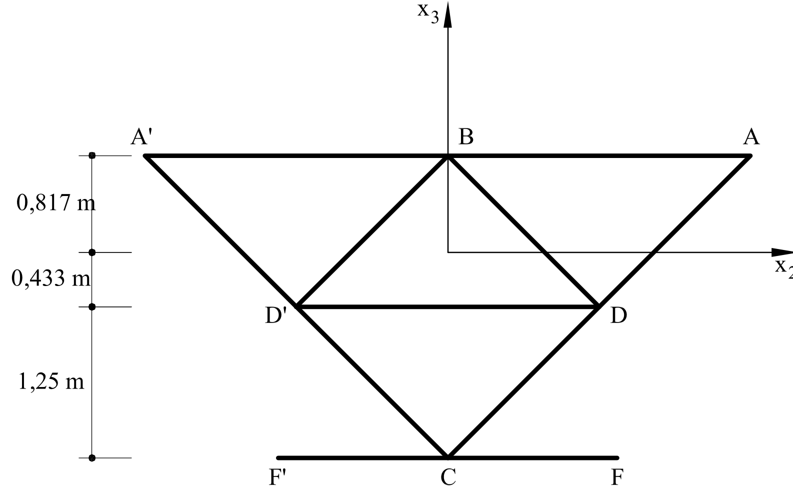


Fig. 2 Ejes y posición del centro de gravedad

$$\tau_a\Big|_H^D = -\frac{50\times 0{,}1\times 0{,}433\ \xi}{0{,}1\times 2{,}067} = -10{,}474\ \xi$$

$$\tau_a\Big|_D^C = \frac{50\times\left[0{,}4223+0{,}1\ \xi\left(-0{,}45-\xi\sqrt{2}/4\right)\right]}{0{,}1\times 2{,}067} = 102{,}14-24{,}19\ \xi\left(0{,}433+0{,}35355\ \xi\right) =$$
$$= 102{,}14-10{,}474\ \xi-8{,}5524\ \xi^2$$

$$\tau_a\Big|_C^F = -\frac{50\times 0{,}1\times 1{,}683\ \xi}{0{,}1\times 2{,}067} = -40{,}71\ \xi$$

Dado que, como puede observarse,

$$\oint_{ABD}\tau_a\ d\xi = 0$$

resulta que $\tau_o = 0$ y por tanto τ_a son las distribuciones finales de tensiones.

En la figura 3 puede verse representada la distribución final de tensiones tangenciales

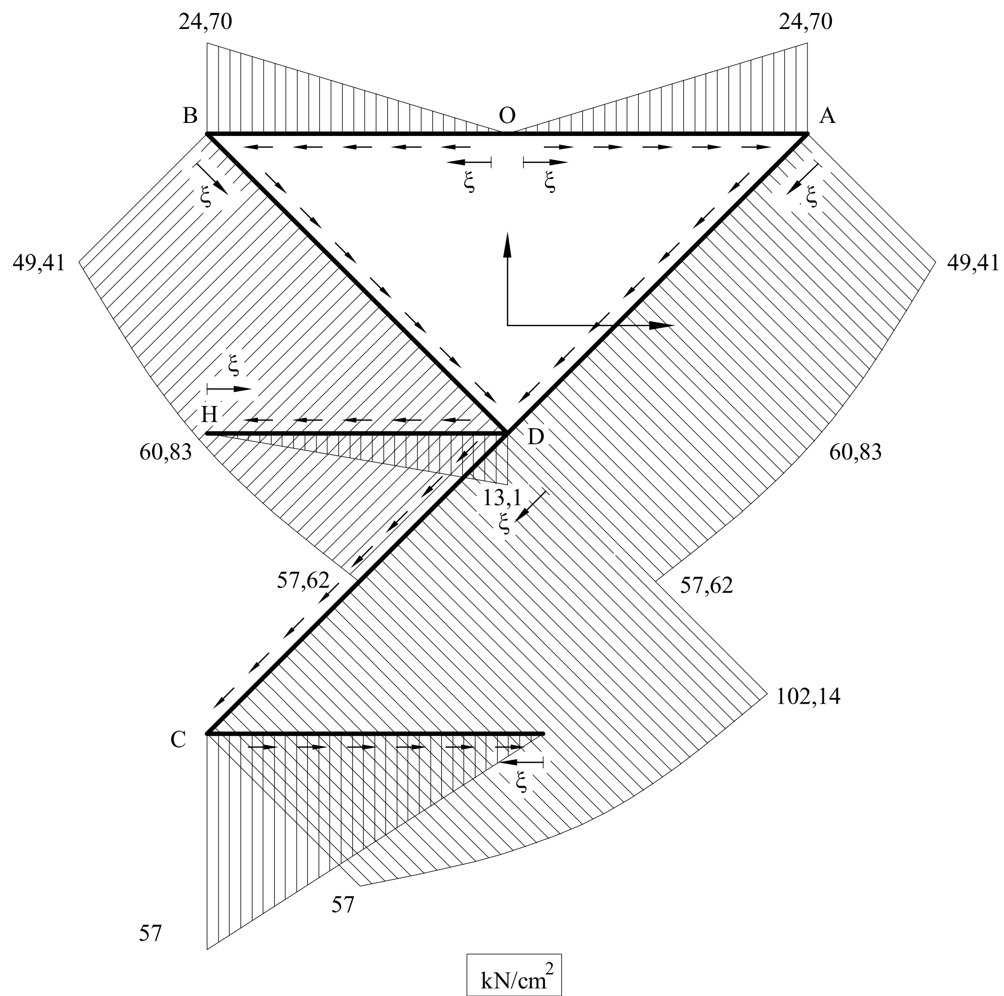


Fig. 3 Distribución final de tensiones tangenciales

Problema 5.23 *Con el objeto de aumentar la resistencia a flexión de una tubería de conducción de agua, se le sueldan los dos perfiles en T que se acotan en la figura 1*

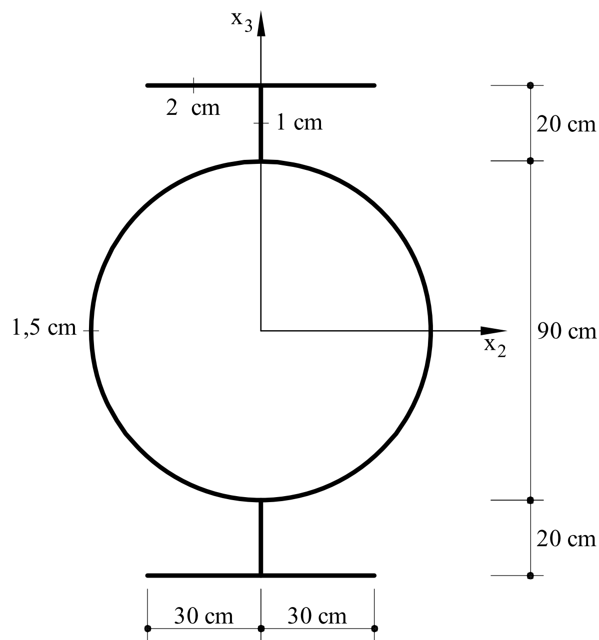


Fig.1 Sección correspondiente al problema resuelto 5.23

Hallar las tensiones tangenciales provocadas por un esfuerzo cortante vertical, ascendente y de valor Q = 600 kN.

Solución

El momento de inercia respecto a un eje horizontal valdrá

$$I_2 = 1\,565\,750\ cm^4$$

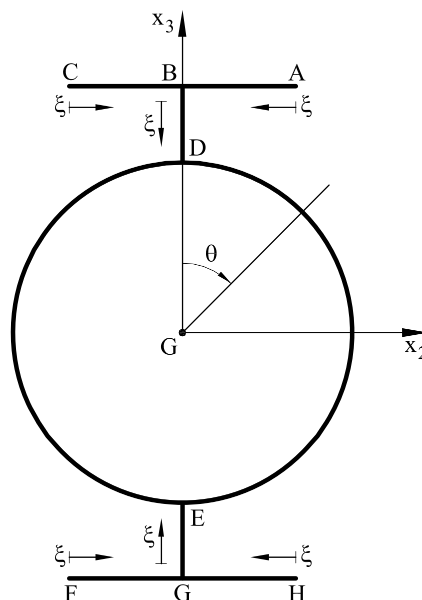


Fig. 2 Coordenadas locales

En la figura 2 se indican las coordenadas locales para cada una de las paredes de la sección.

Como unidad de fuerza se utilizará el Meganewton y como unidad de longitud el metro.

La distribución de tensiones tangenciales se escribirá:

-Tramos *CB* y *AB*

$$\tau\Big|_C^B = \tau\Big|_A^B = -\frac{0{,}6\times 0{,}65\ \xi}{1{,}56575\times 10^{-2}} = -24{,}91\ \xi$$

-Tramos *BD*

$$\tau\Big|_B^D = -\frac{0{,}6\times\left[0{,}02\times 0{,}6\times 0{,}65 + 0{,}01\ \xi(0{,}65-\xi/2)\right]}{0{,}01\times 1{,}56575\times 10^{-2}} = -29{,}89 - 63{,}87\ \xi\ (0{,}65-\xi/2)$$

-Tramo circular

Si se aísla un entorno del punto *D*, puede verse (figura 3) que el flujo de tensiones tangenciales en *D* de la pared *BD* debe ser igual a dos veces el flujo de tensiones tangenciales en *D* de las dos paredes curvas que concurren en *D*, es decir

$$2\ \phi_D^{DE} = \phi_D^{BD}$$

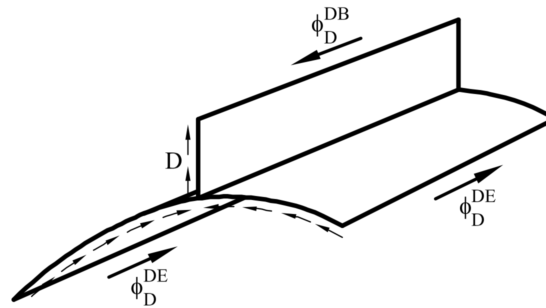


Fig.3 Flujo de tensiones tangenciales en D

Es decir:

$$\phi_D^{DE} = \frac{\phi_D^{BD}}{2} = \frac{\tau\Big|_B^D\ (\xi = 0{,}2)\times 0{,}01}{2} = 0{,}1846$$

Con lo cual:

$$\tau\Big|_D^E = -\frac{0{,}1846}{0{,}015} - \frac{0{,}6\times 0{,}45^2\ sin\,\theta}{1{,}56576\times 10^{-2}} = -12{,}31 - 7{,}76\,sin\,\theta$$

-Tramos *FG* y *GH*

$$\tau\Big|_F^G = \tau\Big|_G^H = \frac{0,6 \times 0,65\,\xi}{1,56575 \times 10^{-2}} = 24,91\,\xi$$

-Tramo *GE*

$$\tau\Big|_G^E = 29,89 + 63,87\,\xi\left(0,65 - \xi/2\right)$$

Problema 5.24 *La sección de paredes delgadas que se acota en la figura 1 está sometida a un esfuerzo cortante vertical ascendente de valor* $Q = 50\ kN$. *Determinar y dibujar la distribución de tensiones tangenciales (dando los valores de las mismas en MPa) así como el sentido de las mismas.*

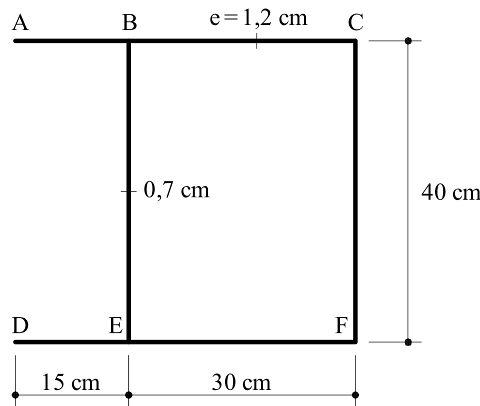


Fig.1 Sección correspondiente al problema 5.24

Solución

El momento de inercia respecto a un eje horizontal que pasa por el centro de gravedad vale

$$I = 50\ 667\ cm^4$$

Se realiza un corte en el punto medio de *BC* introduciendo un cortante hiperestático τ_o. Dicho cortante producirá la distribución de tensiones tangenciales que puede verse en la figura 2. La distribución de tensiones en la sección abierta vendrá dada por (unidades de tensión en MPa y valores de ξ dados en metros).

$$\tau_a\Big|_O^B = \tau_a\Big|_O^C = \tau_a\Big|_A^B = -\frac{50\ kN \times 1{,}2\ cm \times 20\ cm \times \xi}{1{,}2\ cm \times 50\ 667\ cm^4} = -19{,}74\ \xi\ MPa \text{ (} \xi \text{ en metros)}$$

$$\tau_a\Big|_C^F = -19{,}74 \times 0{,}15 \times \frac{1{,}2}{0{,}7} - \frac{50\ kN \times 0{,}7\ cm \times \xi\ (0{,}2 - \xi/2)}{0{,}7\ cm \times 50\ 667\ cm^4} =$$
$$= -5{,}076 - 98{,}684\ \xi\ (0{,}2 - \xi/2)\quad MPa$$

$$\tau_a\Big|_B^E = -2 \times 19{,}74 \times 0{,}15 \times \frac{1{,}2}{0{,}7} - \frac{50\ kN \times 0{,}7\ cm \times \xi\ (0{,}2 - \xi/2)}{0{,}7\ cm \times 50\ 667\ cm^4} =$$
$$= -10{,}152 - 98{,}684\ \xi\ (0{,}2 - \xi/2)\quad MPa$$

$$\tau_a\Big|_D^E = \tau_a\Big|_O^E = \tau_a\Big|_O^F = 19{,}74\ \xi\quad MPa$$

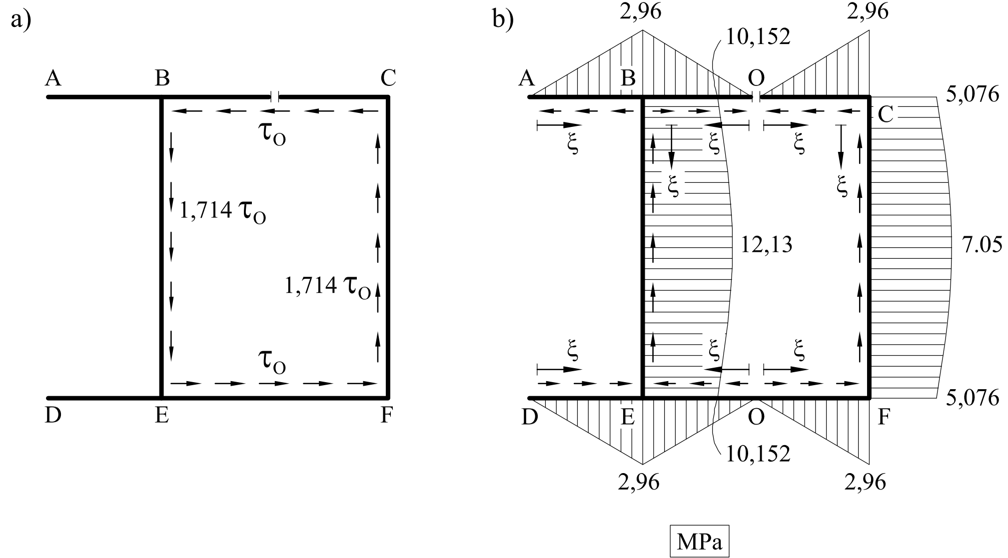


Fig. 2 Distribución de tensiones tangenciales: a) Tensiones hiperestáticas. b) Tensiones de la sección abierta.

Se impone la condición

$$\oint \tau \, d\xi = 0$$

es decir:

$$5{,}076 \times 0{,}40 - \tau_o \times (0{,}30 \times 2 + 1{,}714 \times 0{,}40 \times 2) = 0$$

$$\tau_o = 1{,}0298 \quad MPa$$

La distribución de tensiones tangenciales final será

$$\tau\Big|_A^B = \tau_a\Big|_A^B = -19{,}74\ \xi$$

$$\tau\Big|_E^D = \tau_a\Big|_E^D = 19{,}74\ \xi$$

$$\tau\Big|_O^B = \tau_a\Big|_O^B + \tau_o = 1{,}0298 - 19{,}74\ \xi$$

$$\tau\Big|_O^C = \tau_a\Big|_O^C + \tau_o = -1{,}0298 - 19{,}74\ \xi$$

$$\tau\Big|_C^F = \tau_a\Big|_C^F - 1{,}714\ \tau_o = -6{,}87 - 98{,}684\ \xi\ (0{,}2 - \xi/2)$$

$$\tau\Big|_B^E = \tau_a\Big|_B^E + 1{,}714\ \tau_o = -8{,}387 - 98{,}684\ \xi\ (0{,}2 - \xi/2)$$

$$\tau\Big|_O^E = \tau_a\Big|_O^E - \tau_o = -1{,}0298 + 19{,}74\ \xi$$

$$\tau\Big|_O^F = \tau_a\Big|_O^F + \tau_o = 1{,}0298 + 19{,}74\ \xi$$

En la figura 3 puede verse representada la anterior distribución de tensiones.

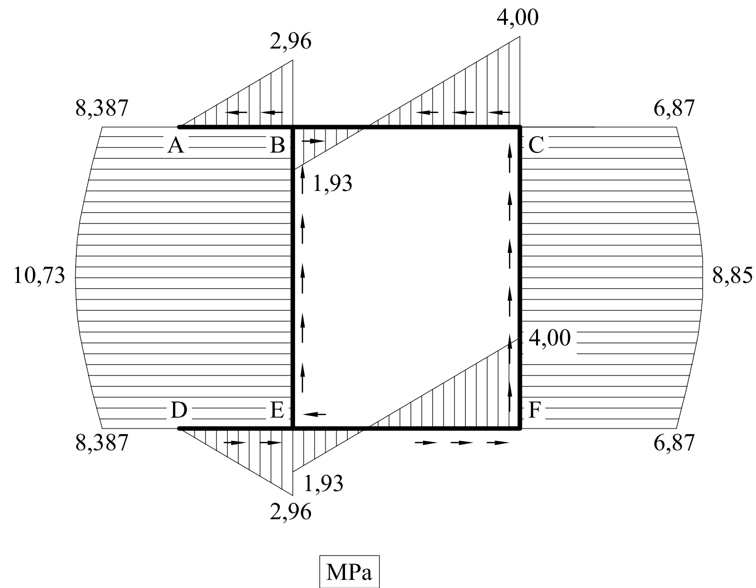


Fig. 3 Distribución final de tensiones tangenciales

Problema 5.25 *La sección que se representa en la figura 1 está sometida a un esfuerzo cortante Q, vertical, ascendente, de valor* $Q = 100\,kN$ *. El espesor de las paredes es constante e igual a 1 cm. Hallar y dibujar la distribución de tensiones tangenciales, acotando sus valores más significativos.*

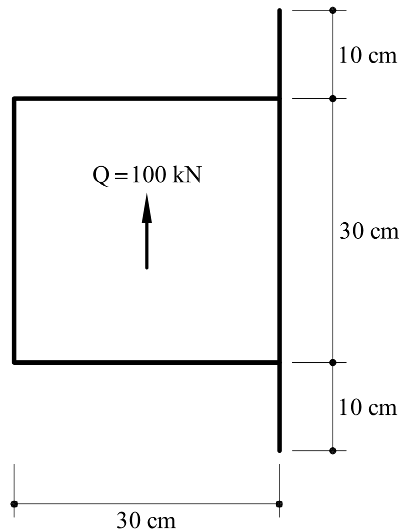


Fig.1 Sección correspondiente al problema 5.25

Solución

La sección tiene un eje horizontal como eje de simetría. Respecto a dicho eje el momento de inercia vale

$$I_2 = 26.166,7\,cm^4$$

Para la obtención de la distribución de tensiones tangenciales la sección es una vez hiperestática. Se abre la sección practicando un corte en el punto *B* de la barra *BC* e introduciendo en dicho punto una tensión tangencial hiperestática τ_0 (figura 2)

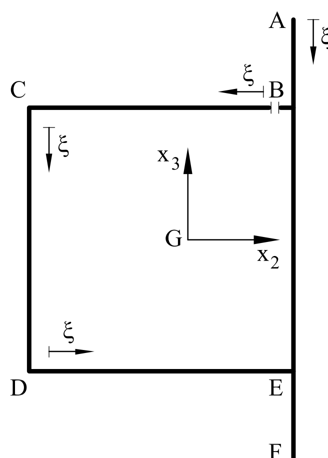


Fig.2. Punto de corte y ejes locales.

La distribución de tensiones tangenciales de la sección abierta se escribe:

$$\tau_a = -\frac{Q\, m_{e2}}{e\, I_2}$$

$$\tau_a \Big|_B^C = -\frac{100}{26.166,7} \times 15\xi = -0,057324\xi$$

$$\tau_a \Big|_C^D = -\frac{100}{26.166,7}\left[450 + \xi\left(15 - \xi/2\right)\right] = -3,82165 \times 10^{-3}\left[450 + \xi\left(15 - \xi/2\right)\right]$$

$$\tau_a \Big|_D^E = -\frac{100}{26.166,7}\left[450 - 15\xi\right] = -3,82165 \times 10^{-3}\left[450 - 15\xi\right]$$

$$\tau_a \Big|_A^F = -\frac{100}{26.166,7}\,\xi\left(25 - \xi/2\right) = -3,82165 \times 10^{-3}\,\xi\left(25 - \xi/2\right)$$

En la figura 3 puede verse la distribución de tensiones tangenciales de la sección abierta

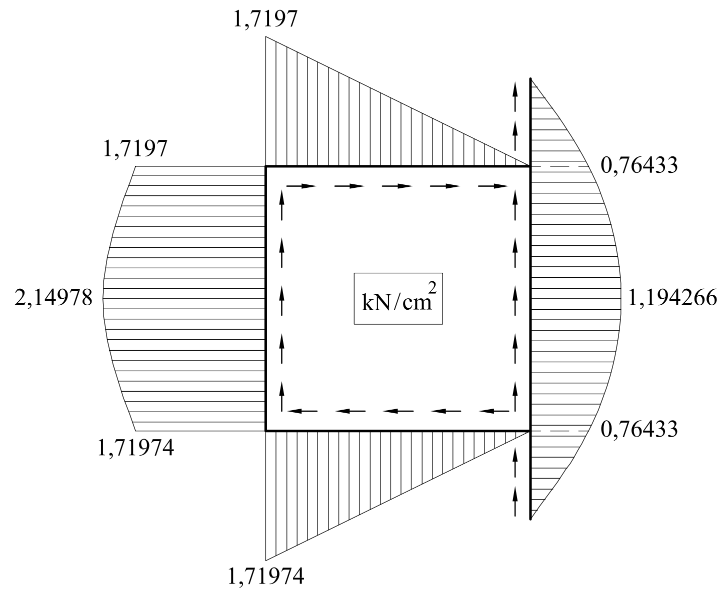


Fig.3.Distribución de tensiones tangenciales de la sección abierta

Por otro lado, la distribución de tensiones tangenciales debida a la hiperestática τ_0 puede verse representada en la figura 4

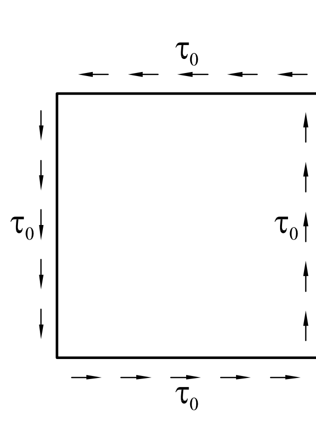


Fig. 4. Distribución de tensiones tangenciales debida a τ_0

y como

$$\oint \tau \, d\,\xi = \oint (\tau_a + \tau_0) d\xi = 0$$

se obtiene

$$\tau_0 = 0{,}66878875\, kN/cm^2 = 6{,}69\, MPa$$

En la figura 5 puede verse representada en *MPa* la distribución final de tensiones tangenciales

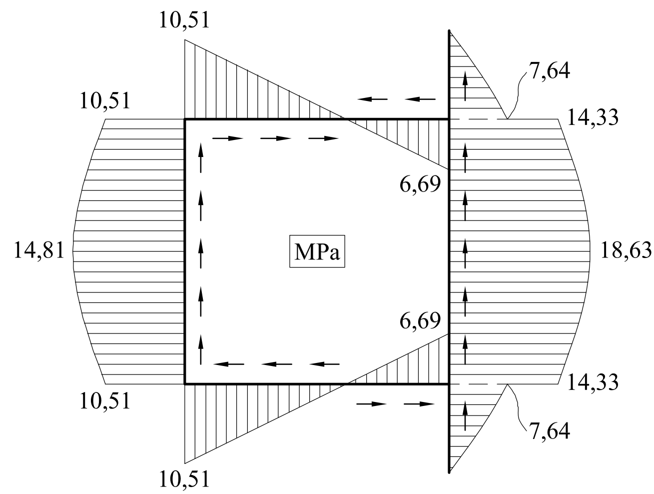


Fig.5 Distribución final de tensiones tangenciales.

Problema 5.26 *En la sección de paredes delgadas de la figura 1, el espesor de las paredes es constante y vale* $e = 0{,}8\,cm$. *En el centro de esfuerzos cortantes de dicha sección actúa un esfuerzo cortante vertical ascendente de valor* $Q = 500\,kN$.
Hallar y dibujar la distribución de tensiones tangenciales.

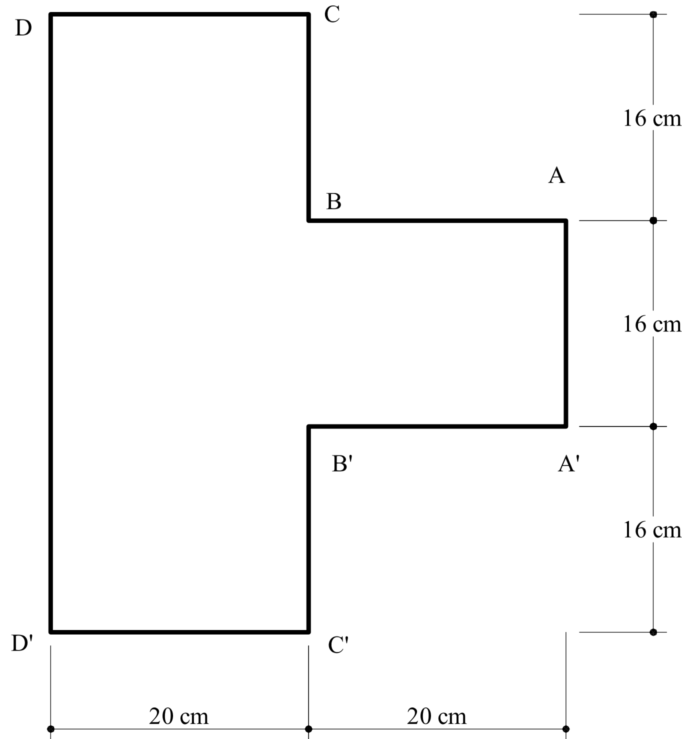


Fig. 1 Sección correspondiente al problema resuelto 5.26

Solución

El momento de inercia respecto a un eje horizontal que pase por el centro de gravedad vale:

$$I_2 = 35.225{,}6\,cm^4$$

La sección es una vez hiperestática. Se realiza un corte en 0 introduciendo en dicho punto una tensión tangencial hiperestática τ_0 (sentido ascendente en 0).
La distribución de tensiones tangenciales de la sección abierta será (figura 2)

$$\tau_a\Big|_0^A = -\frac{Q \times \xi^2/2}{I} = -\frac{Q}{I}\frac{\xi^2}{2} = -14{,}194 \times 10^{-3}\ \frac{\xi^2}{2}$$

$$\tau_a\Big|_A^B = -\frac{Q}{I}\left(32 + 8\xi\right) = -0{,}454 - 0{,}114\ \xi$$

$$\tau_a\Big|_B^C = -\frac{Q}{I}\left[192 + \xi\left(8 + \frac{\xi}{2}\right)\right] = -2{,}7253 - 0{,}11355\,\xi - 7{,}097 \times 10^{-3}\,\xi^2$$

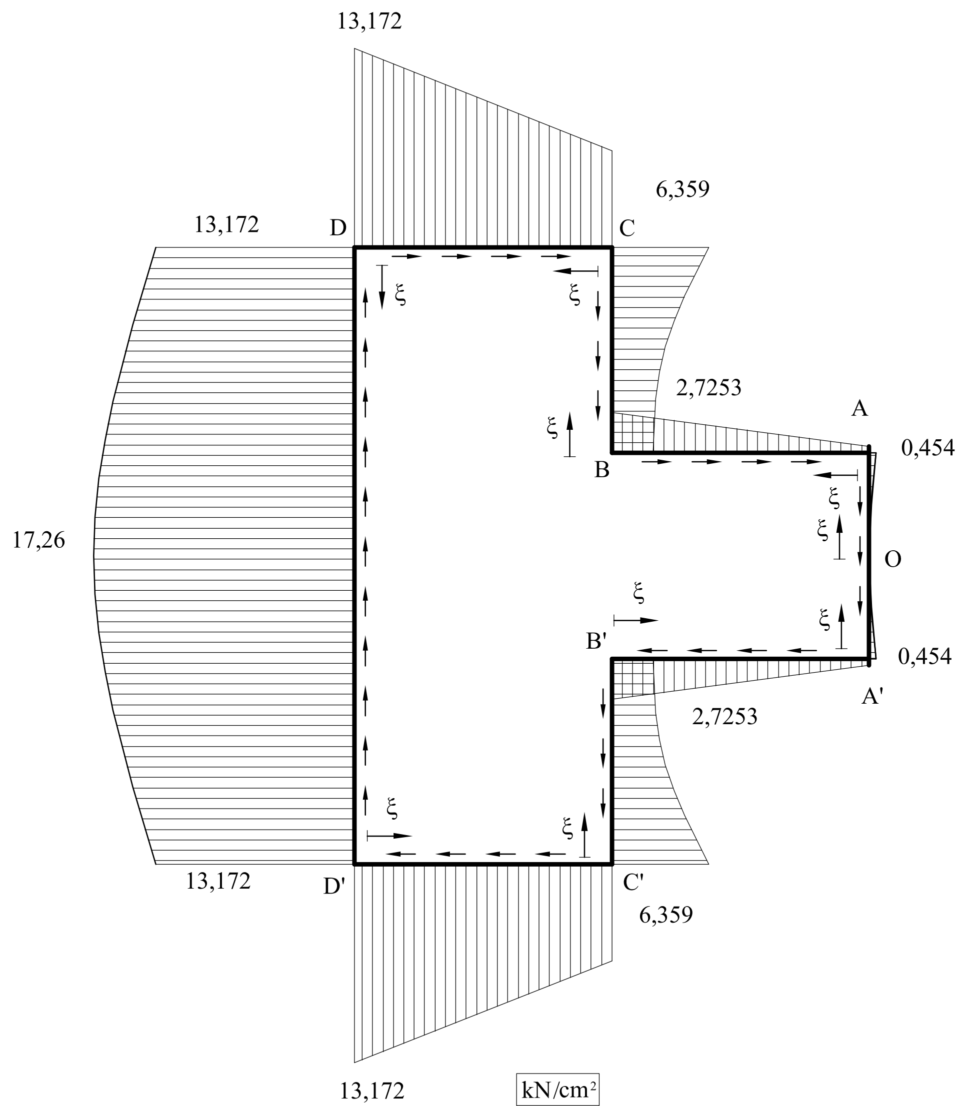


Fig. 2 Distribución de tensiones tangenciales en la sección abierta

$$\tau_a \Big|_C^D = -\frac{Q}{I}\left(448 + 24\,\xi\right) = -6{,}359 - 0{,}34066\;\xi$$

$$\tau_a \Big|_D^{D'} = -\frac{Q}{I}\left[928 + \xi\left(24 - \frac{\xi}{2}\right)\right] = -13{,}172 - 0{,}34066\,\xi + 0{,}007097\,\xi^2$$

$$\tau_a \Big|_{D'}^{C'} = -\frac{Q}{I}\left(928 - 24\,\xi\right) = -13{,}172 + 0{,}34066\;\xi$$

$$\tau_a\Big|_{C'}^{B'} = -\frac{Q}{I}\left[448 - \xi\left(24 - \frac{\xi}{2}\right)\right] = -6{,}359 + 0{,}34066\,\xi - 0{,}007097\,\xi^2$$

$$\tau_a\Big|_{B'}^{A'} = -\frac{Q}{I}\left(192 - 8\xi\right) = -2{,}7253 + 0{,}114\,\xi$$

$$\tau_a\Big|_{A'}^{0} = -\frac{Q}{I}\left[32 - \xi\left(8 - \frac{\xi}{2}\right)\right] = -0{,}454 + 0{,}11355\,\xi - 7{,}097\times 10^{-3}\,\xi^2$$

La integral a lo largo de todas las paredes de la sección de las tensiones tangenciales de la sección abierta vale

$$\oint \tau_a\, d\,\xi = -1355{,}41\, kN/cm$$

Por otro lado:

$$\oint \tau_0\, d\,\xi = \tau_0 \times \left(16 + 20 + 16 + 20 + 3\times 16 + 20 + 16 + 20\right) = 176\,\tau_0$$

Con lo cual:

$$\tau_0 = \frac{1355{,}41}{176} = 7{,}7\, kN/cm^2$$

En la figura 3 puede verse la distribución de las tensiones tangenciales hiperestáticas.

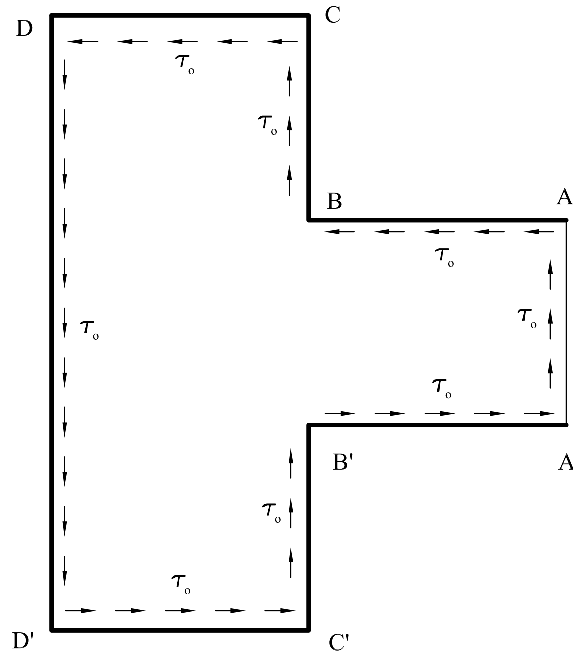


Fig. 3 Distribución de tensiones tangenciales hiperestáticas

La distribución final de tensiones tangenciales se escribe:

$$\tau\Big|_0^A = \tau_a\Big|_0^A + \tau_0 = 7{,}7 - 14{,}194\times 10^{-3}\ \xi$$

$$\tau\Big|_A^B = 7{,}246 - 0{,}114\,\xi$$

$$\tau\Big|_B^C = 4{,}9747 - 0{,}11355\,\xi - 7{,}097\times 10^{-3}\ \xi^2$$

$$\tau\Big|_C^D = 1{,}341 - 0{,}34066\,\xi$$

$$\tau\Big|_D^{D'} = -5{,}472 - 0{,}34066\,\xi + 0{,}007097\,\xi^2$$

$$\tau\Big|_{D'}^{C'} = -5{,}472 + 0{,}34066\,\xi$$

$$\tau\Big|_{C'}^{B'} = 1{,}341 + 0{,}34066\,\xi - 0{,}007097\,\xi^2$$

$$\tau\Big|_{B'}^{A'} = 4{,}9747 + 0{,}114\,\xi$$

$$\tau\Big|_{A'}^{0} = 7{,}246 + 0{,}11355\,\xi - 7{,}097\times 10^{-3}\ \xi^2$$

En la figura 4 puede verse dibujada la distribución final de tensiones tangenciales.

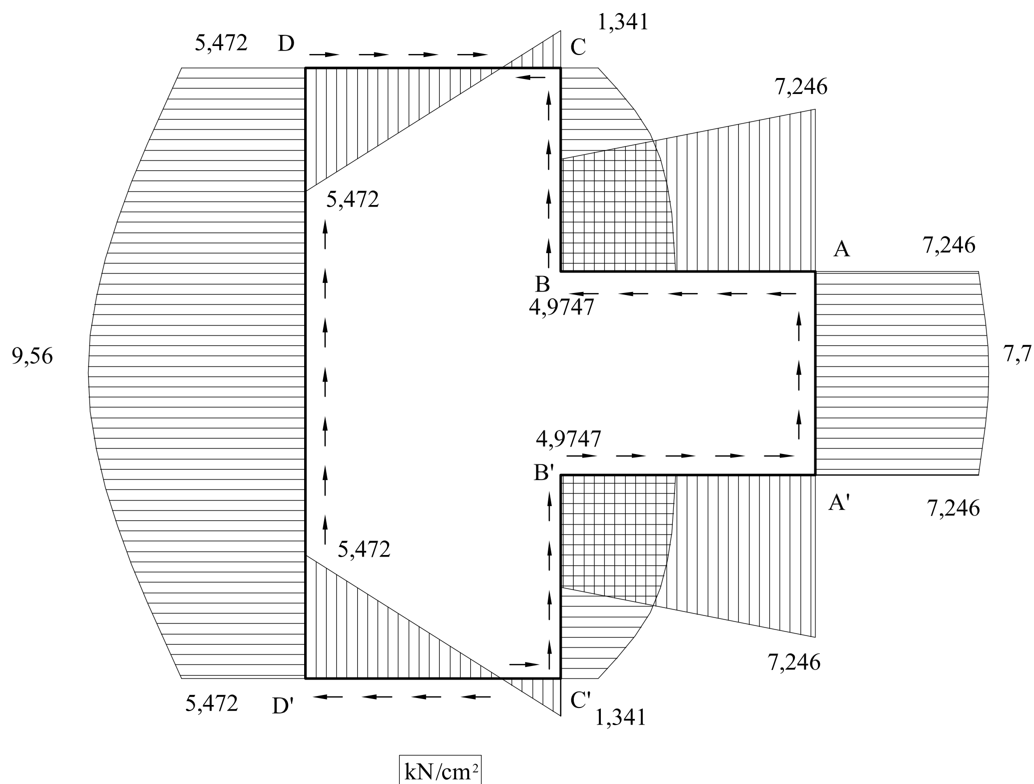


Fig. 4 Distribución final de tensiones tangenciales

Problema 5.27 *En la sección en cajón que muestra la figura 1 actúa un esfuerzo cortante vertical descendente de valor* $Q = 2\ 000\ kN$ *. El espesor en las alas es doble que en las almas, siendo el de estas últimas de 1,5 cm.*

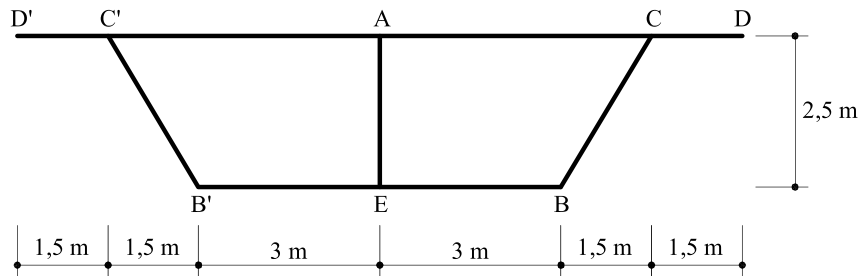


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 5.27

Hallar:

- *Distribución de tensiones tangenciales.*
- *Movimiento relativo del punto B especto al punto A (*$G = 87{,}5\ GPa$*).*
- *Energía de deformación y valor de la sección reducida.*

Solución

El c.d.g. está en el eje vertical de simetría y situado a 1,59 metros de la fibra inferior. El momento de inercia respecto a un eje horizontal que pasa por el c.d.g. vale

$$I = 0{,}8327\ m^4 = 0{,}8327 \times 10^8\ cm^4$$

Puesto que la sección es simétrica respecto a un eje vertical que pasa por el c.d.g. se escribirá la distribución de tensiones tangenciales únicamente en media sección.
Como la sección es cerrada, se abre dando sendos cortes en los puntos medios de *AC* y *AC'* e introduciendo unas tensiones hiperestáticas τ_0.
En la sección abierta, la distribución de tensiones tangenciales se escribe (figura 2a).

$$\tau_a \Big|_O^A = \tau \Big|_O^C = \tau_a \Big|_C^D = \frac{2\ 000 \times 3 \times 91\ \xi}{3 \times 0{,}8327 \times 10^8} = 0{,}217 \times 10^{-2}\ \xi$$

$$\tau_a \Big|_A^E = \frac{2\ 000 \times \left[2 \times 3 \times 91 \times 225 + 1{,}5\ \xi\ (91 - \xi/2)\right]}{1{,}5 \times 0{,}8327 \times 10^8} = 1{,}953 + 0{,}217 \times 10^{-2} \xi - 0{,}119 \times 10^{-4}\ \xi^2$$

$$\tau_a \Big|_E^B = 0{,}44 + \frac{2\ 000 \times 3 \times (-159\ \xi)}{3 \times 0{,}8327 \times 10^8} = 0{,}44 - 0{,}38 \times 10^{-2}\ \xi$$

$$\tau_a \Big|_C^B = \frac{2\,000 \times [3 \times 91 \times 225 + 3 \times 91 \times 150 + 1{,}5\;\xi\;(91 - \xi \cos\;\beta/2)]}{1{,}5 \times 0{,}8327 \times 10^8} =$$

$$1{,}626 + 0{,}217 \times 10^{-2}\,\xi - 0{,}1022 \times 10^{-4}\;\xi^2$$

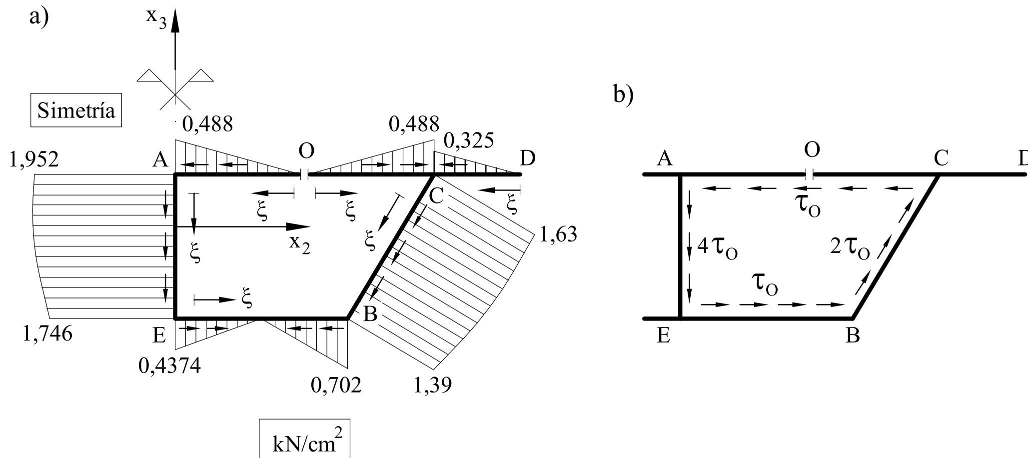


Fig. 2 Distribución de tensiones: a) Sección abierta b) Tensiones hiperestática

Debe cumplirse que a la integral cerrada a lo largo del circuito *AEBC* sea nula

$$\oint_{AEBC} \gamma\; d\xi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \oint_{AEBC} \tau\; d\xi = 0$$

Es decir:

$$\int_{AE} \left(\tau_a \Big|_A^E + 4\;\tau_0 \right) d\xi + \int_{EB} \left(\tau_a \Big|_E^B + \tau_0 \right) d\xi + \int_B^C \left(-\tau_a \Big|_B^C + 2\;\tau_0 \right) d\xi + \int_C^A \tau_0\;\, d\xi = 0$$

y sustituyendo los valores e integrando

$$-208{,}76 + 1\,884\;\tau_0 = 0$$

es decir,

$$\tau_0 = 0{,}111\;kN/cm^2 = 1{,}11\;MPa$$

La distribución final de tensiones será:

$$\tau \Big|_C^D = 0{,}217 \times 10^{-2}\,\xi$$

$$\tau \Big|_O^A = 0{,}111 + 0{,}217 \times 10^{-2}\,\xi$$

$$\tau\Big|_O^C = -0{,}111 + 0{,}217\times 10^{-2}\,\xi$$

$$\tau\Big|_A^E = 2{,}39 + 0{,}217\times 10^{-2}\,\xi - 0{,}12\times 10^{-4}\,\xi^2$$

$$\tau\Big|_E^B = 0{,}546 - 0{,}38\times 10^{-2}\,\xi$$

$$\tau\Big|_B^C = 1{,}41 + 0{,}217\times 10^{-2}\,\xi - 0{,}1022\times 10^{-4}\,\xi^2$$

En la figura 3 puede verse representada la distribución final de tensiones.

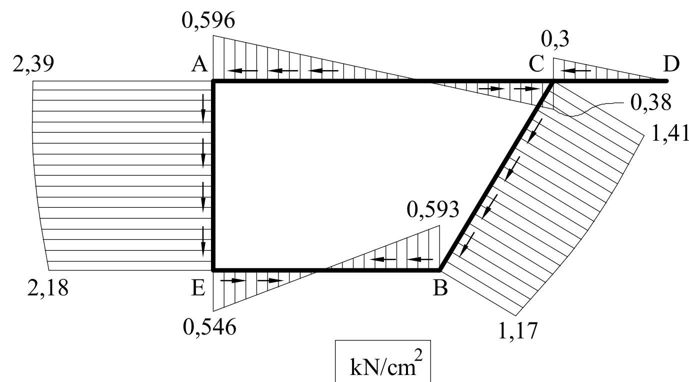


Fig. 3 Distribución de tensiones tangenciales

El movimiento relativo del punto *B* respecto a *A* valdrá

$$\delta_{AB} = \int_{AE} \frac{\tau}{G}\,d\xi + \int_{EB} \frac{\tau}{G}\,d\xi = \frac{595{,}6\ kN/cm}{87{,}5\ GPa} = 0{,}681\ mm$$

La energía de deformación debida al esfuerzo cortante se puede escribir

$$W_Q = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{G\,(kA)} = \frac{1}{2}\int \tau\,\gamma\,dA = \frac{1}{2}\int \frac{\tau^2}{G}\,e\,d\xi$$

siendo kA la sección reducida. Es decir:

$$kA = \frac{Q^2}{\int \tau^2 e\,d\xi}$$

La integral del denominador vale:

$$\int \tau^2 e\, d\xi = 2\int_{CD} 3\,\tau^2 d\xi + 2\int_{OA} 3\,\tau^2 d\xi + 2\int_{OC} 3\,\tau^2 d\xi + \int_{AE} 1{,}5\,\tau^2 d\xi + 2\int_{EB} 3\,\tau^2 d\xi +$$
$$+ 2\int_{BC} 1{,}5\,\tau^2 d\xi$$

y sustituyendo:

$$\int \tau^2 e\, d\xi = 4\ 473{,}5$$

Con lo cual, la sección reducida valdrá:

$$kA = \frac{(2\ 000)^2}{4\ 473{,}5} = 894{,}15\ cm^2$$

Problema 5.28 *La sección de paredes delgadas de la figura 1 está sometida a un cortante vertical ascendente de valor 150 kN.*

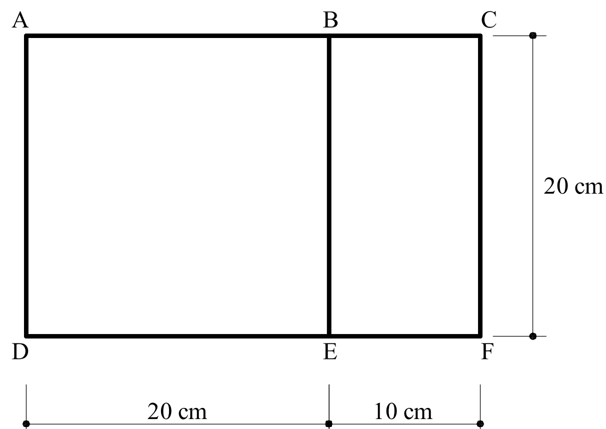


Fig.1 Sección correspondiente al problema 5.28

El espesor de las paredes verticales es de 0,5 cm y el de las horizontales 0,8 cm.

1. *Tomando como incógnitas hiperestáticas las tensiones tangenciales en los puntos más cercanos a B de las paredes AB y BC, hallar:*

   a) *La distribución de tensiones tangenciales de la sección abierta, indicando*
      - *Expresión analítica de las leyes, indicando claramente las coordenadas locales elegidas.*
      - *Dibujo de las tensiones señalando los valores más significativos y el sentido de las tensiones.*

   b) *Valor y sentido de la distribución de tensiones tangenciales debido a las tensiones tangenciales hiperestáticas.*

   c) *La distribución de tensiones tangenciales de la sección cerrada con las mismas indicaciones señaladas en el apartado a).*

2. *Energía de deformación de la pieza AD. (E = 210 GPa , ν = 0,2)*

Solución

El momento de inercia respecto a un eje horizontal que pase por el c.d.g. vale $I_1 = 5800\ cm^4$. La distribución de tensiones tangenciales en la sección abierta valdrá (ver figura 2) (se usan como unidades el MN y el m).

$$\tau_a\Big|_A^B = -\frac{0{,}15\times 0{,}1\ \xi}{5\ 800\times 10^{-8}} = -258{,}62\ \xi$$

$$\tau_a\Big|_A^D = -\frac{258{,}62\times 0{,}2\times 0{,}008}{0{,}005} - \frac{0{,}15\ \xi\ (0{,}1-\xi/2)}{5\ 800\times 10^{-8}} = -82{,}759 - 2\ 586{,}2\ \xi\ (0{,}1-\xi/2)$$

$$\tau_a\Big|_E^D = -\frac{\left[82{,}759 + 2\,586{,}2\times 0{,}2\times\left(0{,}1-\dfrac{0{,}2}{2}\right)\right]\times 0{,}005}{0{,}008} + \frac{\xi\times 0{,}1\times 0{,}15}{5\,800\times 10^{-8}} = -51{,}724 + 258{,}6\,\xi$$

$$\tau_a\Big|_B^E = -2\,586{,}2\,\xi\,\left(0{,}1-\xi/2\right)$$

$$\tau_a\Big|_B^C = -258{,}6\,\xi$$

$$\tau_a\Big|_C^F = -\frac{258{,}6\times 0{,}1\times 0{,}008}{0{,}005} - \frac{0{,}15\,\xi\,\left(0{,}1-\xi/2\right)}{5\,800\times 10^{-8}} = 41{,}376 - 2\,586{,}2\,\xi\left(0{,}1-\xi/2\right)$$

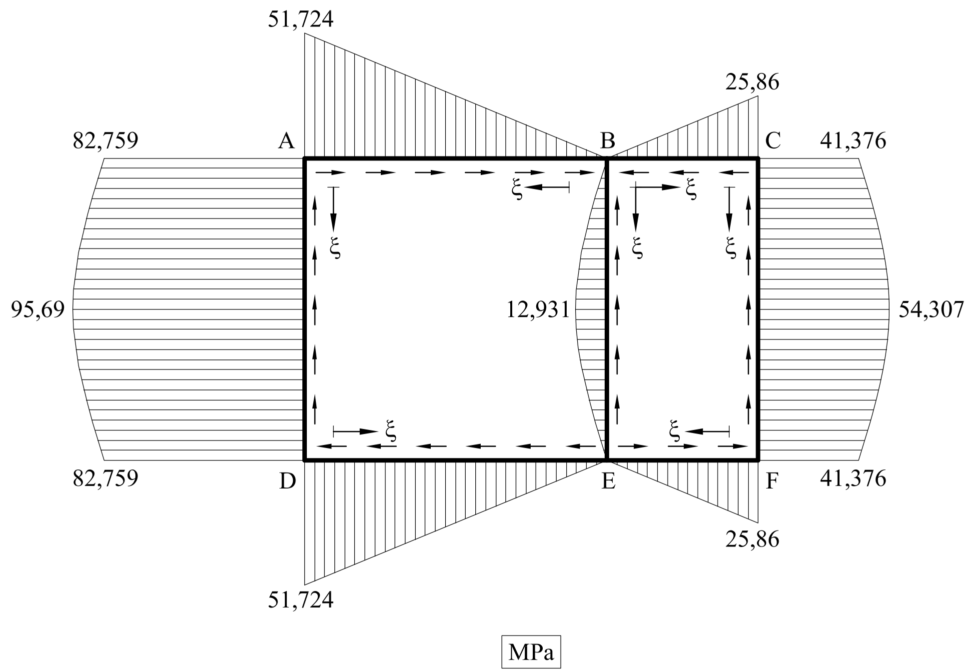


Fig. 2 Distribución de tensiones tangenciales en la sección abierta

La distribución de tensiones tangenciales debido a las incógnitas hiperestáticas τ_1 y τ_2 pueden verse representados en la figura 3.
Por lo cual, integrando a través del circuito *ADEB*

$$\oint_{ADEB}\left(\tau_a+\tau_{hip}\right)d\Gamma = 0{,}2\,\tau_1 + 1{,}6\,\tau_1\times 0{,}2 + \tau_1\times 0{,}2 + 1{,}6\,\left(\tau_1+\tau_2\right)\times 0{,}2 -$$

$$-\,2\times 51{,}724\times 0{,}2\times\frac{1}{2} - 82{,}759\times 0{,}2 = 1{,}04\,\tau_1 + 0{,}32\,\tau_2 - 26{,}8966 = 0$$

lo cual constituye la primera ecuación.

La segunda ecuación se obtiene de integrar a lo largo del circuito cerrado *BEFC.*

$$\oint_{BEFC} \left(\tau_a + \tau_{hip}\right) d\Gamma = -0{,}1\,\tau_2 - 1{,}6\,\tau_2 \times 0{,}2 - 1{,}6\,(\tau_1 + \tau_2) \times 0{,}2 + 2 \times 25{,}86 \times 0{,}1 \times \frac{1}{2} +$$
$$+ 41{,}376 \times 0{,}2 = -(0{,}32\,\tau_1 + 0{,}84\,\tau_2) + 10{,}8612 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\tau_1 = 24{,}789\ MPa$$

$$\tau_2 = 3{,}486\ MPa$$

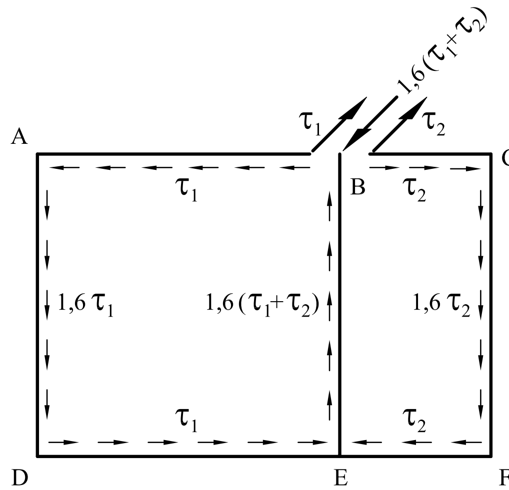


Fig. 3 Distribución de tensiones tangenciales debido a las hiperestáticas

$$\tau\Big|_B^A = \tau_a + \tau_1 = -258{,}62\,\xi + 24{,}789$$

$$\tau\Big|_A^D = \tau_a + 1{,}6\,\tau_1 = -2\,586{,}2\,\xi(0{,}1 - \xi/2) - 43{,}097$$

$$\tau\Big|_E^D = \tau_a + \tau_1 = 258{,}6\,\xi - 26{,}935$$

$$\tau\Big|_B^E = \tau_a - 1{,}6(\tau_1 + \tau_2) = -2\,586{,}2\,\xi\,(0{,}1 - \xi/2) - 45{,}24$$

$$\tau\Big|_B^C = \tau_a + \tau_2 = -258{,}6\,\xi + 3{,}486$$

$$\tau\Big|_C^F = \tau_a + 1{,}6\,\tau_2 = -2\,586{,}2\,\xi + (0{,}1 - \xi/2) - 35{,}798$$

En la figura 4 puede verse la distribución final de tensiones tangenciales.

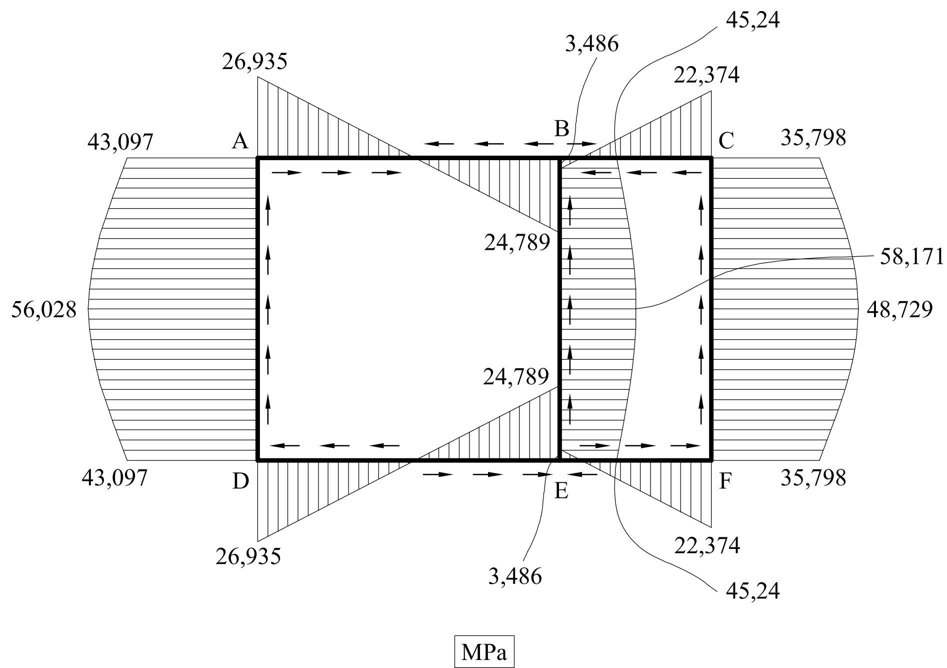


Fig. 4 Distribución final de tensiones tangenciales.

Problema 5.29 *Hallar la distribución de tensiones tangenciales en la sección de la figura 1 cuando un esfuerzo cortante vertical ascendente de valor 500 kN actúa en la sección.*

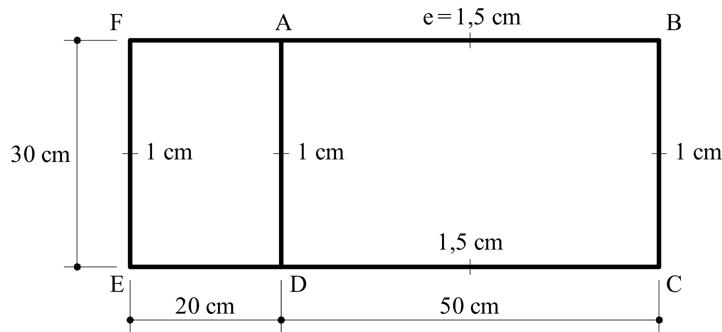


Fig. 1 Sección correspondientes al problema 5.29

El esfuerzo cortante pasa por el centro de esfuerzos cortantes. Determinar asimismo la posición de éste.

Solución

El momento de inercia respecto a un eje horizontal que pasa por el c.d.g. vale

$$I = 54.000 \ cm^4$$

Dado que existen dos celdas cerradas, existirán dos tensiones tangenciales hiperestáticas. Para calcularlas, se realizan los dos cortes de la figura 2

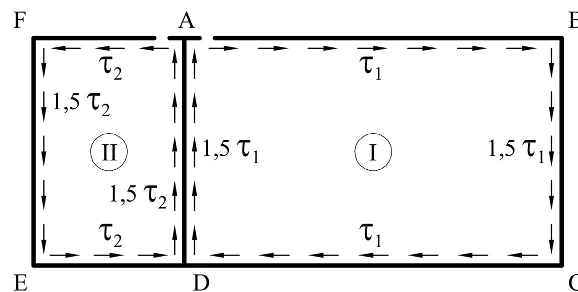


Fig.2 Tensiones tangenciales hiperestáticas

La distribución de tensiones tangenciales en la sección abierta valdrá (figura 3).

$$\tau\Big|_A^B = -\frac{Q \, m_e}{e \, I} = -\frac{500 \times 1{,}5 \times 15 \, \xi}{1{,}5 \times 54.000} = -0{,}13889 \, \xi$$

$$\tau_a\Big|_B^C = -\frac{500 \times 1 \times \left[1.125 + \xi(15 - \xi/2)\right]}{1 \times 54.000} = -10{,}41667 - 0{,}00926\xi(15 - \xi/2)$$

$$\tau_a\Big|_D^C = -\frac{500\times\left(1.125-1,5\times 15\ \xi\right)}{1,5\times 54.000} = -6,944+0,13889\ \xi$$

$$\tau_a\Big|_D^A = 0,00926\ \xi\ \left(15-\xi/2\right)$$

$$\tau_a\Big|_A^F = -0,13889\ \xi$$

$$\tau_a\Big|_F^E = -4,1667-0,00926\ \xi\ \left(15-\xi/2\right)$$

$$\tau_a\Big|_E^D = -2,778+0,13889\ \xi$$

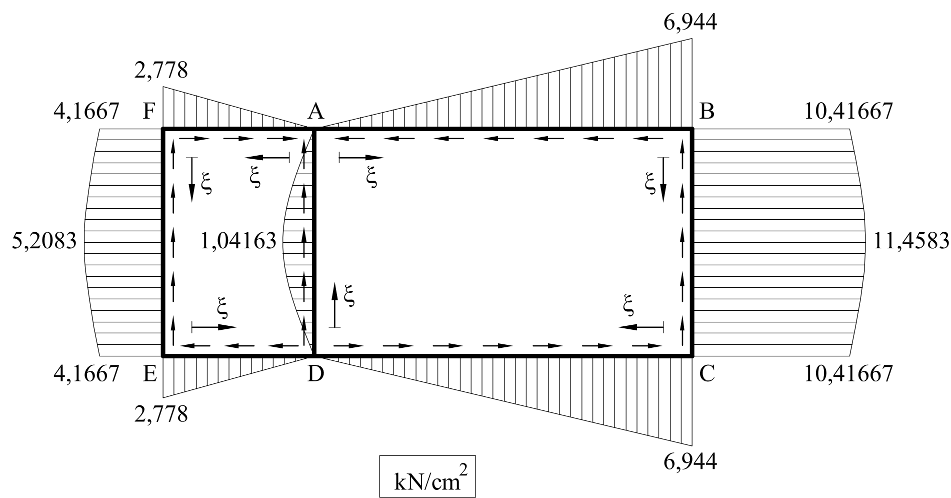


Fig.3 Distribución de tensiones en la sección abierta (unidades: kN/cm²)

Imponiendo las condiciones

$$\oint_I \frac{\tau}{G}\ d\xi = 0$$

$$\oint_{II} \frac{\tau}{G}\ d\xi = 0$$

siendo τ las tensiones totales (suma de las correspondientes a la sección abierta más las hiperestáticas), se obtiene:

$$190\ \tau_1 + 45\ \tau_2 = 659,70$$

$$45\ \tau_1 + 130\ \tau_2 = 180,556$$

Es decir,

$$\tau_1 = 3,424\ kN/cm^2 \qquad\qquad \tau_2 = 0,204\ kN/cm^2$$

La distribución final de tensiones tangenciales se escribirá:

$$\tau\Big|_A^B = \tau_a\Big|_A^B + \tau_1 = 3{,}424 - 0{,}13889\ \xi$$

$$\tau\Big|_B^C = \tau_a\Big|_B^C + 1{,}5\ \tau_1 = -5{,}281 - 0{,}00926\ \xi(15 - \xi/2)$$

$$\tau\Big|_C^D = \tau_a\Big|_C^D + \tau_1 = -3{,}52 + 0{,}13889\ \xi$$

$$\tau\Big|_A^D = \tau_a\Big|_A^D + 1{,}5\ \tau_1 + 1{,}5\ \tau_2 = 5{,}442 + 0{,}00926\ \xi(15 - \xi/2)$$

$$\tau\Big|_A^F = \tau_a\Big|_A^F + \tau_2 = 0{,}204 - 0{,}13889\ \xi$$

$$\tau\Big|_E^F = \tau_a\Big|_E^F + 1{,}5\ \tau_2 = -3{,}86 - 0{,}00926\ \xi(15 - \xi/2)$$

$$\tau\Big|_E^D = \tau_a\Big|_E^D + \tau_2 = -2{,}574 + 0{,}13889\ \xi$$

En la figura 4 puede verse la distribución final de tensiones tangenciales

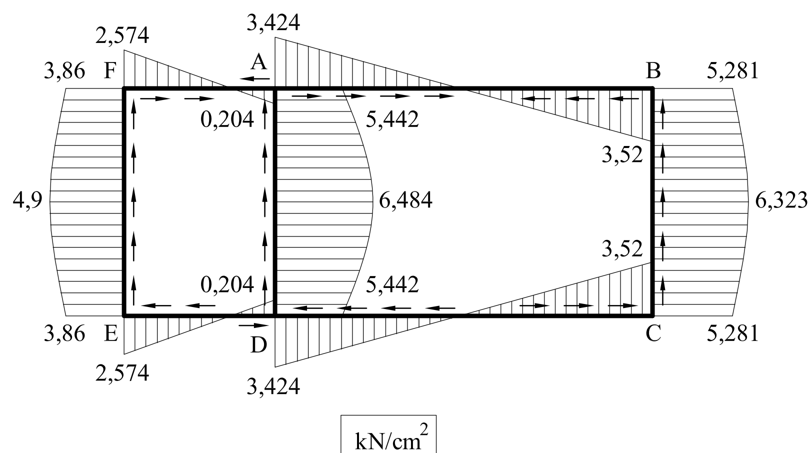


Fig. 4 Distribución final de las tensiones tangenciales.

Para determinar el centro de esfuerzos cortantes, se toman momentos de todas las tensiones respecto al punto *D*.

$$M_{tens} = 5.273{,}55$$

El momento respecto al punto *D*, producido por el cortante $Q = 500\ kN$ situado en el centro de esfuerzos cortantes vale

$$M_Q = 500\ x_C$$

Igualando

$$x_C = 10{,}56 \; cm \quad \left(a \; la \; derecha \; de \; D \right)$$

Problema 5.30 *La sección indicada en la figura está sometida a un esfuerzo cortante vertical ascendente Q = 400 kN. El espesor de todas las paredes es constante y vale 1 cm.*

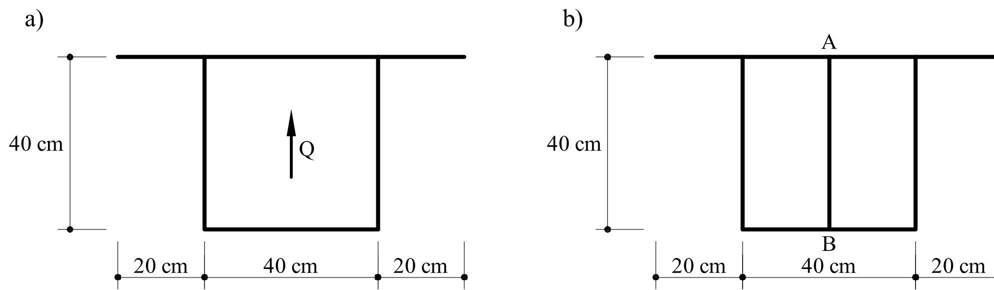


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 5.30

Una vez cargada la sección, se suelda la chapa AB también de 1 cm. de espesor, descargándose seguidamente la sección.

Determinar la distribución de tensiones tangenciales una vez la sección ha sido descargada.

Solución

El centro de gravedad de la sección a) está situado a 26 cm de la fibra inferior, y el momento de inercia I_2^a respecto a un eje horizontal que pasa por el centro de gravedad vale I_2 = 55467 cm^4. Por lo que respecta a la sección b) el centro de gravedad se sitúa a 23,33 cm. de la fibra inferior y el momento de inercia vale $I_2^b = 61333\ cm^4$.

En adelante las mismas que se utilizarán sin el meganewton (MN) y el metro (m).

Dado que en los puntos de corte del eje vertical de simetría con la sección las tensiones tangenciales son nulas, se puede escribir (ver figura 2).

$$\tau\Big|_A^E = \tau\Big|_E^C = -\frac{0{,}16\ \xi \times 0{,}4}{55\ 467 \times 10^{-8}} = -115{,}38\ \xi$$

$$\tau\Big|_E^D = -2 \times 115{,}38 \times 0{,}2 - \frac{0{,}4\ \xi(0{,}16 - \xi/2)}{55\ 467 \times 10^{-8}} = -46{,}15 - 721{,}15\ \xi(0{,}16 - \xi/2)$$

$$\tau\Big|_B^D = -\frac{0{,}24\ \xi \times 0{,}4}{55\ 467 \times 10^{-8}} = 173{,}08\ \xi$$

Se introduce seguidamente la pared *AB*, proceso en el cual no se generan tensiones.

Seguidamente se retira el esfuerzo cortante *Q*, lo cual es lo mismo que mantenerlo y aplicar un esfuerzo igual y de sentido contrario *–Q*. Para hallar la nueva distribución de tensiones tangenciales producidas por *–Q* se corta la sección por el punto *A* de las paredes *AE* y *AE´*, introduciéndose dos tensiones tangenciales hiperestáticas (figura 3) que por simetría serán iguales.

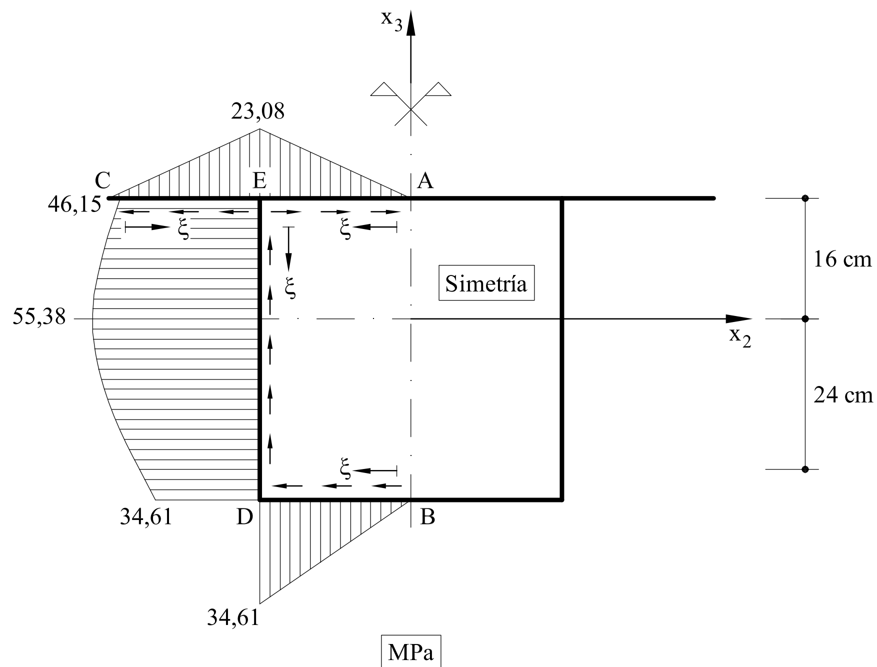


Fig. 2 Distribución de tensiones tangenciales en la sección a)

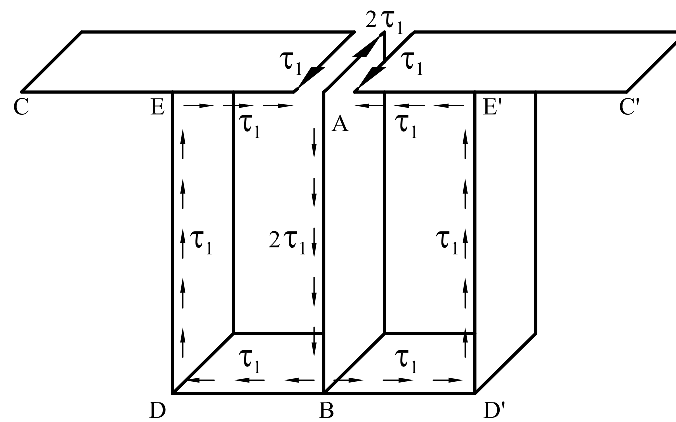


Fig.3 tensiones tangenciales hiperestáticas

Se determina en primer lugar la distribución de tensiones tangenciales en la sección abierta (figura 4).

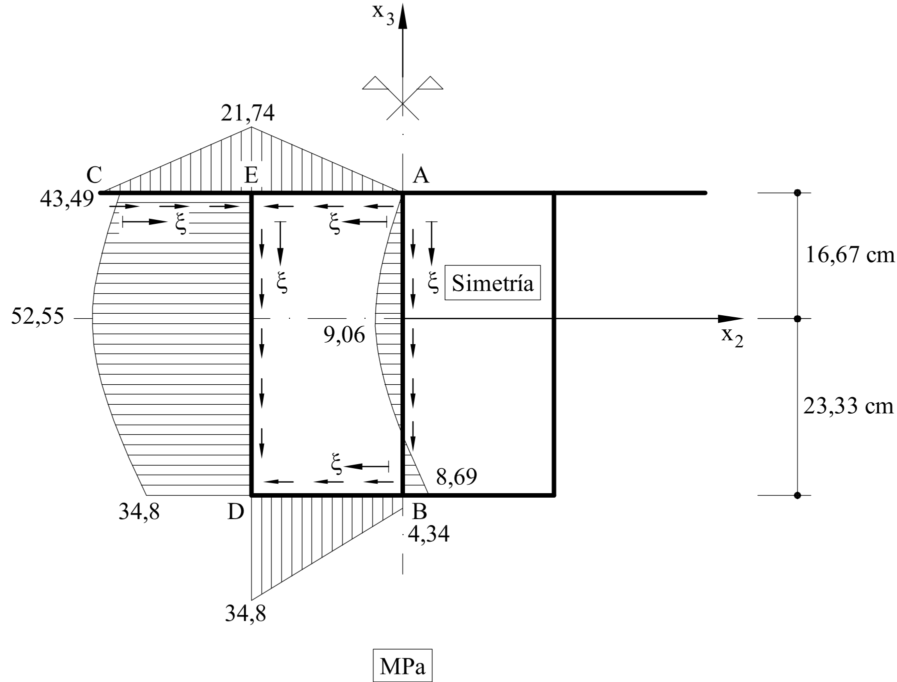


Fig. 4 Distribución de tensiones tangenciales en la sección b) abierta

$$\tau_a\Big|_A^E = \tau_a\Big|_C^E = \frac{0{,}1667 \times \xi \times 0{,}4}{61\,333 \times 10^{-8}} = 108{,}72\,\xi$$

$$\tau_a\Big|_D^E = 2 \times 108{,}72 \times 0{,}2 + \frac{0{,}4\,\xi(0{,}1667 - \xi/2)}{61\,333 \times 10^{-8}} = 43{,}49 + 652{,}18\,\xi\,(0{,}1667 - \xi/2)$$

$$\tau_a\Big|_A^B = \frac{0{,}4\,\xi\,(0{,}1667 - \xi/2)}{61\,333 \times 10^{-8}} = 652{,}18\,\xi\,(0{,}1667 - \xi/2)$$

$$\tau_a\Big|_B^D = 652{,}18 \times 0{,}4 \times (0{,}1667 - 0{,}4/2)\frac{1}{2} - \frac{0{,}2323\,\xi \times 0{,}4}{61\,333 \times 10^{-8}} = -4{,}34 - 151{,}5\,\xi$$

Para determinar el valor de la incógnita hiperestática se impondrá la condición de que el desplazamiento relativo entre ambos labios del corte sea nulo, es decir

$$\oint_{AEDBA} \frac{\tau_a + \tau_{hip}}{G}\, d\Gamma = 0$$

$$\oint_{AEDBA} (\tau_a + \tau_{hip})\frac{d\Gamma}{G} = \frac{23{,}484 - (0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}4 \times 2)\,\tau_1}{G} = 0$$

De donde se obtiene $\tau_1 = 14{,}68\ MPa$

Por lo tanto, la distribución de tensiones tangenciales debidas al proceso de descarga será (ver figura 5).

$$\tau\Big|_A^E = \tau_a\Big|_A^E - \tau_1 = -14{,}68 + 108{,}72\ \xi$$

$$\tau\Big|_E^C = \tau_a\Big|_E^C = 108{,}72\ \xi$$

$$\tau\Big|_D^E = \tau_a\Big|_D^E - \tau_1 = 28{,}81 + 652{,}18\ \xi\left(0{,}1667 - \xi/2\right)$$

$$\tau\Big|_A^B = \tau_a\Big|_A^B + 2\tau_1 = 29{,}36 + 652{,}18\ \xi\left(0{,}1667 - \xi/2\right)$$

$$\tau\Big|_B^D = \tau_a\Big|_A^B + \tau_1 = 10{,}34 - 151{,}5\ \xi$$

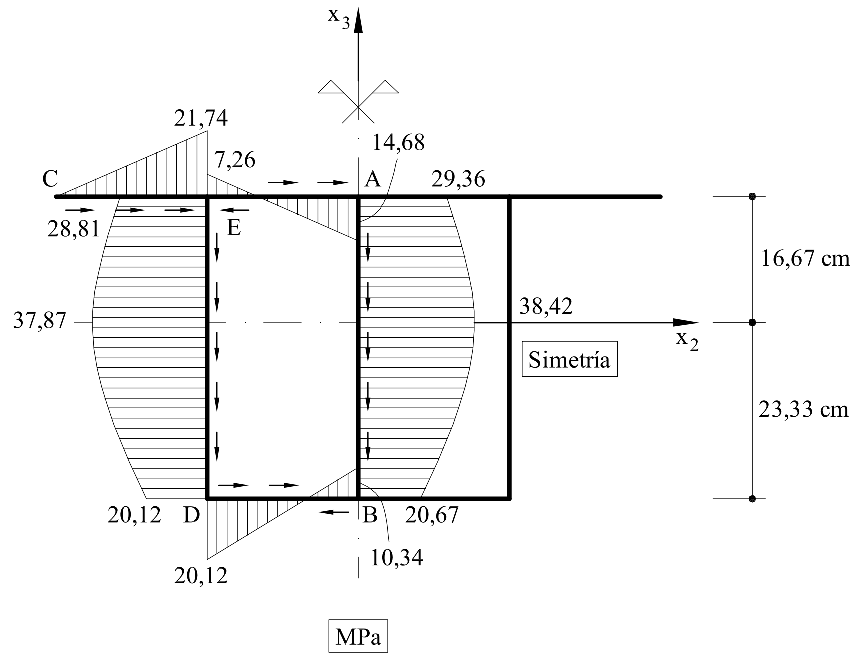


Fig. 5 Distribución de tensiones tangenciales producidas por la descarga

Las tensiones finales se obtendrán sumando las tensiones producidas por *Q = 0,40 MN* en la sección a), a las producidas por *Q = -0,40 MN* en la sección b), es decir

$$\tau\Big|_A^E = -115{,}38\ \xi - 14{,}68 + 108{,}72\ \xi = -14{,}68 - 6{,}66\ \xi$$

$$\tau\Big|_E^C = -115{,}38\ \xi + 108{,}72\ \xi = -6{,}66\ \xi$$

$$\tau\Big|_D^E = -46{,}15 - 721{,}15\ \xi\ \left(0{,}16 - \xi/2\right) + 28{,}81 + 652{,}18\ \xi\ \left(0{,}1667 - \xi/2\right) = -17{,}34 - 6{,}666\ \xi + 34{,}485\ \xi^2$$

$$\tau\Big|_D^B = 173{,}08\ \xi + 10{,}34 - 151{,}5\ \xi = 10{,}34 + 21{,}58\ \xi$$

$$\tau\Big|_A^B = 29{,}36 + 652{,}18\ \xi\ \left(0{,}1667 - \xi/2\right)$$

En la figura 6 puede verse representada la anterior ley de tensiones tangenciales.

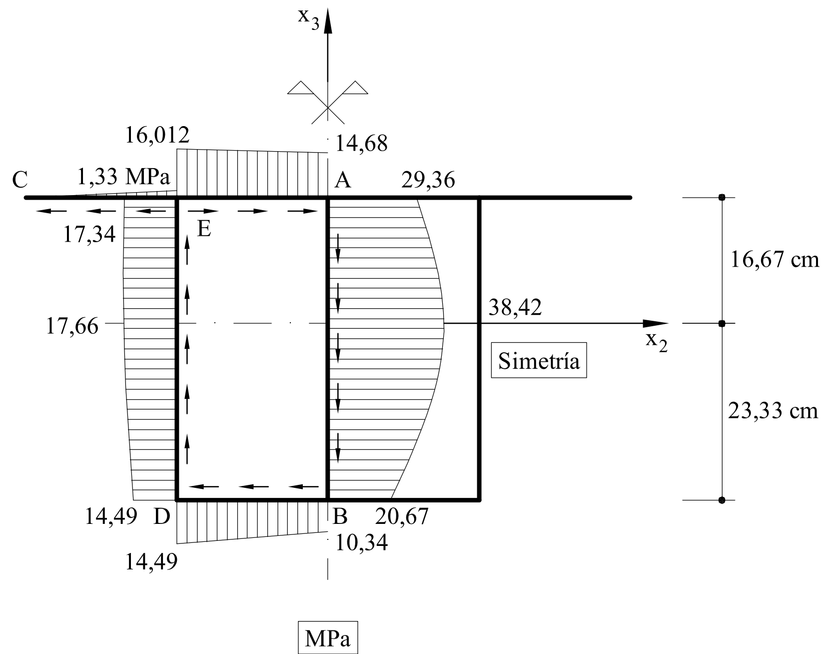


Fig. 6 Valor final de las tensiones tangenciales

Problema 5.31 *En el centro de gravedad de la sección de la figura 1 actúa un cortante ascendente Q. Hallar el valor de Q, considerando que la tensión tangencial máxima es de* $240/\sqrt{3}$ *MPa.*

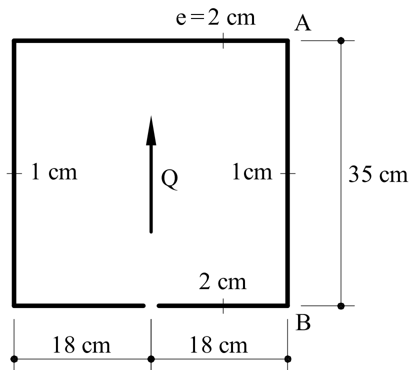


Fig.1 Sección abierta

Después de la aplicación del cortante Q, se suelda en el lado AB del perfil de la figura 1 una pieza de paredes delgada cerrada, de sección rectangular. Resulta la sección de la figura 2. El material de las dos piezas es el mismo.

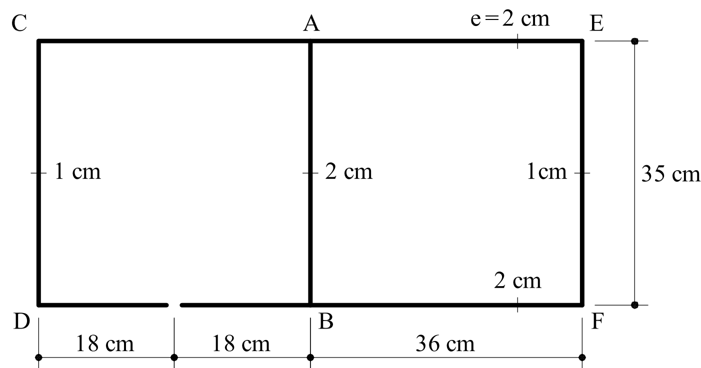


Fig.2 Sección ampliada

Una vez soldadas las dos piezas se libera la fuerza Q. Hallar la distribución final de tensiones tangenciales (se prescindirá de los efectos debidos al momento torsor).

Solución

El momento de inercia de la sección abierta respecto a un eje horizontal que pasa por el centro de gravedad vale

$$I_2 = 51.246 \; cm^4$$

Dado que la sección abierta es simétrica, es suficiente con calcular la distribución de tensiones de la mitad de la misma. La distribución de tensiones tangenciales viene dada por la expresión

$$\tau = -\frac{Q\, m_{e2}}{e\, I_2}$$

$$\tau\Big|_A^C = -\frac{Q}{e\, I_2}\; e \times 17{,}5 \times \xi = -\frac{Q}{I_2}\, 17{,}5\; \xi = -0{,}0003415\; Q\; \xi$$

$$\tau\Big|_A^B = -\frac{Q}{I_2}\left[2 \times 18 \times 17{,}5 + \xi\,(17{,}5 - \xi/2)\right] = -\left[0{,}0123 + 0{,}000019513\; \xi(17{,}5 - \xi/2)\right] Q$$

$$\tau\Big|_B^D = (-\,0{,}006147 + 0{,}0003415\; \xi)\, Q$$

La tensión máxima se produce en el punto medio de *AB* y vale *-0,01529 Q*.
Igualando la máxima tensión tangencial a la tensión admisible:

$$0{,}01529\; Q = \frac{240}{\sqrt{3}}\; MPa = \frac{24}{\sqrt{3}}\, \frac{kN}{cm^2}$$

$$Q = 906{,}24\; kN$$

En la figura 3 se puede ver la distribución de tensiones tangenciales.

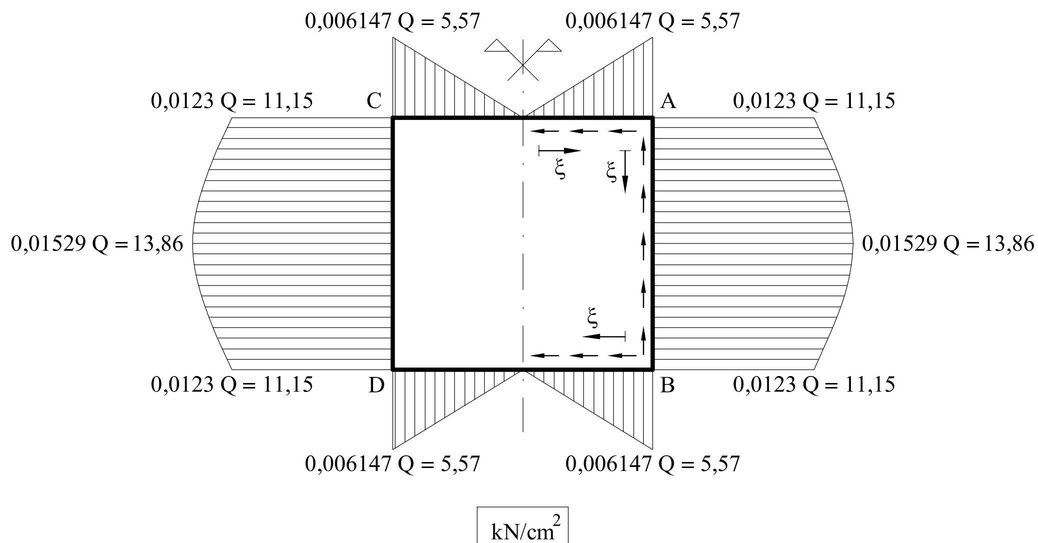


Fig. 3 Distribución de tensiones tangenciales en la sección abierta

Cuando se juntan las dos piezas y se elimina el cortante *Q*, el efecto es el mismo que dejarlo y aplicar un esfuerzo cortante igual y de sentido contrario. Para hallar la distribución de tensiones tangenciales es preciso dar un corte (en este caso por *H*) e introducir una tensión tangencial hiperestática τ_0.

El momento de inercia I_2' de la nueva sección valdrá

$$I_2' = 102.492\; cm^4$$

La distribución de tensiones tangenciales de la sección ampliada, abierta serán (figura 4).

$$\tau_a\Big|_E^F = \tau_a\Big|_A^E = \tau_a\Big|_A^C = \tau_a\Big|_{A'}^{B'} = 0{,}00017075\ Q\ \xi = 0{,}15474\ \xi$$

$$\tau_a\Big|_F^G = \tau_a\Big|_A^B = \tau_a\Big|_{A'}^{B'} = \left[0{,}00615 + 0{,}000009756\ \xi\left(17{,}5 - \xi/2\right)\right] Q = 5{,}57 + 0{,}00884\ \xi\ \left(17{,}5 - \xi/2\right)$$

$$\tau\Big|_H^G = \tau\Big|_B^H = \tau\Big|_B^D = \tau\Big|_{A'}^{B'} = \left(0{,}003073 - 0{,}0001707\ \xi\right) Q = 2{,}785 - 0{,}1547\ \xi$$

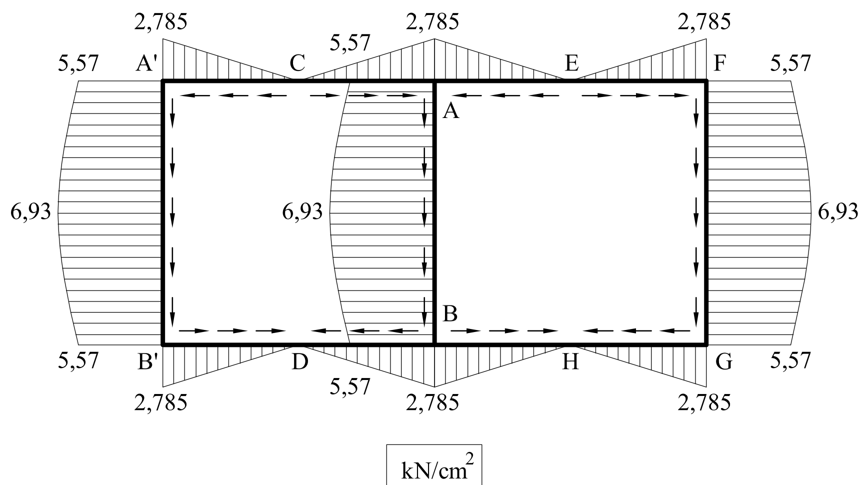


Fig. 4 Distribución de tensiones tangenciales en la sección ampliada, abierta.

Analizando un detalle la distribución de tensiones en la figura 4 se deduce que $\tau_0 = 0$

Sumando las dos distribuciones de tensiones, se obtiene la distribución final de tensiones, que puede verse representada en la figura 5

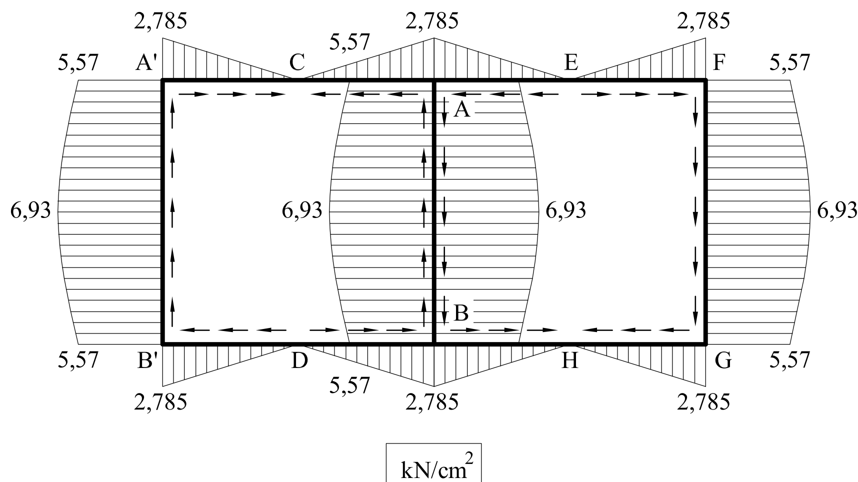


Fig. 5 Distribución final de tensiones

Problema 5.32 *Determinar la distribución de tensiones tangenciales en la sección de la figura 1 cuando actúa un esfuerzo cortante Q,, vertical, descendente de valor Q = 100 kN.*

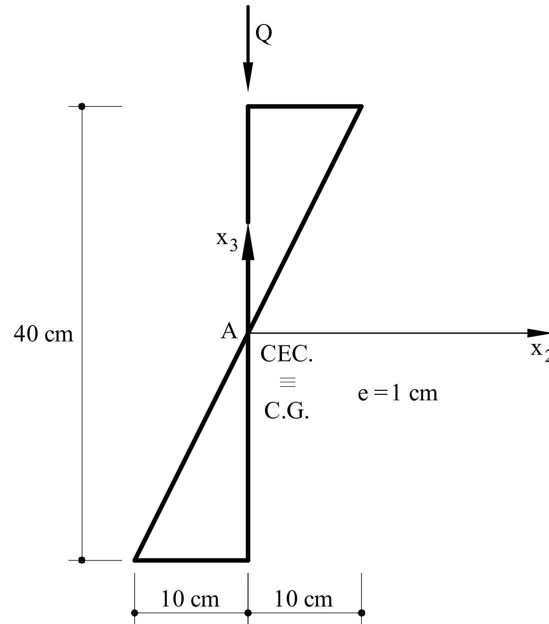


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 5.32

Solución

Los momentos de inercia respecto a los ejes x_2 x_3 valen

$$I_2 = 19\,305\ cm^4$$
$$I_3 = 2\,147\ cm^4$$
$$I_{23} = 4\,974\ cm^4$$
$$I_2 I_3 - I_{23}^2 = 16\,707\,159\ cm^8$$

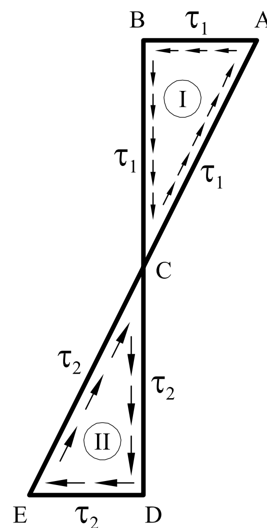


Fig. 2 Tensiones tangenciales hiperestáticas

La sección es cerrada con dos celdas. Será, por tanto, preciso efectuar dos cortes e introducir en ellos dos tensiones tangenciales hiperestáticas (figura 2)

Dado que $Q_2 = 0$ y $Q_3 = -100\ kN$, la distribución de tensiones tangenciales en la sección abierta viene dada por

$$\tau_a = -\frac{Q_3}{I_2 I_3 - I_{23}^2}\left(I_3\ m_{e2} - I_{23}\ m_{e3}\right)$$

$$\tau_a\Big|_A^B = \frac{100}{16\ 707\ 159}\left[2\ 147 \times 20\ \xi - 4\ 974\ \xi\ (10 - \xi/2)\right] = -0{,}0407\ \xi + 0{,}014886\ \xi^2$$

$$\tau_a\Big|_B^C = \frac{100}{16\ 707\ 159}\left\{2\ 147 \times \left[200 + \xi(20 - \xi/2)\right] - 4\ 974 \times 50\ \right\} =$$
$$= 1{,}0816 + 0{,}012851\ \xi(20 - \xi/2)$$

$$\tau_a\Big|_A^C = \frac{100}{16\ 707\ 159}\left[2\ 147\ \xi\ (20 - \xi \sin\alpha/2) - 4\ 974\ \xi\ (10 - \xi\cos\alpha/2)\right] =$$
$$= -0{,}0407\ \xi + 0{,}00091\ \xi^2$$

$$\tau_a\Big|_E^D = 0{,}0407\ \xi + 0{,}014886\ \xi^2$$

$$\tau_a\Big|_C^D = -1{,}0816\ \xi - 0{,}012851\ \xi\ (20 - \xi/2)$$

$$\tau_a\Big|_E^C = 0{,}0407\ \xi + 0{,}00091\ \xi^2$$

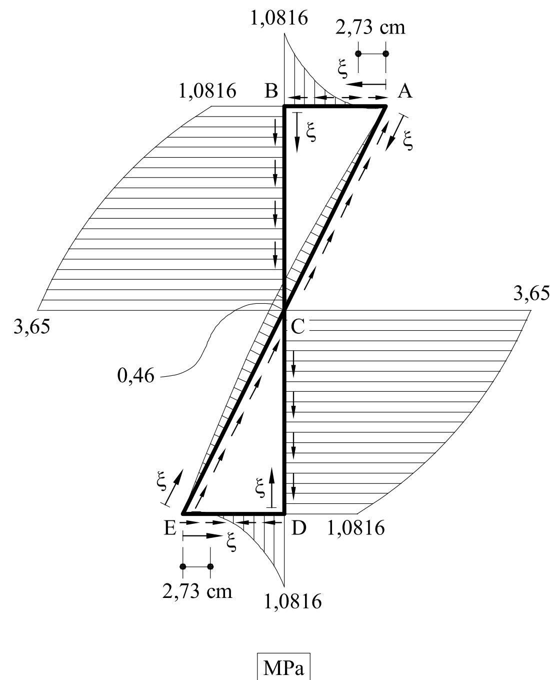


Fig. 3 Distribución de tensiones tangenciales en la sección abierta

La distribución anterior puede verse representada en la figura 3

Para determinar las tensiones tangenciales hiperestáticas se impone la condición.

$$\oint_I \frac{\tau}{G}\, d\xi = 0$$

$$\int_{II} \frac{\xi}{G}\, d\xi = 0$$

La primera integral se escribe

$$\int_{AB} \tau_a\Big|_A^B \frac{d\xi}{G} + \int_{BC} \tau_a\Big|_B^C \frac{d\xi}{G} - \int_{AC} \tau\Big|_A^C \frac{d\xi}{G} + \frac{\tau_1}{G}\left(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}\right) = 0$$

de donde se obtiene

$$65{,}612 + 52{,}361\, \tau_1 = 0$$

es decir,

$$\tau_1 = -1{,}25\ kN/cm^2$$

Análogamente

$$\tau_2 = -1{,}25\ kN/cm^2$$

Sumando las tensiones correspondientes a la sección abierta a las tensiones hiperestáticas se obtiene:

$$\tau\Big|_A^B = -1{,}25 - 0{,}0407\, \xi + 0{,}014886\, \xi^2$$

$$\tau\Big|_B^C = -0{,}1684 + 0{,}012851\, \xi(20 - \xi/2)$$

$$\tau\Big|_A^C = 1{,}25 - 0{,}0407\, \xi + 0{,}00091\, \xi^2$$

$$\tau\Big|_E^D = 1{,}25 + 0{,}0407\, \xi - 0{,}014886\, \xi^2$$

$$\tau\Big|_C^D = 0{,}1684 - 0{,}012851\, \xi\ (20 - \xi/2)$$

$$\tau\Big|_E^C = -1{,}25 + 0{,}0407\, \xi - 0{,}00091\, \xi^2$$

La distribución final de tensiones puede verse representada en la figura 4

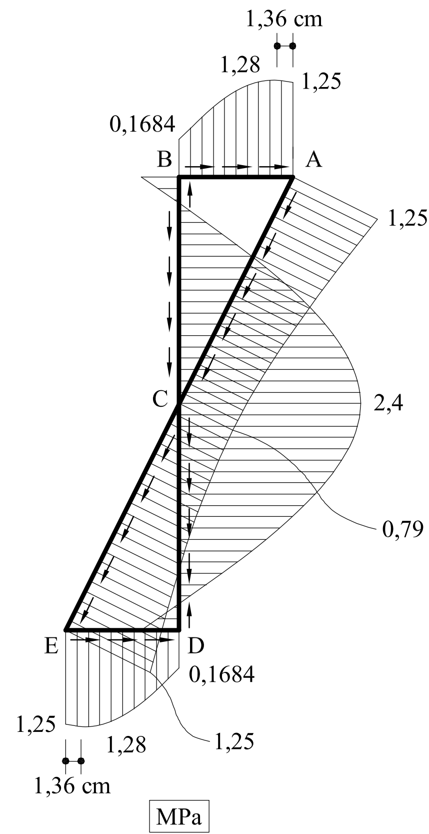


Fig. 4 Distribución final de tensiones

Problema 5.33 *La sección de la figura (el espesor de las paredes es constante e igual a 1,5 cm) está sometida a un esfuerzo cortante vertical, ascendente, Q_3 de valor* $Q_3 = 900\,kN$ *. Hallar y dibujar la distribución de tensiones tangenciales.*

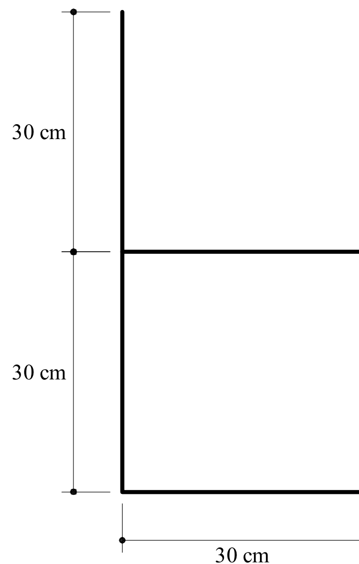


Fig.1 Sección correspondiente al problema 5.33

Solución

En la figura 2 pueden verse los ejes locales de la sección así como la posición del centro de gravedad de la misma.

Los momentos de inercia respecto a los ejes x_2 x_3 valen:

$$I_2 = 5{,}7375 \times 10^4\ cm^4 \quad I_3 = 1{,}6875 \times 10^4\ cm^4 \quad I_{23} = -1{,}0125 \times 10^4\ cm^4$$

$$\Delta = I_2\, I_3 - I_{23}^2 = 8{,}656875 \times 10^8\, cm^4$$

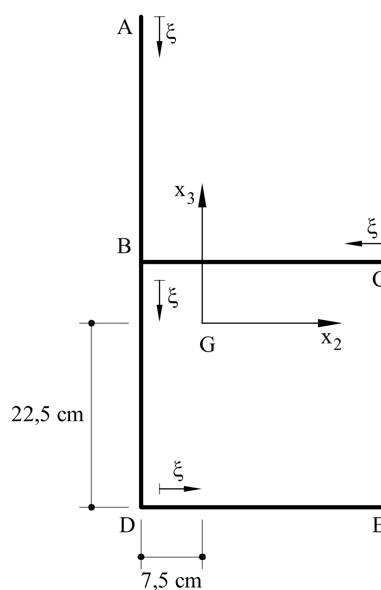


Fig.2. Ejes locales y posición del centro de gravedad

Dado que $Q_2 = 0$, el flujo de tensiones tangenciales viene dado por:

$$\tau\, e = -\frac{Q_3}{I_2\, I_3 - I_{23}^2}\left(I_3\, m_{e2} - I_{23}\, m_{e3}\right)$$

La distribución de momentos estáticos se escribe:

$$m_{e2}\Big|_A^B = 1{,}5\,\xi\,(37{,}5 - \xi/2)$$
$$m_{e2}\Big|_C^B = 1{,}5\times 7{,}5\,\xi = 11{,}25\,\xi$$
$$m_{e2}\Big|_B^D = 1012{,}5 + 337{,}5 + 1{,}5\,\xi\,(7{,}5 - \xi/2) = 1350 + 1{,}5\,\xi\,(7{,}5 - \xi/2)$$
$$m_{e2}\Big|_D^E = 1012{,}5 - 1{,}5\,\xi \times 22{,}5 = 1012{,}5 - 33{,}75\,\xi$$
$$m_{e3}\Big|_A^B = -1{,}5\times 7{,}5\,\xi = -11{,}25\,\xi$$
$$m_{e3}\Big|_C^B = 1{,}5\,\xi\,(22{,}5 - \xi/2)$$
$$m_{e3}\Big|_B^D = -337{,}5 + 337{,}5 - 1{,}5\times 7{,}5\,\xi = -11{,}25\,\xi$$
$$m_{e3}\Big|_E^D = -337{,}5 + 1{,}5\,\xi\,(-7{,}5 + \xi/2)$$

Introduciendo los anteriores valores en la expresión del flujo de las tensiones tangenciales se obtiene la distribución de las mismas. Dicha distribución puede verse representada en la figura 3

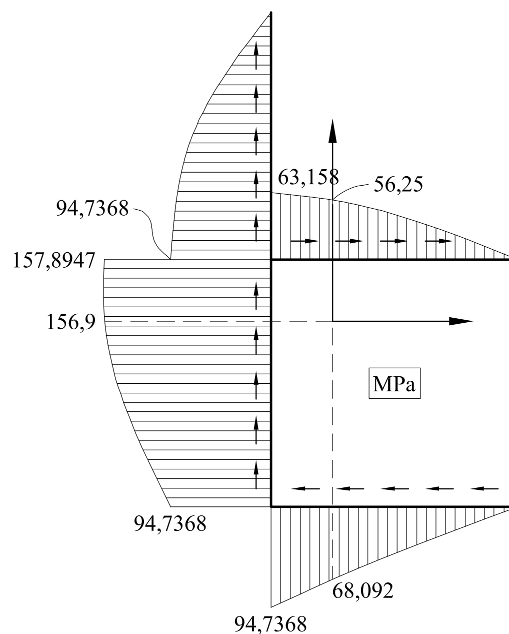


Fig.3. Distribución de tensiones tangenciales

Problema 5.34 *En la sección de paredes delgadas que se representa en la figura 1 actúa un esfuerzo cortante vertical ascendente* $Q = 200\,kN$ *. Estando la pieza en carga, se suelda la chapa AB quedando la sección que se representa en la figura 2. Una vez realizada la operación anterior se retira el esfuerzo cortante* Q_3*. Determinar la distribución final de tensiones tangenciales en la recta AC.*

Notas:

- *El espesor de todas las paredes es constante y vale 1 cm.*
- *Los momentos de inercia de la sección en L valen:*

$$I_{22} = 4950\,cm^4 \qquad I_{33} = 1866{,}67\,cm^4 \qquad I_{23} = -1800\,cm^4$$

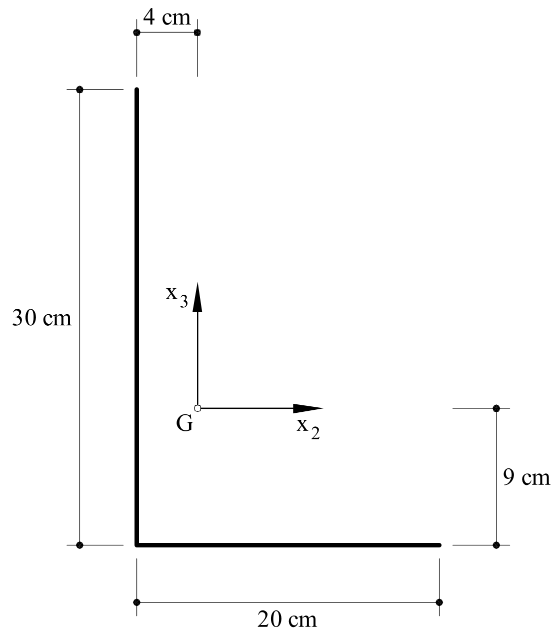


Fig.1 Sección correspondiente al problema 5.34

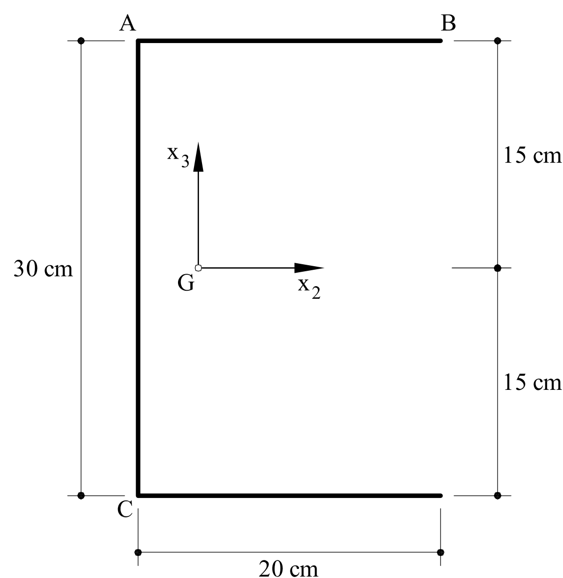


Fig.2.Sección modificada

Solución

La posición del centro de gravedad de la sección original en L puede verse representada en la figura 3

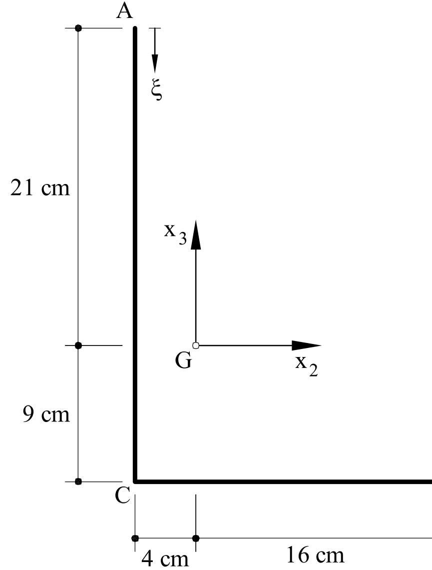


Fig.3. Posición del centro de gravedad

El flujo de tensiones tangenciales viene dado por

$$\tau\, e = -Q_3\,\frac{m_{e2}\, I_3 - m_{e3}\, I_2}{I_2\, I_3 - I_{23}^2}$$

El cociente $-Q_3/e\left(I_2\, I_3 - I_{23}^2\right)$ vale:

$$-\frac{Q_3}{I_2\, I_3 - I_{23}^2} = -\frac{200}{4950\times 1866{,}67 - (-1800)^2} = -3{,}3333\times 10^{-5}\; kN/cm^9$$

Los momentos estáticos de la pared AC (figura 3) respecto a los ejes x_2 y x_3 valen:

$$m_{e2}\Big|_A^C = \xi\left(21 - \xi/2\right) = 21\xi - \frac{\xi^2}{2}$$
$$m_{e3}\Big|_A^C = -4\xi$$

Por lo que, la distribución de tensiones tangenciales de AC se escribe

$$\tau_1\Big|_A^C = -3{,}3333\times 10^{-5}\left[1866{,}67\left(21\xi - \frac{\xi^2}{2}\right) + 1800\left(-4\,\xi\right)\right] =$$
$$= 0{,}03111\xi^2 - 1{,}06666\xi \quad \frac{kN}{cm^2} \quad \left(\xi \;\; en\; cm\right)$$

Una vez se suelda la pared AC se retira el cortante Q_3, es decir, se le deja tal cual está pero se le añade uno igual y de sentido contrario actuando en la nueva sección. Dicha sección tiene, respecto al eje x_2, un momento de inercia de valor

$$I = 11250\ cm^4$$

La distribución de tensiones tangenciales viene dada por

$$\tau = -\frac{-Q}{e\,I}\, m_{e2}^{'}$$

El cociente $Q/e\,I$ vale

$$\frac{Q}{e\,I} = \frac{200}{1\times 11250} = 0{,}01778\,\frac{kN}{cm^5}$$

y como

$$m_{e2}^{'}\Big|_A^C = 20\times 15 + \xi\left(15 - \frac{\xi}{2}\right) = -\frac{\xi^2}{2} + 15\,\xi + 300\ cm^3 \quad (\xi\ en\ cm)$$

La distribución de tensiones tangenciales vendrá dada por

$$\tau_2\Big|_A^C = 0{,}01778\left(-\frac{\xi^2}{2} + 15\xi + 300\right) = -0{,}00889\,\frac{\xi^2}{2} + 0{,}2667\xi + 5{,}334\ \frac{kN}{cm^2} \quad (\xi\ \ en\ cm)$$

Sumando $\tau_1\ y\ \tau_2$ la distribución final vendrá dada por

$$\tau\Big|_A^C = \tau_1\Big|_a^C + \tau_2\Big|_A^C = 0{,}02222\,\xi^2 - 0{,}79996\,\xi + 5{,}334\ \frac{kN}{cm^2}$$

Dicha distribución puede verse representada en la figura 4

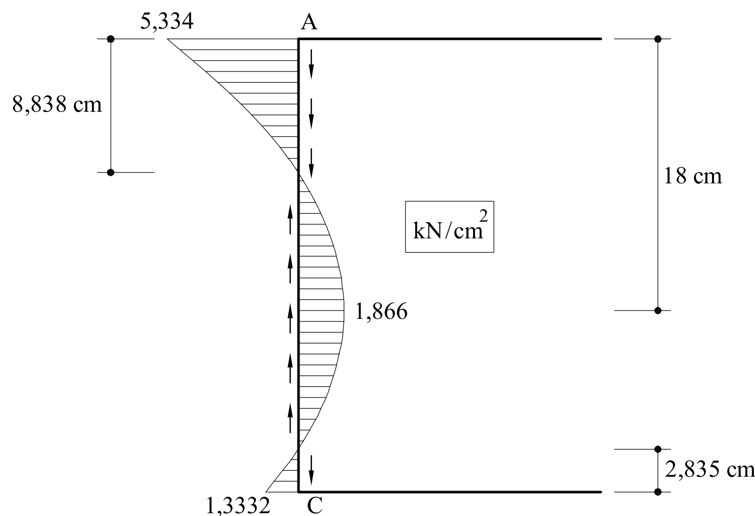


Fig.4. Distribución final de tensiones tangenciales.

Problema 5.35 *En la sección de la figura 1, el espesor de las paredes vale 1 cm. Hallar:*

a) Distribución de tensiones tangenciales cuando actúa un esfuerzo cortante vertical ascendente de valor $Q = 200\,kN$

b) Centro de esfuerzos cortantes

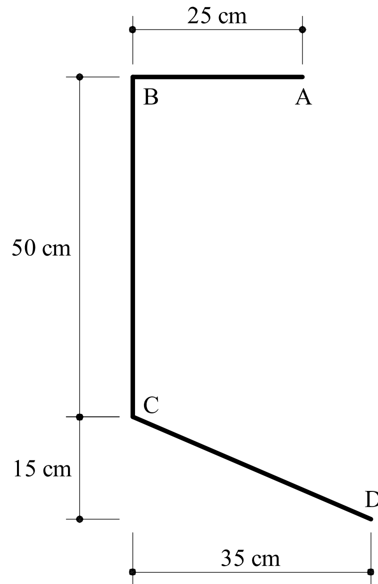


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 5.35

Solución

a) En la figura 2 puede verse la posición del c.d.g. Respecto a unos ejes x_2 x_3, que pasan por dicho punto, los momentos de inercia valen

$$I_2 = 6.3651\,cm^4$$

$$I_3 = 12.281\,cm^4$$

$$I_{23} = -10.204\,cm^4$$

$$I_2 I_3 - I_{23}^2 = 677.576.315\,cm^8$$

La distribución de tensiones tangenciales viene dada por

$$\tau\, e = -\frac{1}{I_2 I_3 - I_{23}^2}\left[\left(Q_3 I_3 - Q_2 I_{23}\right) m_{e2} + \left(-Q_3 I_{23} + Q_2 I_2\right) m_{e3}\right]$$

Los momentos estáticos m_{e2} y m_{e3} valen:

$$m_{e2}\Big|_A^B = 30{,}4\,\xi$$

$$m_{e2}\Big|_B^C = 760 + \xi(30{,}4 - \xi/2)$$

$$m_{e2}\Big|_C^D = 1.030 + \xi(19{,}6 + 0{,}197\,\xi)$$

$$m_{e3}\Big|_A^B = \xi(16{,}34 - \xi/2)$$

$$m_{e3}\Big|_B^C = 96 - 8{,}66\,\xi$$

$$m_{e3}\Big|_C^D = -337 + \xi(0{,}46\,\xi - 8{,}66)$$

Dado que Q_2= 0, la distribución de tensiones tangenciales se escribe

$$\tau\Big|_A^B = -\frac{1}{677.576.315}\left[200\times 12.281\times 30{,}4\,\xi + 200\times 10.204\,\xi(16{,}34 - \xi/2)\right] =$$
$$-0{,}1594\,\xi + 0{,}001506\,\xi^2$$

$$\tau\Big|_B^C = -\frac{1}{677.576.315}\left\{200\times 12.281\left[760 + \xi(30{,}4 - \xi/2)\right] + 200\times 10.204(96 - 8{,}66\,\xi)\ \right\} =$$
$$-3{,}04 - 0{,}0841\,\xi + 0{,}0018125\,\xi^2$$

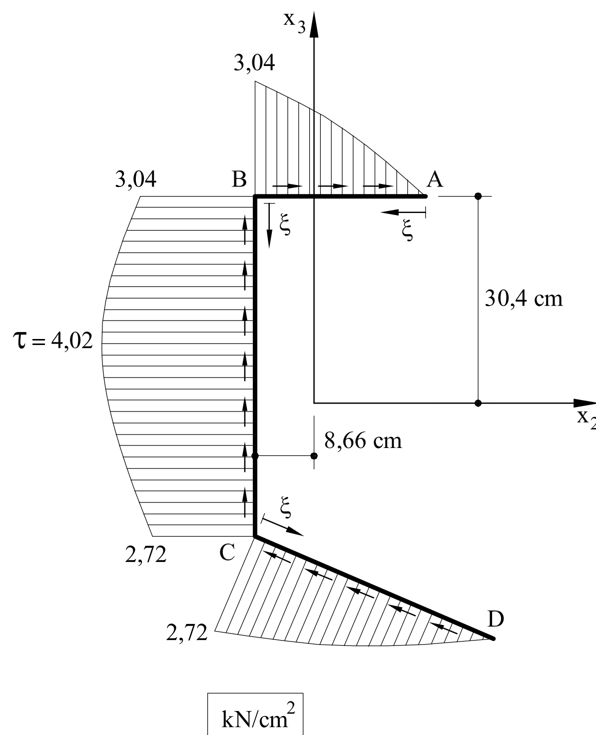


Fig. 2 Distribución de tensiones

$$\tau\Big|_C^D = -\frac{1}{677.576.315}\left\{200\times 12.281\times\left[1.030-\xi\left(19{,}6+0{,}197\,\xi\right)\right]+\right.$$
$$\left.200\times 10.204\times\left[-337+\xi\left(0{,}46\,\xi-8{,}66\right)\right]\right\} = -2{,}72+0{,}097133\,\xi-0{,}0006714\,\xi^2$$

En la figura 2 puede observarse la distribución de tensiones

b) Tomando momentos de las tensiones respecto al punto *C*:

$$M_C = \int_0^{25} 50\times\tau\Big|_A^B d\xi = -2.098{,}44\ kN\times cm$$

Este momento debe ser igual al producido por Q_3 situado en el centro de esfuerzos cortantes, el cual se supone situado a una distancia $\bar{x}_{2c}$ del punto *C*. Es decir

$$\bar{x}_{2c}\, Q = -2.098{,}44$$

$$\bar{x}_{2c}\, 200 = -2.098{,}44$$

o sea:

$\bar{x}_{2c} = -10{,}49\ \ cm.$ (está por tanto situado a la izquierda de *C*)

Para determinar la ordenada del centro de esfuerzos cortantes, es preciso calcular la distribución de tensiones tangenciales en *AB* cuando actúa un esfuerzo cortante horizontal Q_2

$$\tau\Big|_A^B = -\frac{1}{I_2 I_3 - I_{23}^2}\left[-Q_2 I_{23} m_{e2} + Q_2 I_2 m_{e3}\right] =$$
$$-\frac{Q_2}{677.576.315}\left[10204\times 30{,}4\,\xi + 63651\,\xi\left(16{,}34-\xi/2\right)\right] =$$
$$= \left(-0{,}001993\,\xi + 0{,}000047\,\xi^2\right)Q_2$$

Tomando meramente momentos respecto a *C*:

$$-\bar{x}_{3c} Q_2 = \int_0^{25} 50\, Q_2\left(-0{,}001993\,\xi + 0{,}000047\,\xi^2\right)d\xi$$

$$\bar{x}_{3c} = 18{,}9\,cm$$

Por lo tanto, las coordenadas x_{2c} y x_{3c} del centro de esfuerzos cortantes, referidas al centro de gravedad valen

$$x_{2c} = -8{,}66 + \bar{x}_{2c} = -19{,}15\ \ cm$$

$$x_{3c} = -19{,}6 + \bar{x}_{3c} = -19{,}6 + 18{,}9 = -0{,}7\ \ cm$$

Problema 5.36 *Determinar el centro de esfuerzos cortantes C de una viga de pared delgada cuya sección transversal se ilustra en la figura 1. El espesor de la barra AB es t_1, el de la barra DE es t_2 y el de la barra central t_0..*

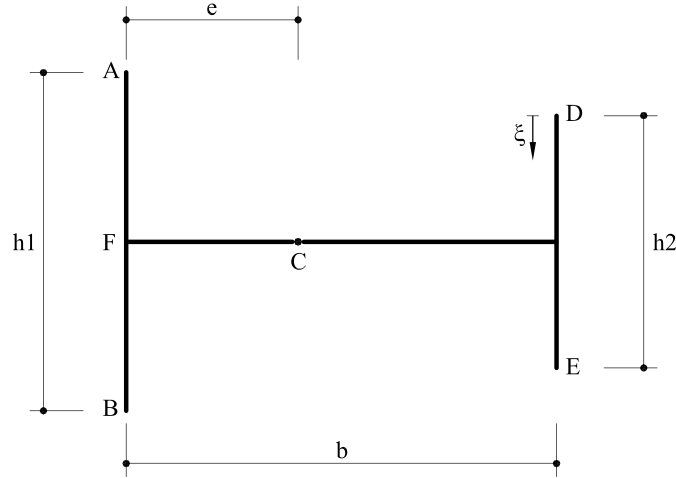


Fig. 1 Sección de paredes delgadas correspondiente al problema resuelto 5.36

Solución

El centro de esfuerzos cortantes se obtendrá directamente tomando momentos respecto al punto *F* en vez de utilizar la expresión (5.59).

El momento de inercia respecto a un eje horizontal y que pase por *FC* vale

$$I_2 = \frac{1}{12} t_1 \; h_1^3 + \frac{1}{12} t_2 \; h_2^3$$

Si actúa un esfuerzo cortante vertical, ascendente que pase por *C*, la distribución de tensiones tangenciales en *DE* vale

$$\tau\Big|_D^E = -\frac{Q\,\xi\left(\frac{h_2}{2} - \frac{\xi}{2}\right)}{I_2}$$

Por lo que, tomando momentos respecto al punto *F*

$$e\,Q = b\,t_2\,\frac{2}{3}\,h_2\,\frac{Q\,\frac{h_2^2}{8}}{I_2}$$

es decir,

$$e = \frac{b\,t_2\;h_2^3}{12\,I_2}$$

Nótese que si $t_1 = t_2$ y $h_1 = h_2$, entonces $e = b/2$

Problema 5.37 *En la sección que se acota en la figura 1 se pide:*

Hallar la distribución de tensiones tangenciales, acotando los valores más significativos, motivadas por un esfuerzo cortante vertical ascendente de valor Q = 600 kN. Indicar el punto del eje x_2 por el cual debe pasar para que no haya momento torsor.

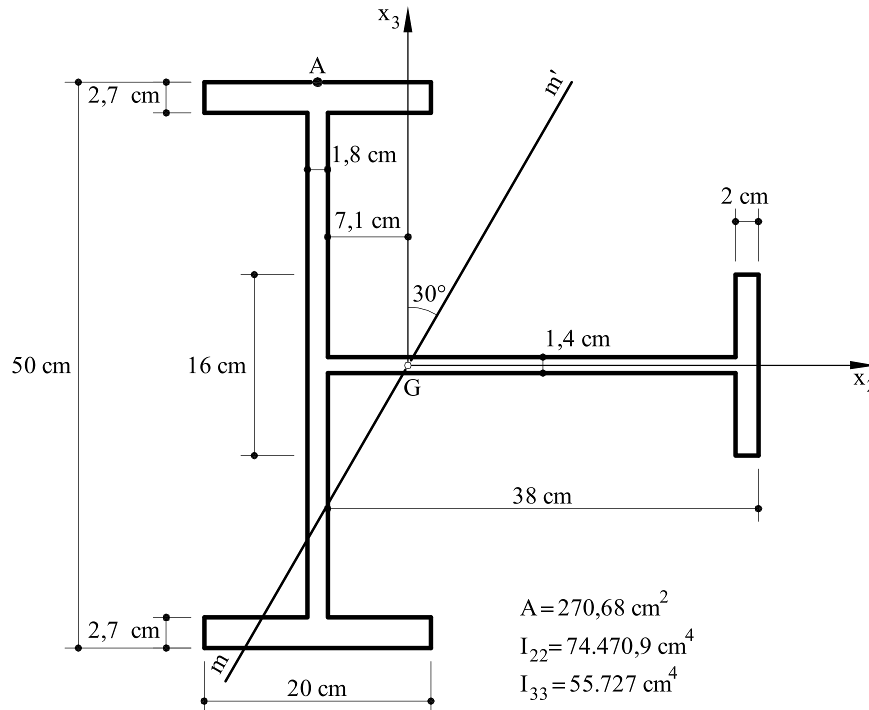


Fig. 1 Sección correspondiente al problema resuelto 5.37

Solución

Para mayor claridad, en la figura 2 pueden verse representados los ejes de las paredes de la sección.

Para la distribución de tensiones tangenciales se utilizarán como unidades el meganewton (*MN*) y el metro (*m*). Dicha distribución se obtendrá a partir de la expresión (5.15), es decir (ver figura 3):

-Tramos 1,2 y 2,3

$$\tau\Big|_1^2 = \tau\Big|_2^3 = -\frac{Q\, m_{e2}}{e\, I_2} = -\frac{0{,}6 \times 0{,}2365 \times \xi}{74\,470{,}9 \times 10^{-8}} = -190{,}54\, \xi$$

-Tramos 2,5

$$\tau\Big|_2^5 = \frac{-19{,}054 \times 2 \times 0{,}027}{0{,}018} - \frac{0{,}6}{74\,470{,}9 \times 10^{-8}}\, \xi \left(0{,}2365 - \frac{\xi}{2}\right) =$$

$$-57{,}162 - 805{,}68\, \xi \left(0{,}2365 - \frac{\xi}{2}\right)$$

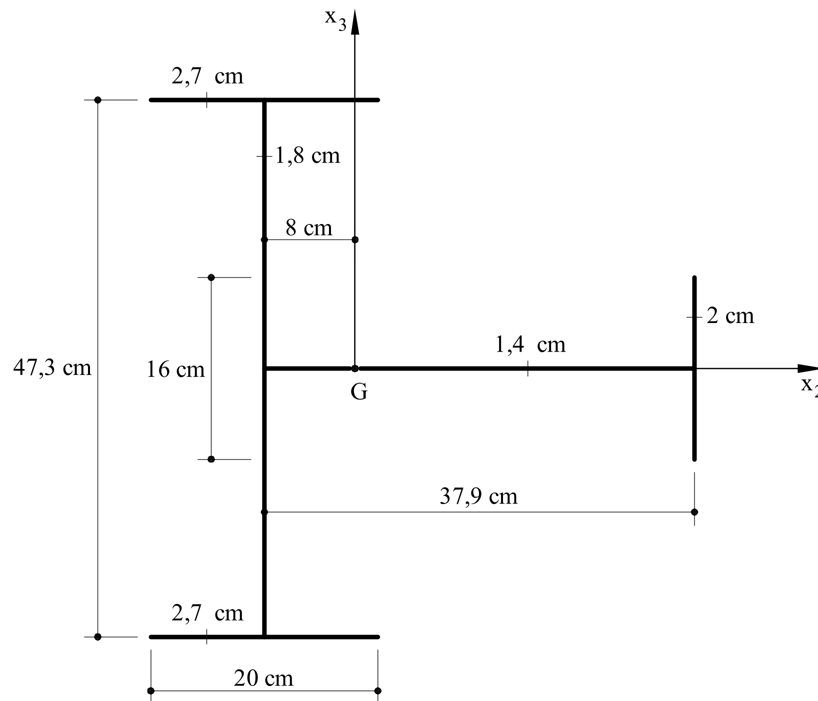


Fig. 2 Ejes de la sección correspondiente al problema resuelto 5.5

-Tramos 5,7 y 5,6

$$\tau\Big|_5^7 = \tau\Big|_5^6 = -\tau\Big|_1^2 = 190{,}54\ \xi$$

-Tramo 9,10

$$\tau\Big|_9^{10} = \frac{-0{,}6\times\xi\,(0{,}08-\xi)}{74\ 470{,}9\times 10^{-8}} = -805{,}68\ \xi\,(0{,}08-\xi)$$

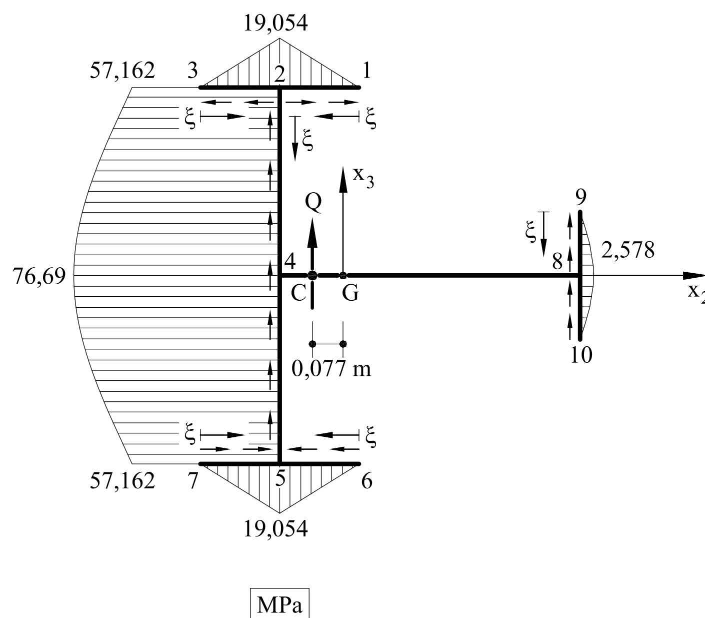


Fig. 3 Distribución de tensiones tangenciales

Por lo que respecta a la posición del centro de esfuerzos cortantes, puede utilizarse la expresión (5.59) o bien directamente tomar momentos respecto al punto 4 de las fuerzas externas (*600 kN*) y de las fuerzas internas (tensiones tangenciales). Procediendo de esta última forma:

$$0,6\left(x_{2c}+0,08\right)=0,379\times\frac{2}{3}\times 0,16\times 2,578\times 0,02$$

de donde se obtiene

$$x_{2c}=-0,077\ metros$$

que da la posición del centro de esfuerzos cortantes.

Problema 5.38 *En la sección de paredes delgadas cuya forma y dimensiones se indican en la figura 1, el espesor es constante en toda la pieza vale* e.
Se pide:

Determinar el centro de esfuerzos cortantes.

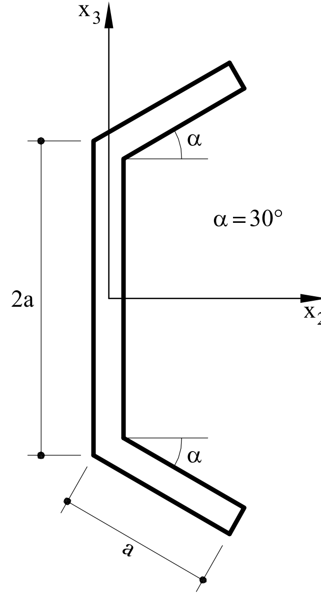


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 5.38

Solución

Lógicamente, por motivos de simetría el centro de esfuerzos cortantes se halla situado sobre el eje x_2. El momento de inercia respecto a dicho eje vale

$$I = 3{,}8333\ e\ a^3$$

Cuando actúa un cortante Q ascendente la distribución de tensiones tangenciales en la pared vertical vale (figura 2).

$$\tau = -\frac{Q\left[1{,}25\ e\ a^2 + e\ \xi\ (a - \xi/2)\right]}{e \times 3{,}8333\ e\ a^3} = -\left(\frac{0{,}3261}{e\ a} + \frac{0{,}261\ \xi}{e\ a^2} - \frac{0{,}13043\ \xi^2}{e\ a^3}\right) Q$$

Tomando momentos respecto al punto *E*.

$$M_{\text{int}} = \overline{EF} \times \int_{BC} \tau\ e\ d\xi = 1{,}7321\ a \times \frac{2a\ e}{6}\left[0{,}3261 + 4 \times 0{,}4565 + 0{,}3261\right] \times \frac{Q}{e\ a} = 1{,}431\ Q\ a$$

$$M_{ext} = x_0\ Q$$

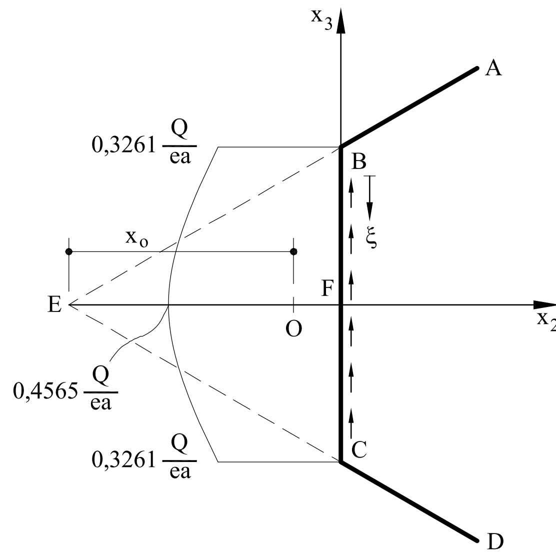


Fig. 2 Distribución de tensiones tangenciales en la pared vertical

Igualando,

$$x_0 = 1{,}431\ a$$

y también

$$OF = 1{,}7321\ a - 1{,}431\ a = 0{,}301\ a$$

Problema 5.39 *Determinar el centro de esfuerzos cortantes O de una viga de pared delgada y espesor uniforme, cuya sección se indica en la figura 1.*

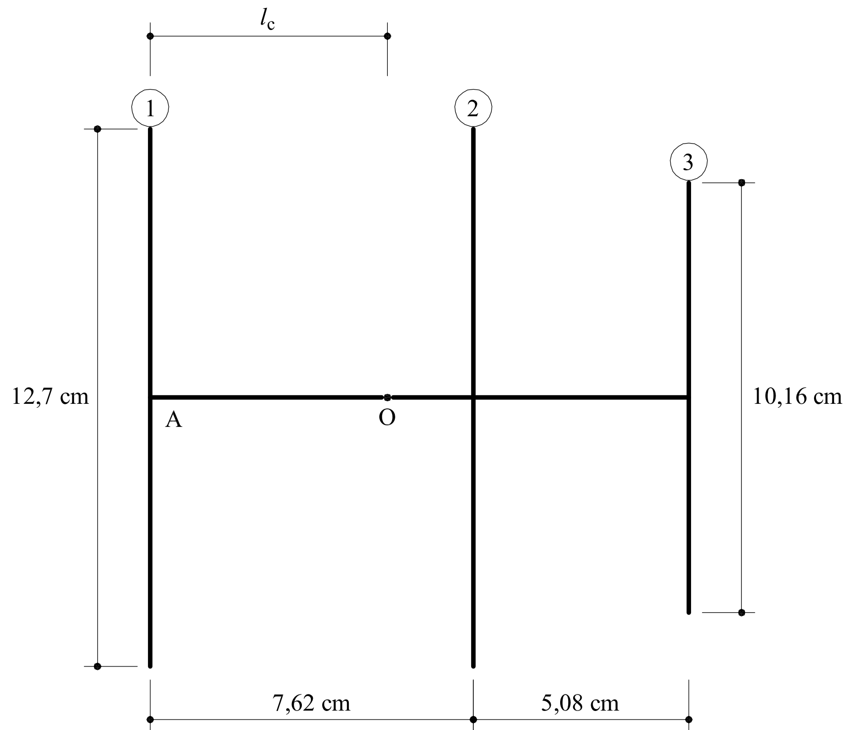


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 5.39

Solución

El momento de inercia respecto a un eje horizontal que pasa por el c.d.g. vale

$$I = 428{,}8\ t$$

siendo t el espesor de cada pared.

La máxima tensión tangencial en cada pared vale:

$$\left(\tau_{\max}\right)_j = \frac{Q\ t\ \dfrac{h_j}{2}\ \dfrac{h_j}{4}}{t\ I} = \frac{Q}{I}\ \frac{h_j^2}{8}$$

La integral de las tensiones tangenciales en cada pared vale

$$Q_j = \frac{2}{3}\left(\tau_{max}\right)_j\ t\ h_j = \frac{Q}{I}\ \frac{t\ h_j^3}{12} = Q\ \frac{I_j}{I}$$

y como

$$I_1 = I_2 = \frac{t}{12}\ 12{,}7^3 = 170{,}7\ t$$

$$I_3 = \frac{t}{12} 10{,}16^3 = 87{,}4\ t$$

resulta

$$Q_1 = Q_2 = \frac{170{,}7\ t}{428{,}8\ t} Q = 0{,}40\ Q$$

$$Q_3 = \frac{87{,}4\ t}{428{,}8\ t} Q = 0{,}20\ Q$$

Tomando momentos respecto al punto *A*

$$0{,}40\ Q \times 7{,}62 + 0{,}20\ Q \times (7{,}62 + 5{,}08) = l_C\ Q$$

es decir

$$l_C = 5{,}59\ cm$$

Problema 5.40 *En la sección que se representa en la figura 1 se pide determinar la posición del centro de esfuerzos cortantes.*

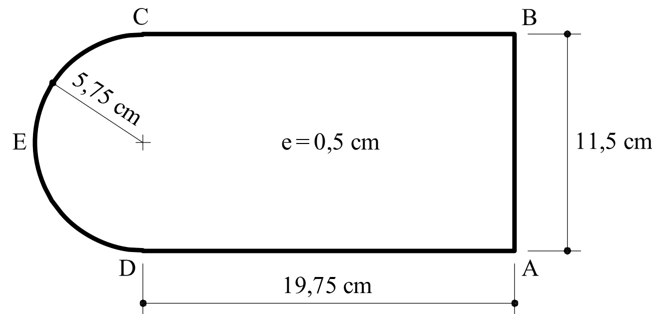


Fig. 1 Sección correspondiente al problema 5.40

Solución

El momento de inercia respecto a un eje horizontal que pasa por el centro de gravedad vale

$$I = 962{,}357\ cm^4$$

Se determina, en primer lugar, la distribución de tensiones tangenciales. Para ello, se realiza un corte en el punto medio de *AB* y se introducen unas tensiones hiperestáticas τ_0.
La distribución de tensiones tangenciales en la sección abierta se escribe (ver figura 2).

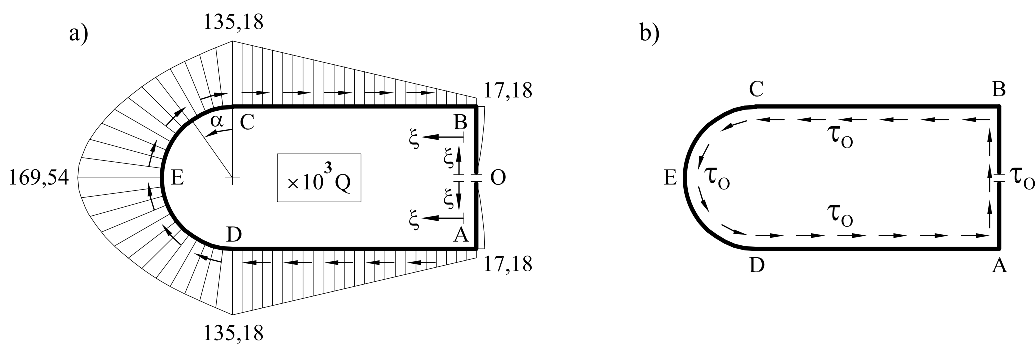


Fig. 2 Distribución de tensiones tangenciales: a) Sección abierta. b) Tensiones hiperestáticas.

$$\tau_a\Big|_O^B = -\frac{Q\ m_{e2}}{I\ e} = -Q\ \frac{0{,}5\ \xi^2/2}{0{,}5 \times 962{,}357} = -0{,}52 \times 10^{-3}\ \xi^2\ Q$$

$$\tau_a\Big|_B^C = -17{,}18 \times 10^{-3}\ Q - \frac{Q \times 0{,}5 \times \xi \times 5{,}75}{0{,}5 \times 962{,}357} = \left(-17{,}18 - 5{,}975\ \xi\right) Q \times 10^{-3}$$

$$\tau_a\Big|_C^D = -135{,}18 \times 10^{-3}\ Q - \frac{Q \times 0{,}5 \times 5{,}75^2 \sin\alpha}{0{,}5 \times 962{,}357} = \left(-135{,}18 - 34{,}36\ \sin\alpha\right) \times 10^{-3}\ Q$$

$$\tau_a\Big|_O^A = \frac{Q\times 0{,}5\ \xi^2/2}{0{,}5\times 962{,}357} = 0{,}52\times 10^{-3}\ \xi^2\ Q$$

$$\tau_a\Big|_A^D = 17{,}18\times 10^{-3}\ Q + \frac{Q\times 0{,}5\ \xi\times 5{,}75}{0{,}5\times 962{,}357} = \left(17{,}18+5{,}975\ \xi\right)\times 10^{-3}\ Q$$

Debe cumplirse que

$$\oint \gamma\ d\xi = \frac{1}{G}\oint \tau\ d\xi = \frac{1}{G}\oint\left(\tau_a+\tau_o\right)d\xi = 0$$

$$\oint \tau_a\ d\xi = -2\times\left[\int_0^{5,75} 0{,}52\ \xi^2\ d\xi + \frac{135{,}18+17{,}18}{2}\times 19{,}75 + \int_0^{\pi/2}\left(135{,}18+34{,}36\ \sin\alpha\right)5{,}75\ d\alpha\right]\times$$
$$\times 10^{-3}\ Q = -5{,}912\ Q$$

$$\oint \tau_0\ d\xi = 69{,}06\ \tau_0$$

Es decir

$$-5{,}912\ Q + 69{,}06\ \tau_0 = 0$$

o sea:

$$\tau_0 = 85{,}6\times 10^{-3}\ Q$$

Tomando momentos de las fuerzas internas (tensiones) respecto al centro del semicírculo:

$$M_{\text{int}} = 2\times 0{,}5\times\left[19{,}75\int_0^{5,75}\left(-0{,}52\ \xi^2+85{,}6\right)d\xi + 5{,}75\left(-\frac{135{,}18+17{,}18}{2}+85{,}6\right)19{,}75 + \right.$$
$$\left.\int_0^{\pi/2} 5{,}75\left(-135{,}18-34{,}36\ \sin\alpha+85{,}6\right)5{,}75\ d\alpha\right]\times 10^{-3} Q = 6{,}43\ Q$$

$$M_{ext} = x_{2C}\ Q$$

Igualando (figura 3)

$$x_{2C} = 6{,}43\ cm$$

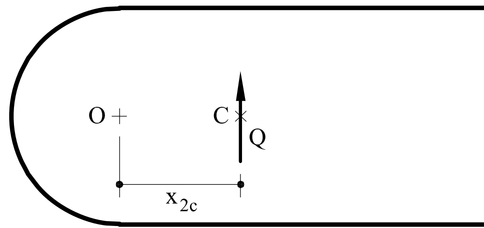


Fig. 3 Posición del centro de esfuerzos cortantes

Capítulo 6:
Torsión

No hay problemas correspondientes a este capítulo

Capítulo 7:
Energía de deformación

Problema 7.1 *Dada la viga de la figura 1 en la que* $E\ I = 10^4\ kN\ m^2$
Se pide:

a) Flecha en C.
b) Giro en C.

No se tendrá en cuenta la deformación por esfuerzo cortante.

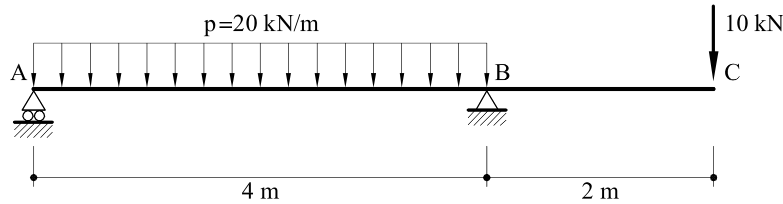


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 7.1

Solución

Se resolverá el problema utilizando el método de la fuerza unidad

a) Flecha en *C*

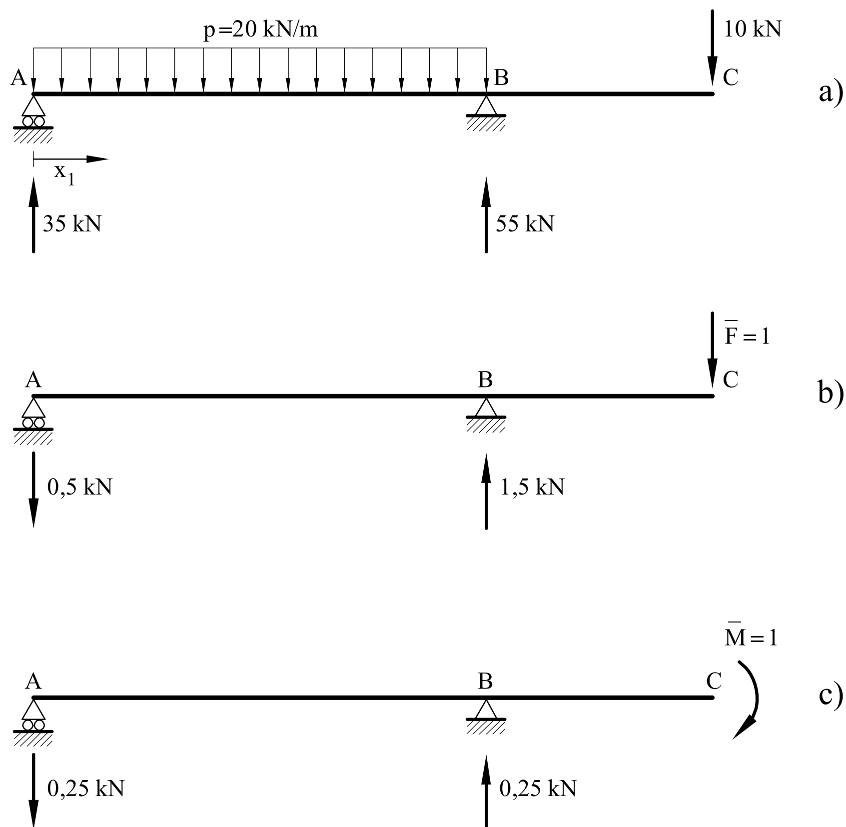


Fig. 2 Cargas en la viga. a) Cargas reales. b) Fuerza virtual en C. c) Momento virtual en C.

La ley de momentos flectores debida a las cargas reales vale:

$$M_f\Big|_A^B = -10(6-x_1) + 55(4-x_1) - 20\frac{(4-x_1)^2}{2}$$

$$M_f\Big|_B^C = -10(6-x_1)$$

La ley de momentos flectores debido a una fuerza unidad en *C* vale

$$m_f\Big|_A^B = -(6-x_1)+1{,}5\,(4-x_1)$$

$$m_f\Big|_B^C = -(6-x_1)$$

Con lo cual, el desplazamiento en *C* (positivo en sentido descendente) vale

$$\upsilon_e = \int_0^6 M_f\; m_f\;\frac{dx_1}{E\,I} = \int_0^4 M_f\; m_f\;\frac{dx_1}{E\,I} + \int_4^6 M_f\; m_f\;\frac{dx_1}{E\,I} =$$

$$\int_0^4 \left[-10\,(6-x_1)+55\,(4-x_1)-20\,\frac{(4-x_1)^2}{2}\right]\left[-(6-x_1)+1{,}5\,(4-x_1)\right]\frac{dx_1}{10^4} +$$

$$+\int_4^6 \left[-10\,(6-x_1)\right]\left[-(6-x_1)\right]\frac{dx_1}{10^4} = -0{,}002666\; m = -2{,}666\; mm$$

b) Giro en *C*

Se coloca un momento unidad en *C* (figura 2 c)). Las leyes de momentos valen:

$$m_f\Big|_A^B = -1+(4-x_1)\,0{,}25$$

$$m_f\Big|_B^C = -1$$

Con lo cual, el giro en *C* (positivo en sentido horario) vale:

$$\varphi_C = \int_0^4 \left[-10\,(6-x_1)+55\,(4-x_1)-\frac{20\,(4-x_1)^2}{2}\right]\left[-1+(4-x_1)\,0{,}25\right]\frac{dx_1}{10^4} +$$

$$+\int_4^6 \left[-10\,(6-x_1)\right](-1)\,\frac{dx_1}{10^4} = -6{,}6667\times 10^{-4}\; rdn$$

♣ **Problema 7.2** *Utilizando el teorema de Castigliano, determinar el desplazamiento vertical de la sección A. Considérese las rigideces conocidas.*

Se separará la contribución del Momento flector y la del esfuerzo cortante.

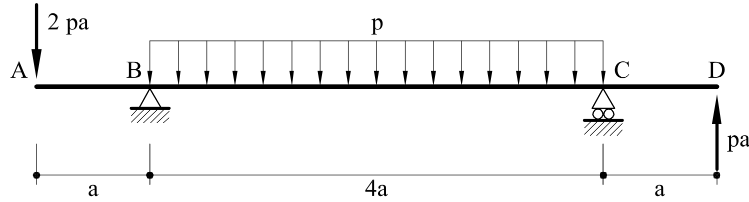


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 7.2

Solución

a) Contribución del momento flector.
   Se coloca una fuerza $F = 0$ en A (fig. 2)
   Las leyes de momentos flectores valdrán:

$$M_f^t\Big|_A^B = -(2\ pa + F)\, x_1$$

$$M_f^t\Big|_B^C = pa\,(6a - x_1) + (0{,}25\ pa - 0{,}25\ F)(5\ a - x_1) - p\,\frac{(5\ a - x_1)^2}{2}$$

$$M_f^t\Big|_C^D = pa\,(6a - x_1)$$

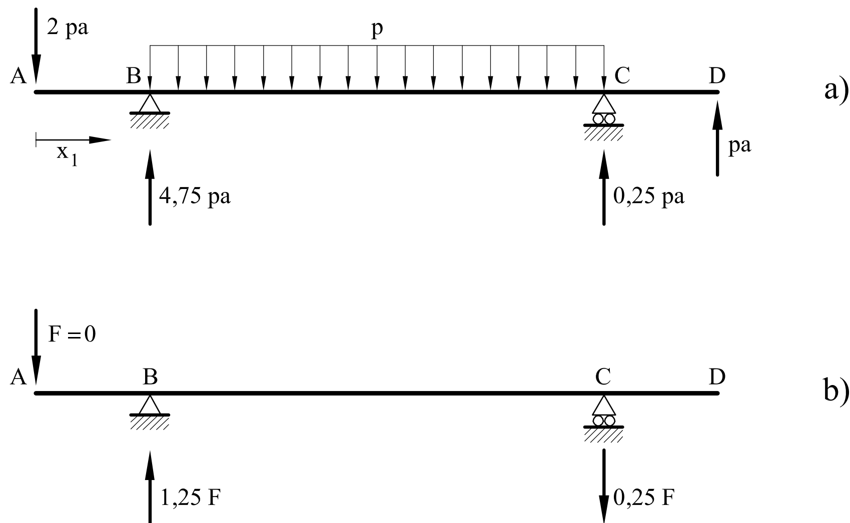


Fig. 2 Viga cargada: a) Fuerzas reales. b) Fuerza nula $F = 0$ en A

Derivando respecto a F

$$\left.\frac{\partial M_f^t}{\partial F}\right|_A^B = -x_1$$

$$\left.\frac{\partial M_f^t}{\partial F}\right|_B^C = -0{,}25\,(5a - x_1)$$

$$\left.\frac{\partial M_f^t}{\partial F}\right|_C^D = 0$$

Con lo cual, el movimiento vertical de A valdrá (positivo en sentido descendente)

$$\upsilon_A^M = \int_0^{6a} M_f \,\frac{\partial M_f}{\partial F}\,\frac{dx_1}{E\,I}$$

siendo:

$$M_f = \left[M_f^t\right]_{F=0}$$

$$\frac{\partial M_f}{\partial F} = \left[\frac{\partial M_f^t}{\partial F}\right]_{F=0}$$

es decir,

$$\upsilon_A^M = \int_0^{a}(-2\,pa\,x_1)(-x_1)\frac{dx_1}{E\,I} + \int_a^{5a}\left[pa\,(6a - x_1) + 0{,}25\,pa\,(5a - x_1) - p\,\frac{(5a - x_1)^2}{2}\right]\times$$
$$\left[-0{,}25\,(5a - x_1)\right]\frac{dx_1}{E\,I} + \int_{5a}^{6a} pa\,(6a - x_1)\cdot 0\cdot\frac{dx_1}{E\,I} = 0$$

b) Contribución del esfuerzo cortante.

Las leyes de esfuerzos cortantes se escriben:

$$Q^t\Big|_A^B = 2\,pa + F$$

$$Q^t\Big|_B^C = pa + 0{,}25\,pa - 0{,}25\,F - p\,(5a - x_1)$$

$$Q^t\Big|_C^D = pa$$

y derivando respecto a F

$$\frac{\partial \left. Q^t \right|_A^B}{\partial F} = 1$$

$$\frac{\partial \left. Q^t \right|_B^C}{\partial F} = -0{,}25$$

La contribución del cortante a la flecha del punto *A* vale:

$$\upsilon_A^Q = \int_0^{6a} Q \frac{\partial Q}{\partial F} \frac{dx_1}{k\,G\,A}$$

siendo

$$Q = \left[Q^t \right]_{F=0}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial F} = \left[\frac{\partial Q^t}{\partial F} \right]_{F=0}$$

es decir:

$$\upsilon_A^Q = \int_0^a 2\ pa \frac{dx_1}{k\,G\,A} + \int_a^{5a} \left[pa + 0{,}25\ pa - p\,(5a - x_1) \right] (-0{,}25) \frac{dx_1}{k\,G\,A} =$$
$$= 2{,}75 \frac{pa^2}{k\,G\,A}$$

Problema 7.3 *Determinar la flecha en el punto C, así como los giros en ambos lados de la articulación D, en la viga de la figura 1. Se tendrá en cuenta únicamente la deformación debida al momento flector.*

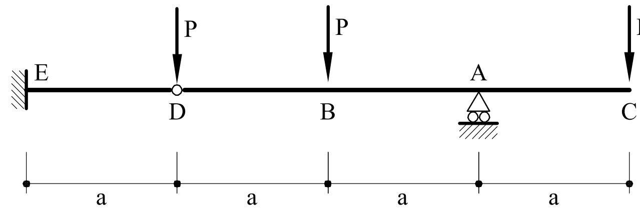


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 7.3

Solución

a) Flecha en *C*

Se sustituye la fuerza *P* aplicada en *C* por una fuerza independiente *F* (ver figura 2)

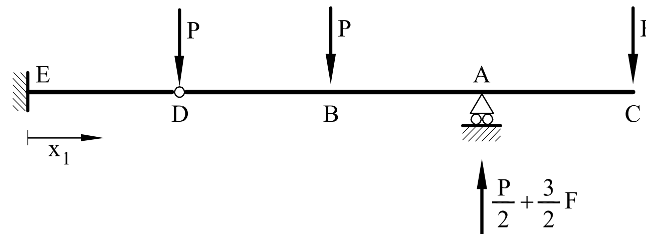


Fig. 2 Fuerza F aplicada en C y sistema de ejes

La ley de momentos flectores valdrá

$$M_f\Big|_A^C = -F\left(4a - x_1\right)$$

$$M_f\Big|_B^A = -F\left(4\,a - x_1\right) + \left(\frac{P}{2} + \frac{3\,F}{2}\right)\left(3\,a - x_1\right)$$

$$M_f\Big|_D^B = -F\left(4\,a - x_1\right) + \left(\frac{P}{2} + \frac{3\,F}{2}\right)\left(3\,a - x_1\right) - P\left(2\,a - x_1\right)$$

$$M_f\Big|_E^D = -\left(\frac{3}{2}\,P - \frac{F}{2}\right)\left(a - x_1\right)$$

y sus derivadas:

$$\frac{\partial\, M_f\Big|_A^C}{\partial\, F} = -\left(4\,a - x_1\right)$$

$$\frac{\partial M_f\big|_B^A}{\partial F} = -(4\,a - x_1) + \frac{3}{2}(3\,a - x_1) = 0{,}5\,(a - x_1)$$

$$\frac{\partial M_f\big|_D^B}{\partial F} = 0{,}5(\,a - x_1)$$

$$\frac{\partial M_f\big|_E^D}{\partial F} = 0{,}5\,(\,a - x_1)$$

Aplicando el teorema de Castigliano (y haciendo $F = P$), el movimiento vertical de C valdrá (positivo en sentido descendente):

$$\upsilon_C = \int_0^{4a} M_f\,\frac{\partial M_f}{\partial F}\,\frac{dx_1}{E\,I} = \int_{3a}^{4a} P\,(4\,a - x_1)^2\,\frac{dx_1}{E\,I} + \int_{2a}^{3a} P\,(2\,a - x_1)\,0{,}5\,(a - x_1)\,\frac{dx_1}{E\,I} +$$
$$+ \int_a^{2a} 0 \times 0{,}5 \times (a - x_1)\,\frac{dx_1}{E\,I} + \int_0^a [-P\,(a - x_1)]\,0{,}5\,(a - x_1)\,\frac{dx_1}{E\,I} = 0{,}58333\,\frac{P\,a^3}{E\,I}$$

b) Giro relativo entre ambos lados de la rótula *D*.

Se aplicará el teorema de la fuerza unidad. Para ello, se colocan dos momentos $\overline{M} = 1$ a ambos lados de la rótula *D* (ver figura 3).
Los momentos flectores debidos a las cargas valen:

$$M_f\big|_A^C = -P\,(4\,a - x_1)$$

$$M_f\big|_B^A = P\,(2\,a - x_1)$$

$$M_f\big|_D^B = 0$$

$$M_f\big|_E^D = -P\,(\,a - x_1)$$

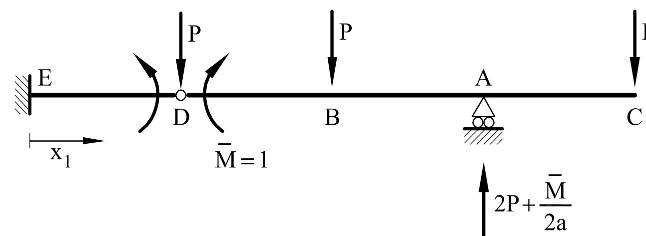


Fig. 3 Momento unidad en D

Las leyes de momentos flectores debidas a $\overline{M} = 1$ valen:

$$m_f \Big|_A^C = 0$$

$$m_f \Big|_A^B = (3\,a - x_1)\,\frac{\overline{M}}{2\,a} = \frac{1}{2\,a}\,(3\,a - x_1)$$

$$m_f \Big|_D^B = \frac{1}{2\,a}\,(3\,a - x_1)$$

$$m_f \Big|_E^D = \frac{1}{2\,a}\,(3\,a - x_1)$$

El giro relativo entre los dos labios de la rótula *D* valdrá

$$[\varphi_D] = \int_0^{4a} M_f\ m_f\ \frac{dx_1}{E\ I} = \int_{2a}^{3a} P\,(2\,a - x_1)\,\frac{1}{2\,a}\,(3\,a - x_1)\,\frac{dx_1}{E\ I} +$$

$$+ \int_0^{a} \left[- P\,(a - x_1)\right]\frac{1}{2\,a}\,(3\,a - x_1)\,\frac{dx_1}{E\ I} = -0{,}75\,\frac{P\,a^2}{E\ I}$$

Problema 7.4 *Determinar la flecha en el punto A, así como los giros en ambos lados de la articulación D, en la viga de la figura 1. Se tendrá únicamente en cuenta la deformación debida al momento flector.*

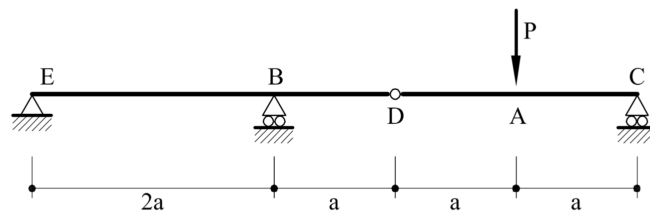


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 7.4

Solución

a) Flecha en el punto *A*

De acuerdo con la figura 2 las leyes de momentos valen:

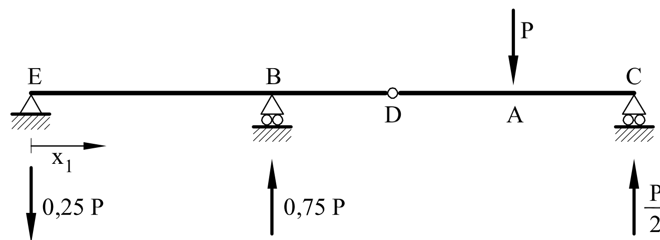


Fig. 2 Reacciones y eje x_1

$$M_f\Big|_C^A = \frac{P}{2}\left(5\,a - x_1\right)$$

$$M_f\Big|_A^D = P\,\left(-1{,}5\,a + 0{,}5\,x_1\right)$$

$$M_f\Big|_D^B = P\,\left(-1{,}5\,a + 0{,}5\,x_1\right)$$

$$M_f\Big|_E^B = -\,0{,}25\,P\,x_1$$

Derivando las leyes de momentos respecto a *P* y aplicando el teorema de Castigliano:

$$\upsilon_A = \int_0^{5a} M_f \frac{\partial M_f}{\partial P} \frac{dx_1}{E\,I} = \int_{4a}^{5a} \frac{P}{4} \left(5\,a - x_1\right)^2 \frac{dx_1}{E\,I} + \int_{3a}^{4a} P\left(-1{,}5\,a + 0{,}5\,x_1\right)^2 \frac{dx_1}{E\,I} +$$

$$+ \int_{2a}^{3a} P\left(-1{,}5\,a + 0{,}5\,x_1\right)^2 \frac{dx_1}{E\,I} + \int_0^{2a} P\left(0{,}25\,x_1\right)^2 \frac{dx_1}{E\,I} = 0{,}41667 \frac{P\,a^3}{E\,I}$$

b) Giro relativo en *D*

Se coloca un par de momentos $\overline{M} = 1$ uno en cada labio de la rótula *D* (figura 3).

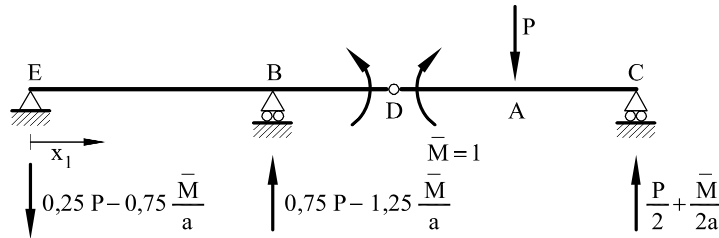


Fig. 3 Momento unidad aplicado en D

La ley de momentos flectores debido a $\overline{M} = 1$ vale:

$$m_f\Big|_C^B = \frac{\overline{M}}{2\,a}\left(5\,a - x_1\right) = \frac{1}{2\,a}\left(5\,a - x_1\right)$$

$$m_f\Big|_B^E = 0{,}75 \frac{\overline{M}}{a}\, x_1 = 0{,}75 \frac{x_1}{a}$$

Aplicando el teorema de la fuerza unidad, el giro relativo en *D* vale:

$$\left[\varphi_D\right] = \int_0^{5a} M_f\; m_f \frac{dx_1}{E\,I} = \int_{4a}^{5a} \frac{P}{2}\left(5\,a - x_1\right)\frac{1}{2\,a}\left(5\,a - x_1\right)\frac{dx_1}{E\,I} +$$

$$+ \int_{2a}^{4a} P\left(-1{,}5\,a + 0{,}5\,x_1\right)\left(5\,a - x_1\right)\frac{1}{2\,a}\frac{dx_1}{E\,I} + \int_a^{2a} \frac{P}{a}\left(-0{,}25\,x_1\right)\left(0{,}75\,x_1\right)\frac{dx_1}{E\,I} =$$

$$= -0{,}58333 \frac{P\,a^2}{E\,I}$$

Problema 7.5 *En la viga que se representa en la figura 1, determinar el giro en el apoyo B.*

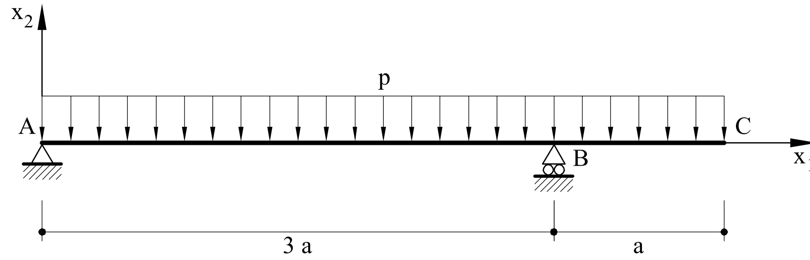


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 7.5

Solución

Las leyes de momentos flectores debidas a las cargas valen:

$$M_f\Big|_B^C = -p\,\frac{(4\,a - x_1)^2}{2}$$

$$M_f\Big|_A^B = \frac{4}{3}\,pax_1 - p\,\frac{x_1^2}{2}$$

Si se coloca un momento virtual $\overline{M} = 1$ en *B* (figura 2) las leyes de momentos flectores valen:

$$m_f\Big|_B^C = 0$$

$$m_f\Big|_A^B = \frac{x_1}{3\,a}$$



Fig. 2 Momento unidad en B

Aplicando el teorema de la fuerza unidad, el giro en *B* valdrá:

$$\varphi_B = \int_0^{4a} M_f\; m_f\;\frac{dx_1}{E\,I} = \int_0^{3a}\left(\frac{4}{3}\,p\,a\,x_1 - p\,\frac{x_1^2}{2}\right)\frac{x_1}{3a}\,\frac{dx_1}{E\,I} = \frac{5}{8}\,\frac{p\,a^3}{E\,I}$$

Problema 7.6 *En la viga simplemente apoyada de la figura 1 el canto vale 60 cm y el coeficiente de dilatación lineal* $\alpha = 10^{-5}\,{}^{o}C^{-1}$. *Con las temperaturas que en la figura se indican, se pide:*

- *Utilizando el teorema de los trabajos virtuales, determinar los giros en los extremos.*

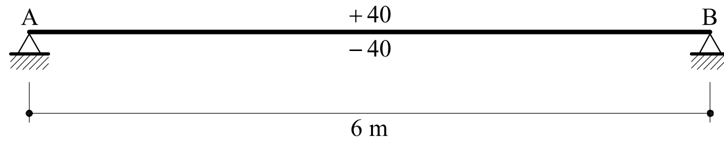


Fig .1 Viga correspondiente al problema 7.6

Solución

Por simetría el giro en *A* será igual al giro en *B* aunque el signo será el contrario.
Supóngase que se introduce un momento virtual $\overline{M}_B$ en *B* (figura 2) y sean:

- χ^{nt} la curvatura en cada punto de la viga debida a la temperatura.
- $\overline{M}_f$ la ley de momentos flectores debida al momento virtual $\overline{M}_B$.

De acuerdo con el teorema de los trabajos virtuales complementarios se tendrá que

$$\int_0^6 \chi^{nt}\,\overline{M}_f\,dx_1 = \varphi_B\,\overline{M}_B$$

siendo φ_B el giro en *B* producido por la temperatura

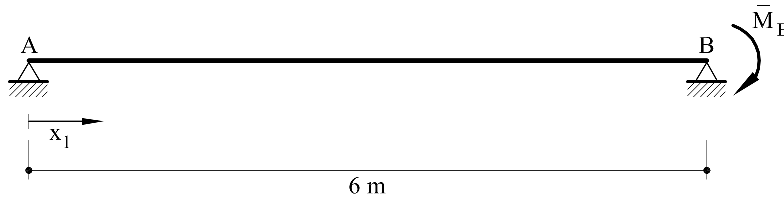


Fig. 2 Viga con un momento virtual

La curvatura χ^{nt} vale

$$\chi^{nt} = -\frac{2\,\alpha\,t}{h} = -\frac{2\times 10^{-5}\times 40}{0{,}6} = -1{,}3333\times 10^{-3}\,m^{-1}$$

$$\overline{M}_f = -\overline{M}_B\,\frac{x_1}{6}$$

O sea:

$$\int_0^6 \chi^{nt}\,\overline{M}_f\,dx_1 = \int_0^6 1{,}3333\times 10^{-3}\times \overline{M}_B\,\frac{x_1}{6}\,dx_1 = 4\times 10^{-3}\,\overline{M}_B$$

Es decir:

$$\varphi_B = 4 \times 10^{-3}\, rdn \quad \text{(en el mismo sentido que } \overline{M}_B\text{)}$$

Problema 7.7 *Utilizando el método de la fuerza unidad, determinar la flecha en el punto medio de AB (figura 1)*

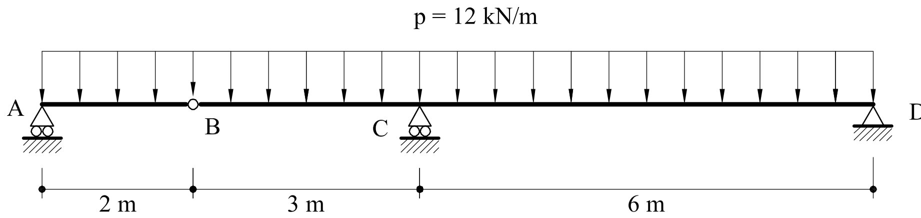


Fig.1 Estructura correspondiente al problema 7.7

Solución

Sea G el punto medio de AB.

Con los ejes que se representan en la figura 2 (únicos para toda la estructura) las leyes de momentos flectores se escriben:

$$M_f\Big|_A^G = 12\,x_1 - p\frac{x_1^2}{2} = 12\,x_1 - 6\,x_1^2$$

$$M_f\Big|_G^C = 12\,x_1 - 6\,x_1^2$$

$$M_f\Big|_C^D = 21(11 - x_1) - 6(11 - x_1)^2$$

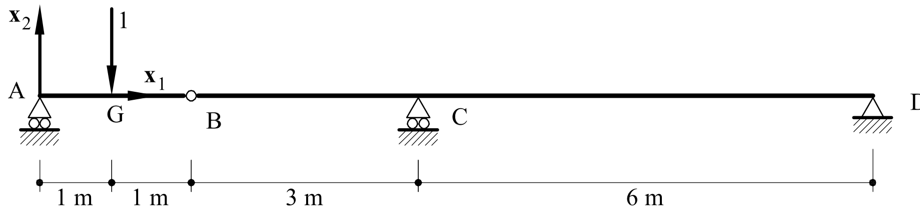


Fig. 2. Sistema de ejes y fuerza unidad

Las leyes de momentos flectores debida a una carga unidad situada en G valen

$$m_f\Big|_A^C = 0{,}5\,x_1$$

$$m_f\Big|_G^C = 0{,}5\,x_1 - (x_1 - 1) = 1 - 0{,}5\,x_1$$

$$m_f\Big|_C^D = -0{,}25(11 - x_1)$$

Por tanto, aplicando el teorema de la figura unidad

$$\upsilon_G = \int_0^1 M_f\Big|_A^G m_f\Big|_A^G \frac{d\,x_1}{E\,I} + \int_1^5 M_f\Big|_G^C m_f\Big|_G^C \frac{d\,x_1}{E\,I} + \int_5^{11} M_f\Big|_D^C m_f\Big|_D^C \frac{d\,x_1}{E\,I} = \frac{225{,}25}{E\,I}$$

Problema 7.8 *En la estructura de la figura 1 calcular los movimientos en C, aplicando el teorema de la fuerza unidad. Se considera la deformación por momento flector, cortante y axil.*

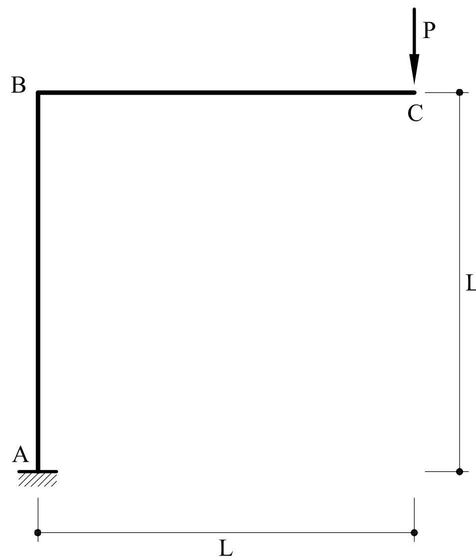


Fig. 1 Pórtico correspondiente al problema 7.8

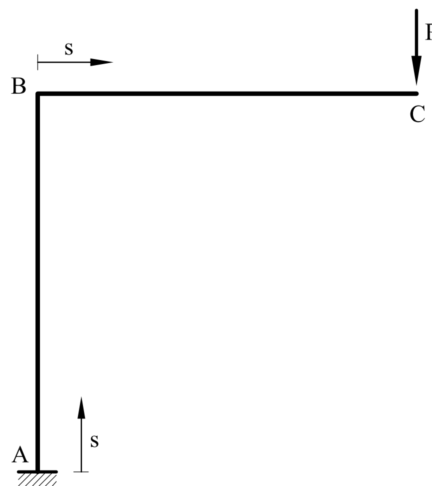


Fig. 2 Sistemas de ejes

Solución

De acuerdo con el sistema de ejes locales que se representa en la figura 2, las leyes de esfuerzos se escriben:

Momentos flectores:

$$M_f\Big|_C^B = -P\left(L-s\right)$$

$$M_f\Big|_A^B = -PL$$

Esfuerzos cortantes:

$$Q\Big|_B^C = -P$$

$$Q\Big|_A^B = 0$$

Esfuerzos axiles:

$$N\Big|_B^C = 0$$

$$N\Big|_A^B = -P$$

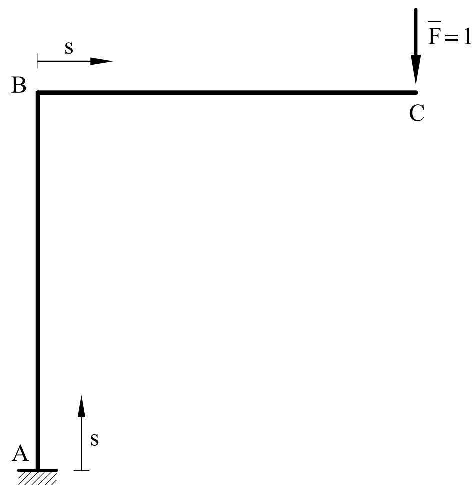


Fig. 3 Fuerza unidad vertical en C

1) Movimiento vertical de *C*: Se coloca una fuerza unidad $\overline{F} = 1$ en el punto *C* (se coloca vertical descendente).

   Leyes de esfuerzos:

$$m_f\Big|_C^B = -(L - s)$$

$$m_f\Big|_A^B = -L$$

$$q\Big|_B^C = -1$$

$$q\Big|_A^B = 0$$

$$n\Big|_B^C = 0$$

$$n\Big|_A^B = -1$$

El movimiento vertical de C υ_{2c} (positivo si descendente) valdrá:

$$\upsilon_{2c} = \int_B^C P\left(L-s\right)^2 \frac{ds}{E\,I} + \int_B^C P\frac{ds}{kGA} + 0 + \int_A^B P\,L^2\frac{ds}{E\,I} + 0 + \int_A^B P\frac{ds}{E\,A} =$$

$$= \frac{4}{3}\frac{P\,L^3}{E\,I} + \frac{P\,L}{kGA} + \frac{P\,L}{E\,A}$$

2) Movimiento horizontal de C: Se coloca una fuerza unidad $\overline{F} = 1$ en el punto C y dirigida hacia la derecha.

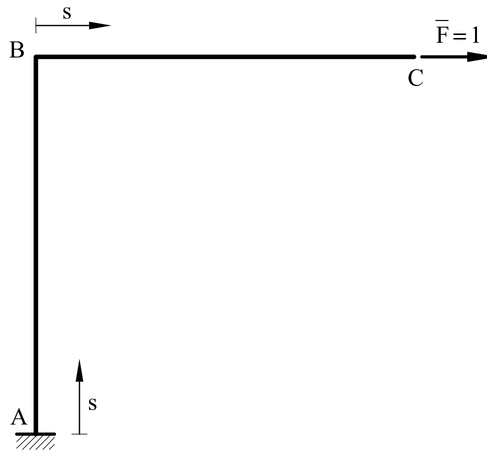


Fig. 4 fuerza unidad horizontal en C

Las leyes de esfuerzos serán:

$$m_f\Big|_B^C = 0$$

$$m_f\Big|_A^B = -\left(L-s\right)$$

$$q\Big|_B^C = 0$$

$$q\Big|_A^B = -1$$

$$n\Big|_B^C = 1$$

$$n\Big|_A^B = 0$$

El movimiento horizontal de C υ_{1C} (positivo si hacia la derecha) valdrá:

$$\upsilon_{1C} = 0+0+0+\int_A^B P\ L\left(L-s\right)\frac{ds}{E\ I}+0+0=\frac{P\ L^3}{2\ E\ I}$$

3) Giro del punto *C*. Se coloca un momento unidad en *C* de valor $\overline{M}_C = 1$

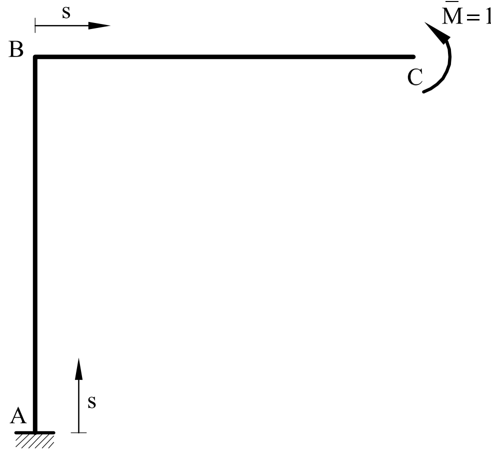


Fig. 5 Momento unidad en C

Las leyes de cortantes y axiles son nulas y las de momentos valdrán:

$$m_f\Big|_B^C = 1$$

$$m_f\Big|_A^B = 1$$

Por lo tanto, el giro en *C* (positivo si antihorario) valdrá

$$\varphi_B = -\int_O^L P\left(L-s\right)\frac{ds}{E\ I}-\int_O^L P\ L\ \frac{ds}{E\ I} = -\frac{3}{2}\ \frac{P\ L^2}{E\ I}$$

Problema 7.9 *En la estructura de la figura 1, hallar el movimiento vertical del punto A.*

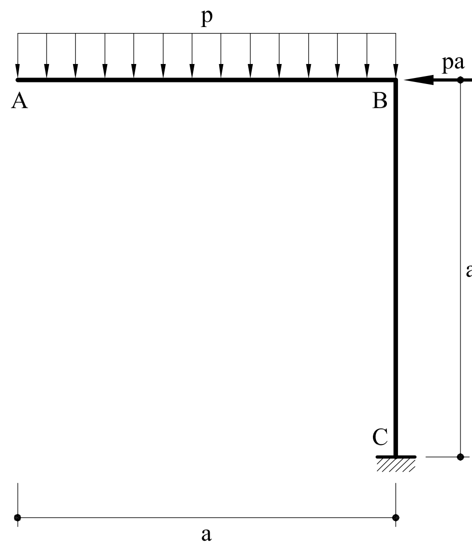


Fig. 1 Pórtico correspondiente al problema 7.9

Solución

Se obtendrá el valor del movimiento vertical en *A* aplicando el teorema de la fuerza unidad. Para ello, se coloca una fuerza $\overline{F} = 1$ en A (figura 2).

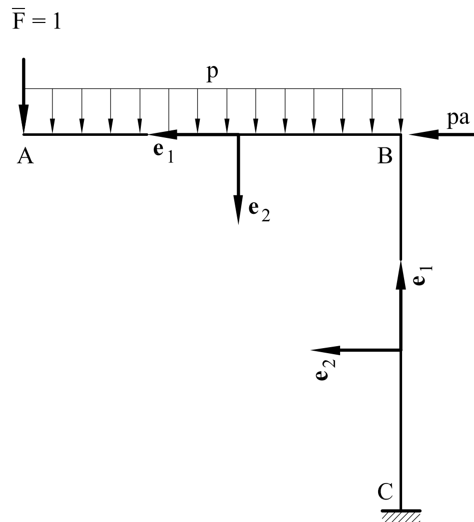


Fig. 2 Fuerza unidad en A y sistema de ejes

Las leyes de momentos flectores debidas a las cargas valen

$$M_f\Big|_A^B = p\,\frac{(a - x_1)^2}{2}$$

$$M_f\Big|_B^C = p\frac{a^2}{2} - p\,a\,(x_1 - a)$$

$$m_f\Big|_A^B = a - x_1$$

$$m_f\Big|_B^C = a$$

Por lo tanto, el movimiento vertical de *A* (positivo si ascendente) valdrá:

$$\upsilon_A = \int_A^B p\,\frac{(a-x_1)^2}{2}\,(a-x_1)\,\frac{dx_1}{E\,I} + \int_B^C \left[\frac{pa^2}{2} - pa(x_1 - a)\right] a\,\frac{dx_1}{E\,I} = \frac{9}{8}\,\frac{pa^4}{E\,I}$$

Problema 7.10 *En la estructura que se representa en la figura 1 hallar (teniendo en cuenta únicamente la energía de deformación debida al momento flector) el movimiento horizontal de D. El producto EI en todas las barras vale EI = 200 MN×m^2.*

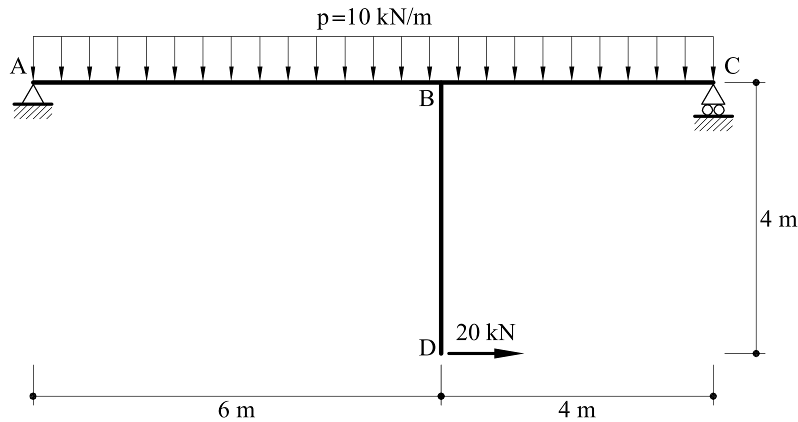


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 7.10

Solución

Se utilizará el teorema de Castigliano. Para ello, se sustituye la fuerza horizontal de 20 *kN* aplicada en *D* por una fuerza genérica *F* (figura 2).

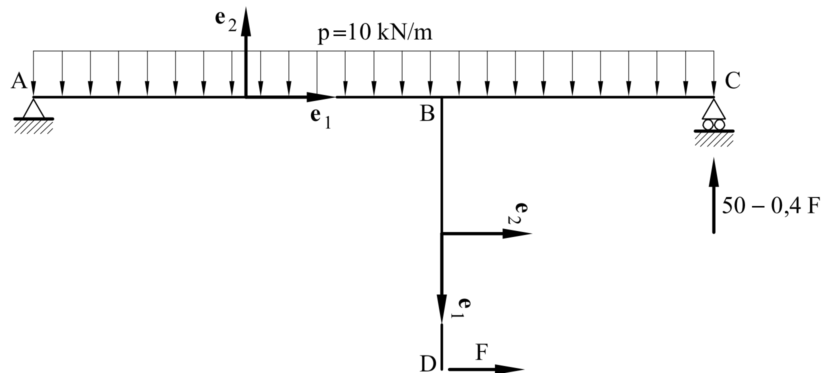


Fig. 2 Fuerza en F aplicada en D y sistema de ejes.

La ley de momentos flectores se escribe

$$M_f\Big|_B^D = F\left(4 - x_1\right)$$

$$M_f\Big|_B^C = \left(50 - 0{,}4F\right)\left(10 - x_1\right) - \frac{10\left(10 - x_1\right)^2}{2}$$

$$M_f\Big|_A^B = \left(50 - 0{,}4F\right)\left(10 - x_1\right) - \frac{10\left(10 - x_1\right)^2}{2} + 4\,F$$

Derivando respecto a *F*

$$\frac{\partial M_f\Big|_B^D}{\partial F} = (4 - x_1)$$

$$\frac{\partial M_f\Big|_B^C}{\partial F} = -0{,}4\,(10 - x_1)$$

$$\frac{\partial M_f\Big|_A^B}{\partial F} = -0{,}4\,(10 - x_1) + 4 = 0{,}4\,x_1$$

El movimiento horizontal del punto *D* se obtendrá

$$u_D = \int_0^4 F\,(4 - x_1)(4 - x_1)\frac{dx_1}{E\,I} + \int_6^{10}\left[(50 - 0{,}4\,F)(10 - x_1) - \frac{10(10 - x_1)^2}{2}\right]\times$$
$$\left[-0{,}4(10 - x_1)\right]\frac{dx_1}{E\,I} + \int_0^6\left[(50 - 0{,}4\,F)(10 - x_1) - \frac{10(10 - x_1)^2}{2} + 4\,F\right]0{,}4\,x_1\,\frac{dx_1}{E\,I} =$$
$$= \frac{493{,}333 + 36{,}2667\,F}{E\,I}$$

y sustituyendo *F* y el producto *EI* por sus valores

$$u_D = 6{,}09\times 10^{-3}\,metros = 6{,}09\ mm$$

Problema 7.11 *En el pórtico que se representa en la figura 1 hallar el movimiento horizontal de A así como el giro de A.*

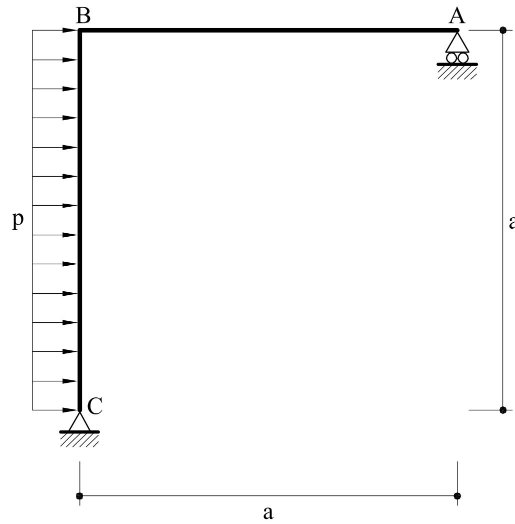


Fig. 1 Pórtico correspondiente al problema 7.11

Solución

Con el sistema de ejes indicados, las leyes de momentos flectores se escriben:

$$M_f\Big|_A^B = \frac{pa}{2}\left(a - x_1\right)$$

$$M_f\Big|_B^C = -p\,\frac{x_1^2}{2} + p\,a\,x_1$$

a) Para hallar el movimiento horizontal en *A*, se coloca una fuerza horizontal $\overline{F} = 1$ en *A* (figura 2).
   Las leyes de momentos flectores valen

$$m_f\Big|_A^B = \overline{F}\left(a - x_1\right) = a - x_1$$

$$m_f\Big|_B^C = \overline{F}x_1 = x_1$$

   El movimiento horizontal de *A* valdrá

$$u_A = \int_C^B M_f\; m_f\;\frac{dx_1}{E\,I} + \int_B^A M_f\; m_f\;\frac{dx_1}{E\,I} = \int_0^a \frac{pa}{2}\left(a - x_1\right)^2\frac{dx_1}{E\,I} +$$
$$+\int_0^a\left(-p\frac{x_1^2}{2} + p\,a\,x_1\right)x_1\;\frac{dx_1}{E\,I} = 0{,}375\;\frac{p\,a^4}{E\,I}$$

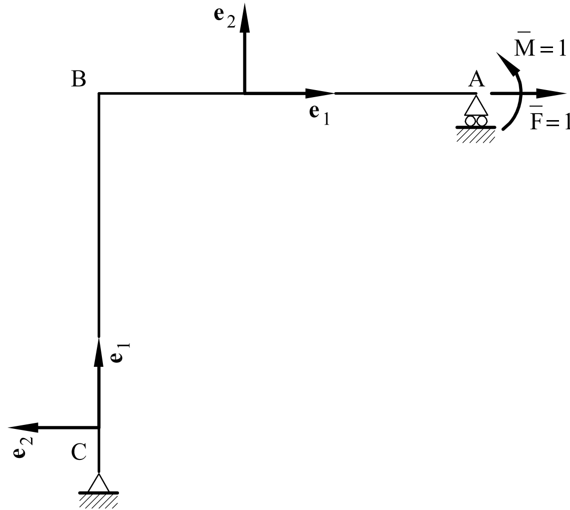


Fig. 2 Fuerza y momento unidad en A

b) Para determinar el giro en **A**, se introduce un momento $\overline{M}=1$ en A (figura 2). Las leyes de momentos debidas a $\overline{M}=1$ valen

$$m_f\Big|_A^B=-\frac{\overline{M}}{a}\left(a-x_1\right)+\overline{M}=\frac{x_1}{a}$$

$$m_f\Big|_B^C=0$$

El giro en A valdrá (positivo si antihorario):

$$\varphi_A=\int_C^B M_f\ m_f\ \frac{dx_1}{E\ I}+\int_B^A M_f\ m_f\ \frac{dx_1}{E\ I}=\int_0^a\frac{p\,a}{2}\left(a-x_1\right)\frac{x_1}{a}\frac{dx_1}{E\ I}=0{,}08333\ \frac{p\,a^3}{E\ I}$$

Problema 7.12 *Determinar el desplazamiento horizontal del nudo A del entramado isostático de la figura 1. No se consideran deformaciones por axil.*
La rigidez EI es constante para todas las barras.

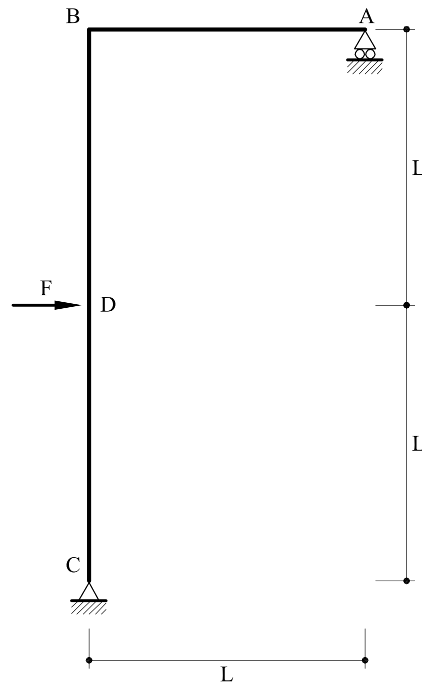


Fig. 1 Pórtico correspondiente al problema 7.12

Solución

Para calcular el movimiento horizontal del punto *A* se coloca una fuerza unidad $\overline{F}=1$ en *A* (figura 2).

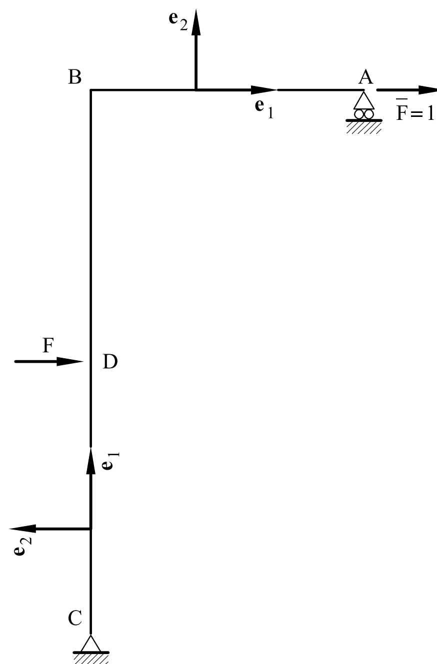


Fig. 2 Fuerza unidad en A y sistema de ejes.

La ley de momentos flectores debido a las cargas externas vale

$$M_f\Big|_A^B = F\,(L - x_1)$$

$$M_f\Big|_D^B = F\ L$$

$$M_f\Big|_C^D = F\ L - F(L - x_1) = F\ x_1$$

La ley de momentos flectores debido a $\overline{F} = 1$ se escribe

$$m_f\Big|_A^B = 2\,\overline{F}\,(L - x_1) = 2\,(L - x_1)$$

$$m_f\Big|_B^C = \overline{F}\ x_1 = x_1$$

Aplicando el teorema de la fuerza unidad

$$u_A = \int_A^B M_f\ m_f\ \frac{dx_1}{E\ I} + \int_C^B M_f\ m_f\ \frac{dx_1}{E\ I} = \int_0^L F\,(L - x_1)\,2\,(L - x_1)\frac{dx_1}{E\ I} +$$

$$+ \int_0^L (F\ x_1)\,x_1\ \frac{dx_1}{E\ I} + \int_L^{2L} (F\ L)\,x_1\ \frac{dx_1}{E\ I} = 2{,}5\ F\ L^3$$

Problema 7.13 *Determinar el desplazamiento vertical de la sección A y el desplazamiento sufrido por el apoyo en B de la estructura de la figura .1. Considérese las rigideces conocidas. Se tendrá en cuenta únicamente la energía de deformación debida al momento flector.*

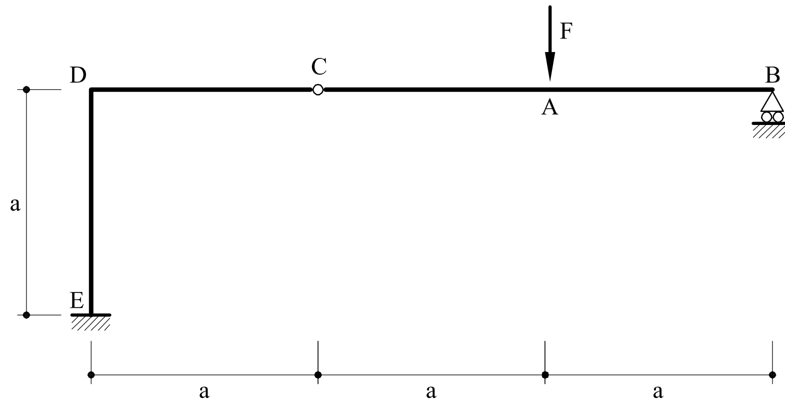


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 7.13

Solución

a) Movimiento vertical del punto *A*
Se resolverá utilizando el teorema de Castigliano. De acuerdo con el sistema de ejes locales en la figura 2 las leyes de momentos valen:

$$M_f\Big|_A^B = \frac{F}{2}\left(3\,a - x_1\right)$$

$$M_f\Big|_A^D = -\frac{F}{2}\left(\,a - x_1\right)$$

$$M_f\Big|_D^E = -\frac{F\,a}{2}$$

y sus derivados respecto a *F*

$$\frac{\partial\, M_f\Big|_A^B}{\partial\, F} = \frac{1}{2}\left(3a - x_1\right)$$

$$\frac{\partial\, M_f\Big|_A^D}{\partial\, F} = -\frac{1}{2}\left(\,a - x_1\right)$$

$$\frac{\partial\, M_f\Big|_D^E}{\partial\, F} = -\frac{a}{2}$$

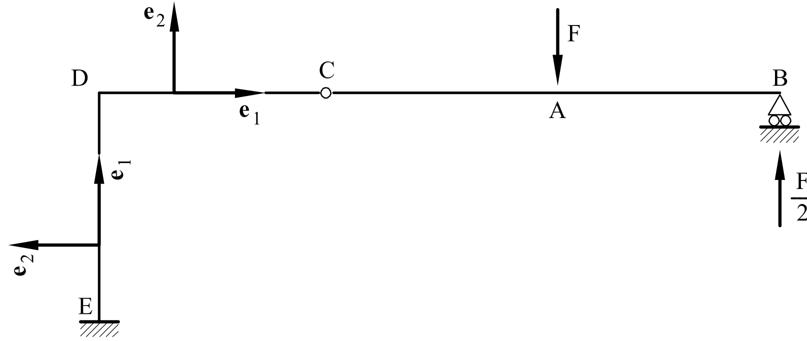


Fig. 2 Sistema de ejes y fuerza virtual $\overline{F} = 1$ *en B*

El movimiento vertical de *A* valdrá

$$\upsilon_A = \int_A^B M_f \frac{\partial M_f}{\partial F} \frac{dx_1}{E\,I} + \int_D^A M_f \frac{\partial M_f}{\partial F} \frac{dx_1}{E\,I} + \int_E^D M_f \frac{\partial M_f}{\partial F} \frac{dx_1}{E\,I} =$$

$$= \int_{2a}^{3a} \frac{F}{2} \cdot \frac{1}{2} (3a - x_1)^2 \frac{dx_1}{E\,I} + \int_0^{2a} \frac{F}{4} (a - x_1)^2 \frac{dx_1}{E\,I} + \int_0^a \frac{F}{4} a^2 \frac{dx_1}{E\,I} = 0{,}5 \frac{F\,a^3}{E\,I}$$

b) Movimiento horizontal del punto *B*

Se utilizará el teorema de la fuerza unidad. Para ello, se coloca una fuerza $\overline{F} = 1$ en *B* (figura 2). Las leyes de momentos debidas a $\overline{F} = 1$ valdrán:

$$m_f \Big|_D^B = 0$$

$$m_f \Big|_E^D = -\overline{F} \, (a - x_1) = -(a - x_1)$$

Por lo tanto, el movimiento horizontal de *B* valdrá:

$$\upsilon_B = \int_E^D M_f \; m_f \frac{dx_1}{E\,I} = \int_0^a \frac{F\,a}{2} (a - x_1) \frac{dx_1}{E\,I} = 0{,}25 \frac{F\,a^3}{E\,I}$$

Problema 7.14 *En el pórtico que se representa en la figura 1 hallar el movimiento vertical en C.*

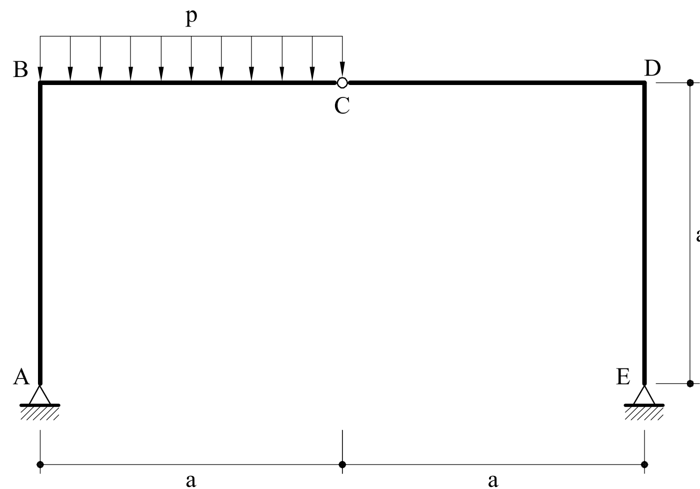


Fig. 1 Pórtico correspondiente al problema 7.14

Solución

Se aplicará el teorema de la fuerza unidad. Para ello, se coloca una fuerza vertical $\overline{F}=1$ en el punto *C* (figura 2).

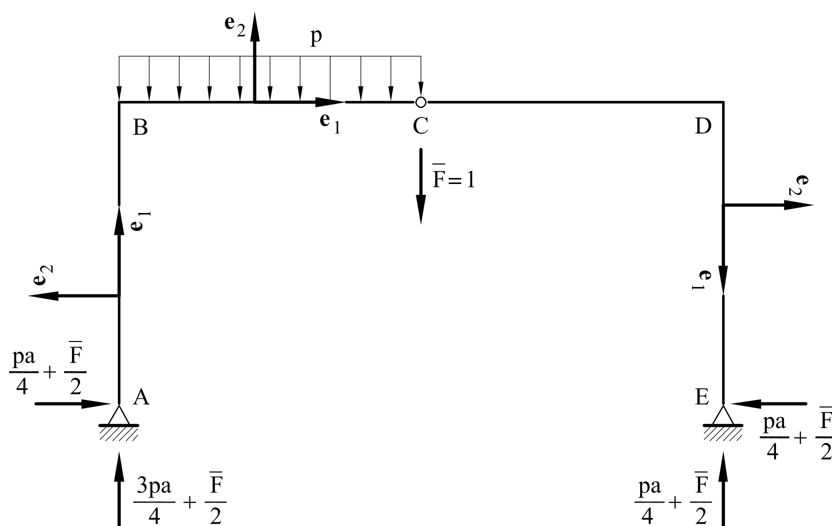


Fig. 2 Fuerza unidad en C y sistema de ejes

Las leyes de momentos flectores debidos a las cargas externas serán

$$M_f\Big|_D^E=-\frac{p\,a}{4}\left(a-x_1\right)$$

$$M_f\Big|_C^D=\frac{p\,a}{4}\left(a-x_1\right)$$

$$M_f\Big|_B^C = \frac{p\,a}{4}(a-x_1) - p\frac{(a-x_1)^2}{2}$$

$$M_f\Big|_A^B = -\frac{p\,a}{4}\,x_1$$

Los momentos flectores debidos a $\overline{F}=1$ valen:

$$m_f\Big|_D^E = -\frac{1}{2}(a-x_1)$$

$$m_f\Big|_D^C = \frac{1}{2}(a-x_1)$$

$$m_f\Big|_B^C = -\frac{1}{2}(a-x_1)$$

$$m_f\Big|_A^B = -\frac{x_1}{2}$$

O sea:

$$\upsilon_C = \int_E^D M_f\; m_f\;\frac{dx_1}{E\,I} + \int_B^D M_f\; m_f\;\frac{dx_1}{E\,I} + \int_A^B M_f\; m_f\;\frac{dx_1}{E\,I} =$$
$$= \int_0^a \left[-\frac{pa}{4}(a-x_1)\right]\left[-\frac{1}{2}(a-x_1)\right]\frac{dx_1}{E\,I} + \int_a^{2a}\frac{pa}{4}(a-x_1)\frac{1}{2}(a-x_1)\frac{dx_1}{E\,I} +$$
$$+ \int_0^a \left[\frac{pa}{4}(a-x_1) - \frac{p}{2}(a-x_1)^2\right]\left[-\frac{1}{2}(a-x_1)\right]\frac{dx_1}{E\,I} + \int_0^a\left(-\frac{pa}{4}\,x_1\right)\left(-\frac{x_1}{2}\right)\frac{dx_1}{E\,I} =$$
$$= \frac{7\,p\,a^4}{48\,E\,I}$$

Problema 7.15 *Utilizando el teorema de la fuerza unidad determinar el movimiento relativo de A respecto de B según la línea de acción AB. Se considera únicamente la deformación debida al momento flector.*

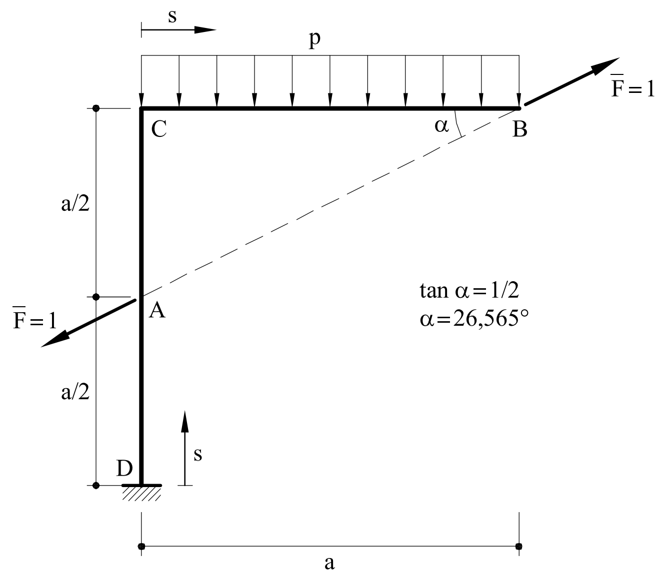


Fig. 1 Pórtico correspondiente al problema 7.15

Solución

Las leyes de momentos valen

$$M_f\Big|_B^C = -p\frac{(a-s)^2}{2}$$

$$M_f\Big|_A^C = -p\frac{a^2}{2}$$

$$M_f\Big|_D^A = -p\frac{a^2}{2}$$

Las leyes de momentos debidas a $\overline{F} = 1$ valen

$$m_f\Big|_B^C = (a-s)\sin\alpha = 0{,}447\ (a-s)$$

$$m_f\Big|_A^C = \left(s - \frac{a}{2}\right)\cos\alpha = 0{,}8944\ (s - a/2)$$

$$m_f\Big|_A^D = 0$$

El alejamiento de los puntos *A* y *B* en dirección *AB* vale

$$\Delta_{AB} = \int_{B^0}^{C_a} \left[-\frac{p}{2}(a-s)^2 \right] (a-s)\, 0{,}447 \, \frac{ds}{E\ I} + \int_{A^{a/2}}^{C_a} \left[-\frac{pa^2}{2} \right] (s - a/2)\, 0{,}8944 \, \frac{ds}{E\ I} + 0 =$$

$$= -0{,}1118 \ \frac{pa^4}{E\ I}$$

Problema 7.16 *Determinar los desplazamientos del apoyo articulado móvil de la estructura de la figura 1.*

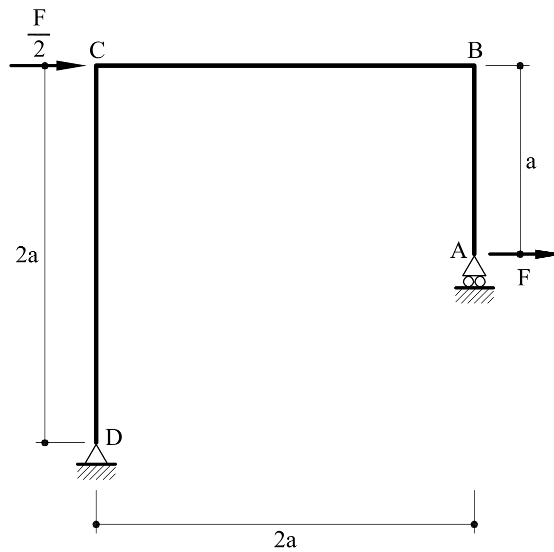


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 7.16

Solución

Se resolverá aplicando el teorema de Castigliano. Para ello, se sustituye la figura *F* aplicada en el apoyo derecho por una fuerza independiente *H*. Las leyes de momentos flectores valdrán (figura 2).

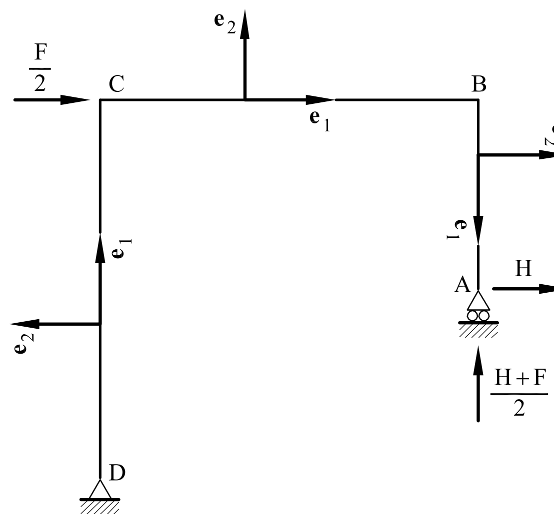


Fig. 2 Sistema de ejes

$$M_f\Big|_A^B = H\,(a - x_1)$$

$$M_f\Big|_C^B = Ha + \frac{(H+F)}{2}(2a - x_1)$$

$$M_f\Big|_D^C = (H+F)\,a - H\,(a-x_1) - \frac{F}{2}(2a-x_1)$$

y sus derivadas:

$$\frac{\partial M_f\big|_A^B}{\partial H} = a - x_1$$

$$\frac{\partial M_f\big|_C^B}{\partial H} = 2a - \frac{x_1}{2}$$

$$\frac{\partial M_f\big|_D^C}{\partial H} = x_1$$

De acuerdo con el teorema de Castigliano,

$$u_A = \int_A^B M_f\,\frac{\partial M_f}{\partial H}\,\frac{dx_1}{E\,I} + \int_C^B M_f\,\frac{\partial M_f}{\partial H}\,\frac{dx_1}{E\,I} + \int_D^C M_f\,\frac{\partial M_f}{\partial H}\,\frac{dx_1}{E\,I}$$

Sustituyendo (e igualando previamente H = F),

$$u_A = \int_0^a F\,(a-x_1)^2\,\frac{dx_1}{E\,I} + \int_0^a F\,(3a-x_1)\left(2a-\frac{x_1}{2}\right)\frac{dx_1}{E\,I} + \int_0^{2a}\frac{3F}{2}\,x_1^2\,\frac{dx_1}{E\,I} =$$

$$= 10{,}667\,\frac{F\,a^3}{E\,I}$$

Problema 7.17 *Determinar los desplazamientos verticales y horizontales del punto en el cual está aplicada la fuerza F.*

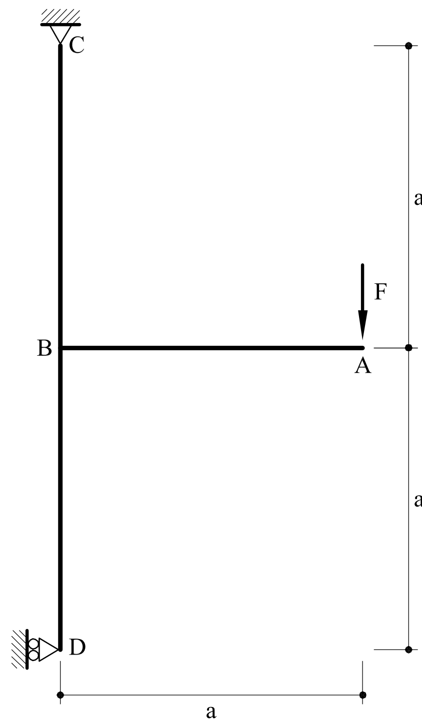


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 7.17

Solución

a) Movimiento vertical
Se utilizará el teorema de Castigliano. De acuerdo con el convenio de ejes de la figura 2 las leyes de momentos se escriben

$$M_f\Big|_A^B = -F\left(a - x_1\right)$$

$$M_f\Big|_B^C = \frac{F}{2}\left(a - x_1\right)$$

$$M_f\Big|_B^C = -\frac{F}{2}x_1$$

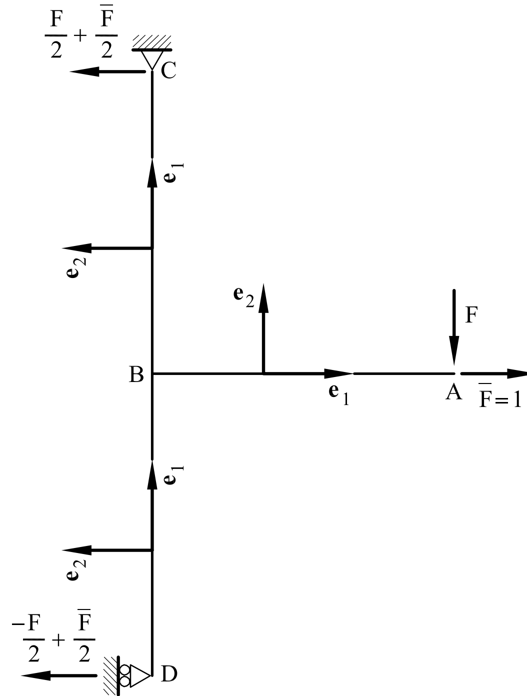


Fig. 2 Sistema de ejes y fuerza horizontal en A

Y sus derivadas:

$$\frac{\partial \left. M_f \right|_A^B}{\partial F} = -(a - x_1)$$

$$\frac{\partial \left. M_f \right|_B^C}{\partial F} = \frac{1}{2}(a - x_1)$$

$$\frac{\partial \left. M_f \right|_D^B}{\partial F} = -\frac{x_1}{2}$$

De acuerdo con el teorema de Castigliano

$$\upsilon_A = \int_A^B M_f \frac{\partial M_f}{\partial F} \frac{dx_1}{E\,I} + \int_B^C M_f \frac{\partial M_f}{\partial F} \frac{dx_1}{E\,I} + \int_B^D M_f \frac{\partial M_f}{\partial F} \frac{dx_1}{E\,I}$$

Sustituyendo:

$$\upsilon_A = \int_0^a F\,(a - x_1)^2 \frac{dx_1}{E\,I} + \int_0^a \frac{F}{4}(a - x_1)^2 \frac{dx_1}{E\,I} + \int_0^a \frac{F}{4} x_1^2 \frac{dx_1}{E\,I} = 0{,}5 \frac{F\,a^3}{E\,I}$$

b) Movimiento horizontal
Se aplicará el teorema de la fuerza unidad. Para ello, se coloca una fuerza horizontal $\overline{F} = 1$ en *A* (figura 2). Las leyes de momentos, debidos a dicha fuerza, valdrán

$$m_f\Big|_A^B = 0$$

$$m_f\Big|_B^C = \frac{\overline{F}}{2}\left(a - x_1\right) = \frac{1}{2}\left(a - x_1\right)$$

$$m_f\Big|_D^B = \frac{\overline{F}}{2}\, x_1 = \frac{x_1}{2}$$

Por lo tanto.

$$u_A = \int_A^B M_f\ m_f\ \frac{dx_1}{E\,I} + \int_B^C M_f\ m_f\ \frac{dx_1}{E\,I} + \int_B^D M_f\ m_f\ \frac{dx_1}{E\,I} =$$

$$= \int_0^a \frac{F}{2}\left(a - x_1\right)\frac{1}{2}\left(a - x_1\right)\frac{dx_1}{E\,I} + \int_0^a \left(-\frac{F}{2}\, x_1\right)\frac{1}{2}\, x_1\ \frac{dx_1}{E\,I} = 0$$

Problema 7.18 *Determinar los desplazamientos verticales y horizontales en el punto de aplicación de la fuerza F.*

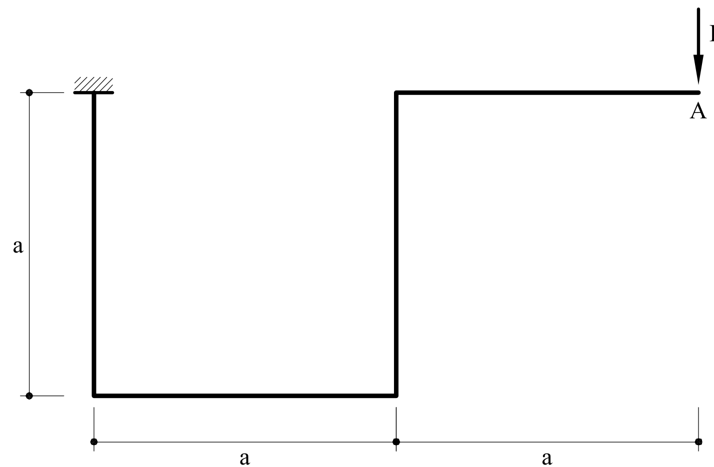


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 7.18

Solución

a) Movimiento vertical
Se aplicará el teorema de Castigliano.

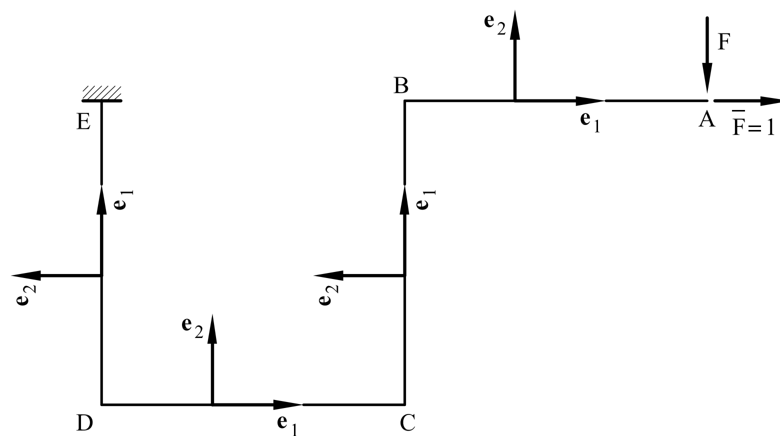


Fig. 2 Sistema de ejes locales y fuerza virtual horizontal en A

De acuerdo con el criterio de ejes de la figura 2 las leyes de esfuerzos se escriben

$$M_f\Big|_A^B = -F\,(a - x_1)$$

$$M_f\Big|_B^C = -F\,a$$

$$M_f\Big|_D^C = -F\,(2a - x_1)$$

$$M_f\Big|_E^D = 2F\,a$$

$$\frac{\partial M_f\Big|_A^B}{\partial F} = -(a - x_1)$$

$$\frac{\partial M_f\Big|_B^C}{\partial F} = -a$$

$$\frac{\partial M_f\Big|_D^C}{\partial F} = -(2a - x_1)$$

$$\frac{\partial M_f\Big|_E^D}{\partial F} = 2a$$

De acuerdo con el teorema de Castigliano

$$\upsilon_A = \int_{EDCBA} M_f \frac{\partial M_f}{\partial F} \frac{dx_1}{E\,I} = \int_0^a F\,(a - x_1)^2 \frac{dx_1}{E\,I} + \int_0^a F\,a^2 \frac{dx_1}{E\,I} +$$
$$+ \int_0^a F\,(2a - x_1)^2 \frac{dx_1}{E\,I} + \int_0^a F\,(2a)^2 \frac{dx_1}{E\,I} = 7{,}667 \frac{F\,a^3}{E\,I}$$

b) Movimiento horizontal

Se aplicará el teorema de la fuerza unidad. Para ello, se coloca una fuerza $\overline{F} = 1$ en A. Las leyes de momentos valdrán

$$m_f\Big|_A^B = 0$$

$$m_f\Big|_B^C = -\overline{F}\,(a - x_1) = -(a - x_1)$$

$$m_f\Big|_D^C = -\overline{F}\,a = -a$$

$$m_f\Big|_E^D = -\overline{F}\,(a - x_1) = -(a - x_1)$$

Por lo tanto,

$$u_A = \int_{EDCBA} M_f\, m_f \frac{dx_1}{E\,I} = \int_0^a F\,a(a - x_1)\frac{dx_1}{E\,I} + \int_0^a F\,(2a - x_1)\,a \frac{dx_1}{E\,I} +$$
$$+ \int_0^a 2F\,a\,(a - x_1)\frac{dx_1}{E\,I} = 3\frac{F\,a^3}{E\,I}$$

Problema 7.19 *Determinar el desplazamiento vertical, horizontal y el giro de la sección A. Considérese las rigideces conocidas.*

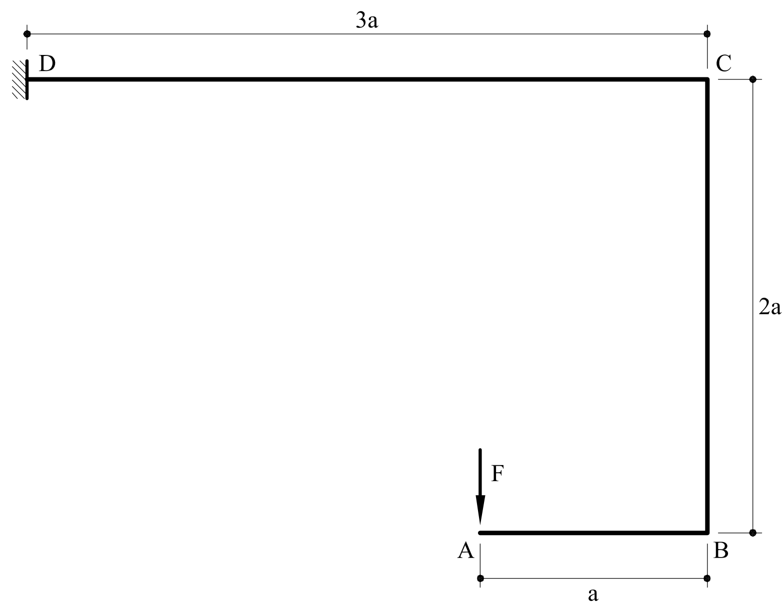


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 7.19

Solución

a) Desplazamiento vertical de *A*.
Se aplica directamente el teorema de Castigliano.

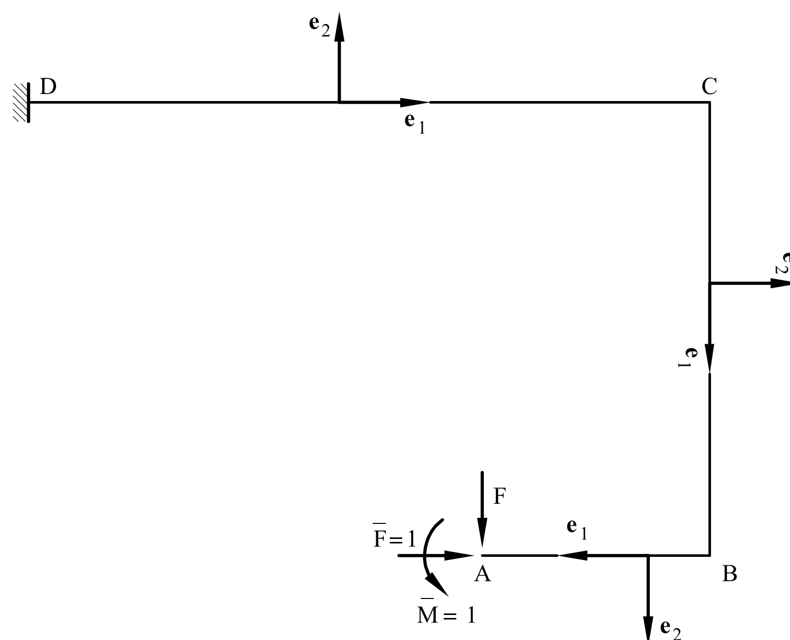


Fig. 2 Sistema de ejes y fuerza y momento unitarios en A

La ley de momentos debidos a la carga *F* se escriben:

$$M_f\Big|_A^B = F\left(a - x_1\right)$$

$$M_f\Big|_B^C = F\ a$$

$$M_f\Big|_D^C = -F\left(2a - x_1\right)$$

y sus derivadas

$$\frac{\partial M_f\Big|_A^B}{\partial F} = \left(a - x_1\right)$$

$$\frac{\partial M_f\Big|_B^C}{\partial F} = a$$

$$\frac{\partial M_f\Big|_D^C}{\partial F} = -\left(2a - x_1\right)$$

Por lo tanto:

$$\upsilon_A = \int_{ABCD} M_f\ \frac{\partial M_f}{\partial F}\ \frac{dx_1}{E\ I} = \int_0^a F\left(a - x_1\right)^2\ \frac{dx_1}{E\ I} +$$
$$+\int_0^{2a} F\ a^2\ \frac{dx_1}{E\ I} + \int_0^{3a} F\left(2a - x_1\right)^2\ \frac{dx_1}{E\ I} = \frac{16}{3}\ \frac{F\ a^3}{E\ I}$$

b) Desplazamiento horizontal de *A*.
Se introduce una fuerza unidad en *A*. La ley de momentos flectores vale

$$m_f\Big|_A^B = 0$$

$$m_f\Big|_B^C = \overline{F}\left(2a - x_1\right) = \left(2a - x_1\right)$$

$$m_f\Big|_C^D = 2\,\overline{F}a = 2a$$

De acuerdo con el teorema de la fuerza unidad

$$u_A = \int_{ABCD} M_f\ m_f\ \frac{dx_1}{E\ I} = \int_0^{2a} F\ a\left(2a - x_1\right)\frac{dx_1}{E\ I} - \int_0^{3a} F\left(2a - x_1\right)\cdot 2a\,\frac{dx_1}{E\ I} =$$
$$= -\frac{F\ a^3}{E\ I}$$

c) Giro del punto *A*.

Se aplica un momento $\overline{M}=1$ en *A*, el cual produce una ley de momentos constante en toda la estructura:

$$m_f=\overline{M}=1$$

De acuerdo con el teorema de la fuerza unidad

$$\theta_A=\int_{ABCD} M_f\ m_f\ \frac{dx_1}{E\ I}=\int_0^a F\left(a-x_1\right)\frac{dx_1}{E\ I}+\int_0^{2a} F\ a\,\frac{dx_1}{E\ I}-\int_0^{3a} F\left(2a-x_1\right)\frac{dx_1}{E\ I}=$$

$$=\frac{F\ a^2}{E\ I}$$

Problema 7.20 *Determinar la variación de las distancias entre las secciones A y B.*

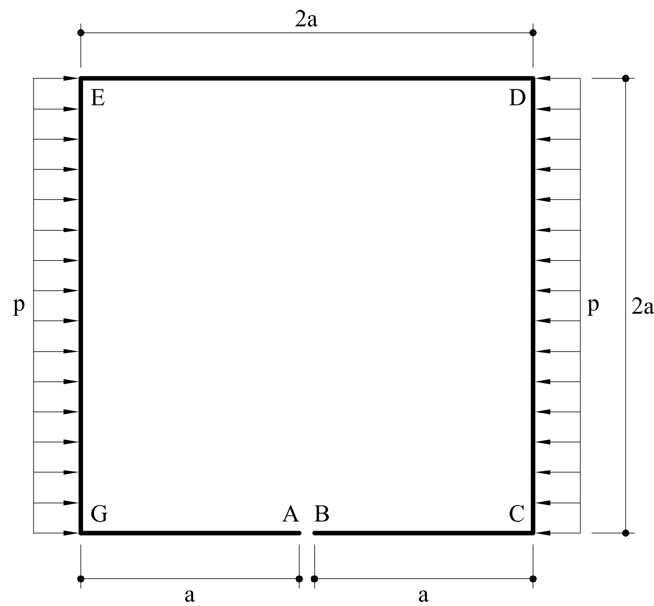


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 7.20

Solución

Se introducen dos fuerzas unitarias $\overline{F}=1$ en *A* y en *B*.

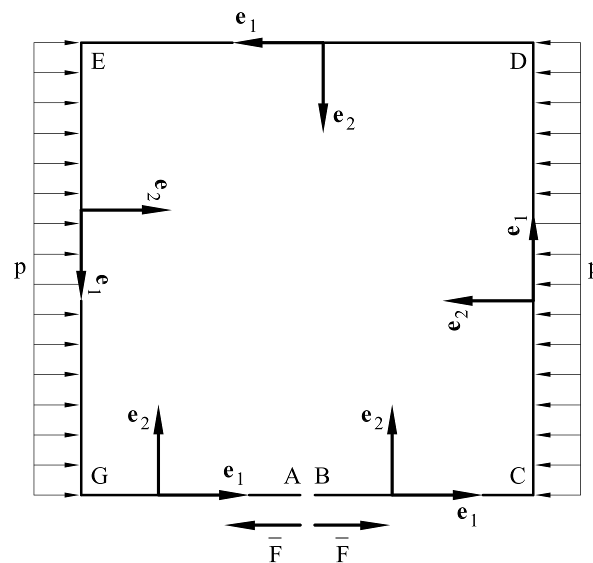


Fig. 2 Fuerzas unitarias y sistema de ejes locales

Las leyes de momentos flectores debidas a las cargas externas se escriben:

$$M_f \Big|_B^C = 0$$

$$M_f \Big|_C^D = p\frac{x_1^2}{2}$$

$$M_f \Big|_D^E = 2pa^2$$

$$M_f \Big|_E^G = p\ \frac{(2a - x_1)^2}{2}$$

$$M_f \Big|_G^A = 0$$

Debido a las dos fuerzas $\overline{F} = 1$ las leyes de momentos se escriben:

$$m_f \Big|_B^C = 0$$

$$m_f \Big|_C^D = -\overline{F}\, x_1 = -x_1$$

$$m_f \Big|_E^D = -\overline{F}\, 2a = -2a$$

$$m_f \Big|_G^E = -\overline{F}\,(2a - x_1) = -(2a - x_1)$$

$$m_f \Big|_G^A = 0$$

El movimiento relativo entre *A* y *B* valdrá

$$u_{AB} = \int_{BCDEGA} M_f\ m_f\ \frac{dx_1}{E\ I} = -\int_0^{2a} p\frac{x_1^3}{2}\ \frac{dx_1}{E\ I} - \int_0^{2a} 2pa^2 \cdot 2a\ \frac{dx_1}{E\ I} -$$
$$-\int_0^{2a} \frac{p}{2}\,(2a - x_1)^3\ \frac{dx_1}{E\ I} = -12\ \frac{pa^4}{E\ I}$$

Problema 7.21 *Determinar el desplazamiento vertical y horizontal del punto A en el arco de la figura 1. La sección de la estructura es rectangular y el área vale A.*
Nota: Se tendrá en cuenta la deformación por flector, cortante y axil.

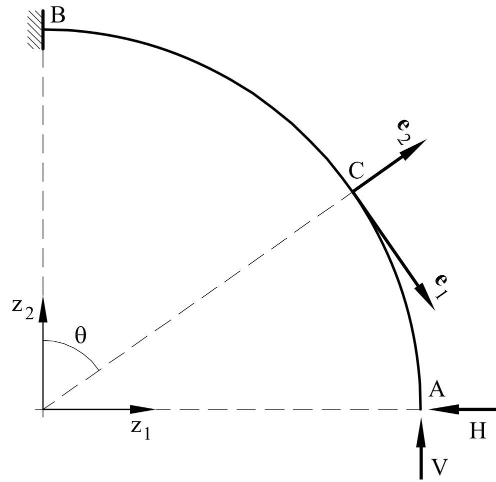


Fig. 1 Arco correspondiente al problema 7.21

Solución

Se resolverá el problema utilizando el teorema de Castigliano. Las leyes de esfuerzos valen:

$$M_f = VR\left(1-\sin\theta\right) - HR\cos\theta$$

$$Q = V\cos\theta - H\sin\theta$$

$$N = -V\sin\theta - H\cos\theta$$

Para hallar el movimiento horizontal se derivan los esfuerzos respecto a *H*.

$$\frac{\partial M_f}{\partial H} = -R\cos\theta$$

$$\frac{\partial Q}{\partial H} = -sin\theta$$

$$\frac{\partial N}{\partial H} = -\cos\theta$$

y por lo tanto

$$u_A = \int_0^{\pi/2} M_f \frac{\partial M_f}{\partial H}\frac{R\,d\theta}{EI} + \int_0^{\pi/2} Q\frac{\partial Q}{\partial H}\frac{R\,d\theta}{kGA} + \int_0^{\pi/2} N\frac{\partial N}{\partial H}\frac{R\,d\theta}{EA} =$$

$$= 0{,}5VR\left(-\frac{R^2}{EI} - \frac{1}{kGA} + \frac{1}{EA}\right) + 0{,}7854\,HR\left(\frac{R^2}{EI} + \frac{1}{kGA} + \frac{1}{EA}\right)$$

Análogamente, el movimiento vertical vale

$$\upsilon_A = VR\left(0{,}3562\,\frac{R^2}{E\,I} + \frac{0{,}7854}{k\,G\,A} + \frac{0{,}7854}{E\,A}\right) + 0{,}5\,HR\left(-\frac{R^2}{E\,I} - \frac{1}{k\,G\,A} + \frac{1}{E\,A}\right)$$

Problema 7.22 *La pieza curva de la figura 1 es una semicircunferencia de sección constante. En el punto A se aplica una carga F horizontal. Se desea obtener el desplazamiento horizontal, el desplazamiento vertical y el giro de dicho punto A.*
Se despreciará la deformación por axil y cortante.

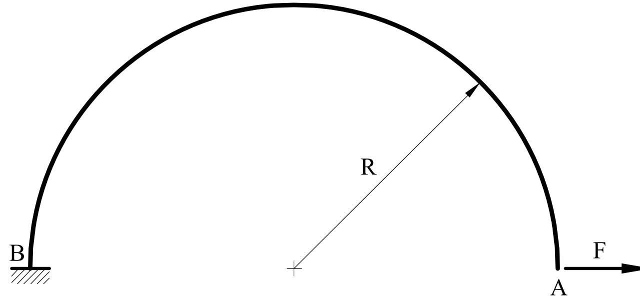


Fig. 1 Arco correspondiente al problema 7.22

Solución

Para hallar el movimiento horizontal de *A* se aplica el teorema de Castigliano. Las leyes de momentos valen (figura 2).

$$M_f = FR\sin\theta$$

y su derivada respecto a *F*

$$\frac{\partial M_f}{\partial F} = R\sin\theta$$

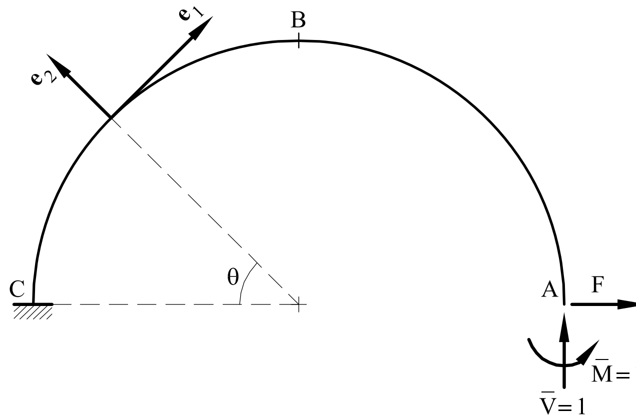


Fig. 2 Fuerzas virtuales y ejes locales

Aplicando el teorema de Castigliano.

$$u_A = \int_0^{\pi} M_f \frac{\partial M_f}{\partial F}\frac{R\,d\theta}{EI} = \int_0^{\pi} FR^3 \sin^2\theta \frac{d\theta}{EI} = \frac{\pi}{2}\frac{FR^3}{EI}$$

Para hallar el movimiento vertical de *A* se coloca una fuerza virtual $\overline{V} = 1$ que produce una ley de momentos:

$$m_f = \overline{V} R (1+\cos\theta) = R(1+\cos\theta)$$

Con lo cual

$$\upsilon_A = \int_0^\pi M_f \, m_f \, \frac{R\,d\theta}{E\,I} = \int_0^\pi F R^3 \sin\theta \, (1+\cos\theta) \, \frac{d\theta}{E\,I} = \frac{2FR^3}{E\,I}$$

Análogamente para el giro, se coloca un momento $\overline{M} = 1$ en el punto *A*. La ley de momentos vale

$$m_f = 1$$

Con lo que el giro en *A* vale

$$\varphi_A = \int_0^\pi M_f \, m_f \, \frac{R\,d\theta}{E\,I} = \int_0^\pi F R^2 \sin\theta \, \frac{d\theta}{E\,I} = \frac{2FR^2}{E\,I}$$

Problema 7.23 *La ménsula curva de la figura 1 está sometida a una presión uniforme de valor p. Si se tiene en cuenta únicamente la deformación debida al momento flector, se desea obtener el giro y el movimiento horizontal del punto A.*

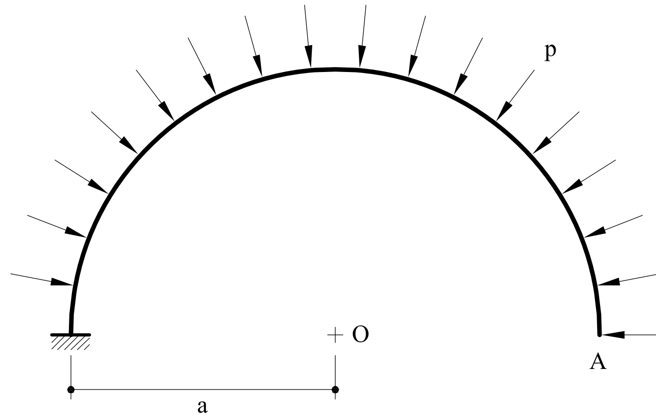


Fig. 1 Ménsula semicircular correspondiente al problema resuelto 7.23

Solución

La ley de momentos flectores se escribe (figura 2).

$$M_f = -a^2 p \left(1+\cos\theta\right)$$

El momento flector debido a un momento $\overline{M}=1$ aplicado en *A* será constante y de valor 1. Por lo tanto, aplicando el teorema de la fuerza unidad, el giro en *A* valdrá

$$\varphi_A = \int \frac{M_f\, m_f}{E\,I}\,ds = -\int_0^{\pi} \frac{a^2 p\left(1+\cos\theta\right)}{E\,I}\,a\,d\theta = -\frac{\pi\, a^3 p}{E\,I}$$

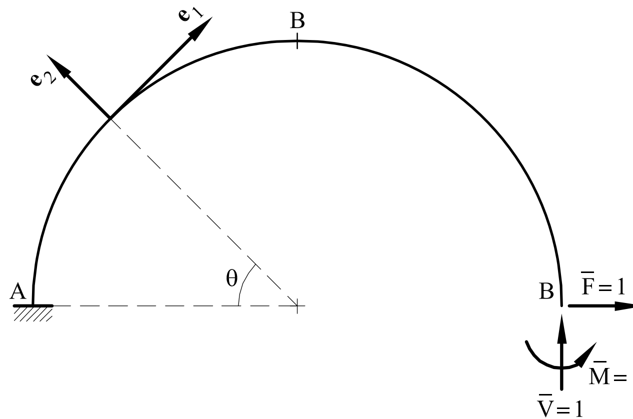


Fig. 2 Coordenada angular y momento y fuerza unidad

Para obtener el desplazamiento horizontal se aplica una fuerza unidad en *B* (figura 2). La correspondiente ley de momentos flectores vale:

$$m_f = a\sin\theta$$

Por lo tanto, aplicando el teorema de la fuerza unidad, el desplazamiento horizontal de *A* valdrá

$$u_A = \int \frac{M_f\, m_f}{E\,I}\, ds = -\int_0^{\pi} \frac{a^2 p\left(1+\cos\theta\right) a \sin\theta}{E\,I}\, a\, d\theta = -\frac{2a^4 p}{E\,I}$$

Análogamente, se obtiene que el movimento vertical y giro valen

$$\upsilon_A = -4{,}71\, \frac{p\, a^4}{E\,I}$$

$$\varphi_A = -3{,}14\, \frac{p\, a^3}{E\,I}$$

Problema 7.24 *Determinar los desplazamientos vertical y horizontal, así como el giro de la sección C del arco representado en la figura 1.*

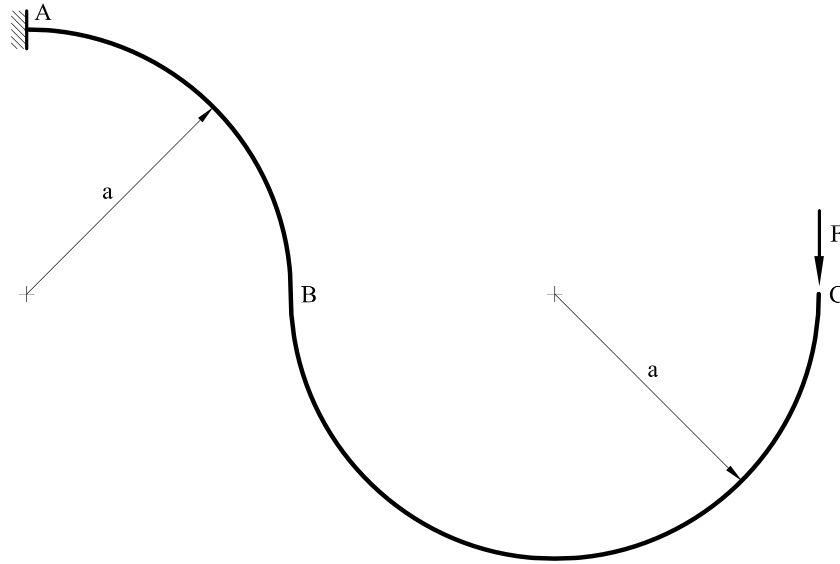


Fig. 1 Arco correspondiente al problema 7.24

Solución

De acuerdo con el criterio de ejes de la figura 2 las leyes de momentos debidas a *F* se escriben:

$$M_f\Big|_B^C = -F\,a\left(1+\cos\theta\right)$$

$$M_f\Big|_B^A = -F\,a\left(3-\sin\theta\right)$$

y sus derivadas respecto a *F*

$$\frac{\partial M_f\Big|_B^C}{\partial F} = -a\left(1+\cos\theta\right)$$

$$\frac{\partial M_f\Big|_B^A}{\partial F} = -a\left(3-\sin\theta\right)$$

De acuerdo con el teorema de Castigliano, el movimiento vertical vale

$$\upsilon_C = \int_{ABC} M_f\,\frac{\partial M_f}{\partial F}\,\frac{R\,d\theta}{E\,I} = \int_0^{\pi} F\,a^3\left(1+\cos\theta\right)^2\frac{d\theta}{E\,I} + \int_0^{\pi/2} F\,a^3\left(3-\sin\theta\right)^2\frac{d\theta}{E\,I} = 13{,}64\frac{F\,a^3}{E\,I}$$

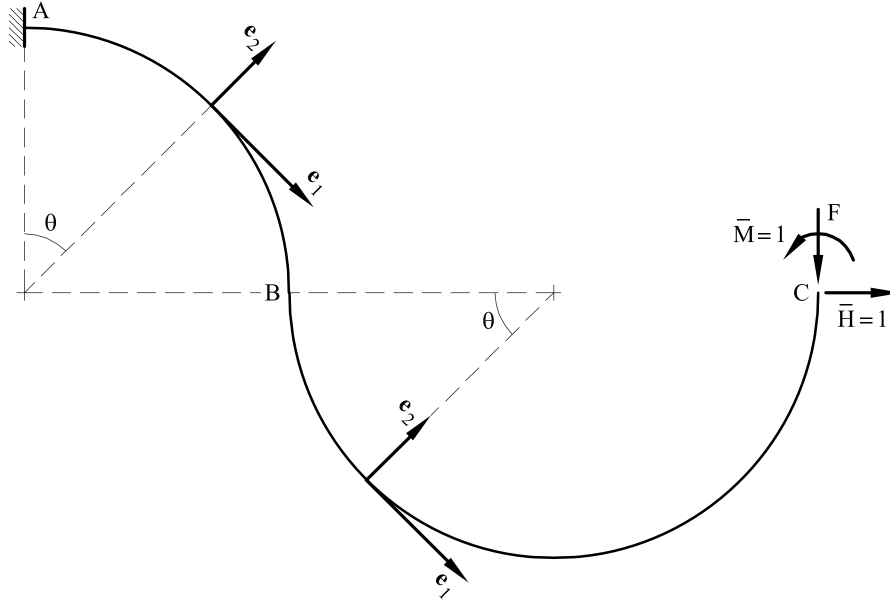


Fig. 2 Sistema de ejes y fuerzas virtuales

Para hallar el movimiento horizontal se coloca una fuerza horizontal $\overline{H}=1$ en *C* (figura 2). Las leyes de momentos flectores debidas a $\overline{H}$ valen

$$m_f\Big|_C^B = -\overline{H}\,a\sin\theta = -a\sin\theta$$

$$m_f\Big|_B^A = \overline{H}\,a\cos\theta = a\cos\theta$$

Por lo tanto, si se aplica el teorema de la fuerza unidad, el movimiento horizontal vale

$$u_C = \int_{ABC} M_f\, m_f\, \frac{R\,d\theta}{E\,I} = \int_0^{\pi} F\,a^3\,(1+\cos\theta)\sin\theta\,\frac{d\theta}{E\,I} - \int_0^{\pi/2} F\,a^3\,(3-\sin\theta)\cos\theta\,\frac{d\theta}{E\,I} =$$

$$= -0{,}5\,\frac{F\,a^3}{E\,I}$$

Procediendo de igual forma para el giro en *C* (se coloca un momento unidad $\overline{M}=1$ en *C*, que produce una ley de momentos flectores constantes en toda la pieza), el giro en *C* vale

$$\varphi_C = -6{,}85\,\frac{F\,a^2}{E\,I}$$

Problema 7.25 *La ménsula circular de la figura 1 de radio* $R = 2\,m.$*, está sometida a unas variaciones térmicas variables. Hallar los movimientos del punto A, teniendo en cuenta que desde A hasta B es* $\Delta t_2 = 120^o C$ *y* $\Delta t_1 = 80^o C$ *y desde B hasta C es* $\Delta t_2 = 60^o C$ *y* $\Delta t_1 = 100^o C$*; siendo* $\alpha = 2\times 10^{-4}\,{}^oC^{-1}$ *y el canto de la viga* $c = 0{,}60$ *m.*

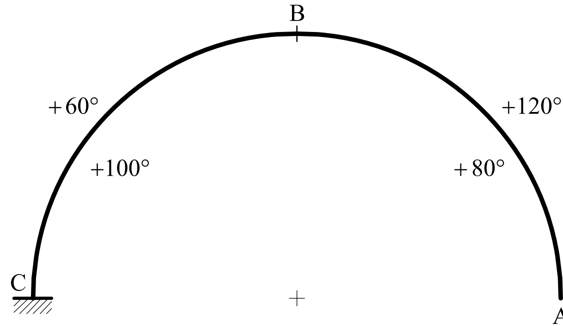


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 7.25

Solución

Se resolverá el problema utilizando el teorema de los trabajos virtuales complementarios. Con el sistema de ejes indicados en la figura 2 las deformaciones térmicas valen:

$$\chi^{nt}\Big|_B^C = -\frac{\alpha}{c}\left(\Delta t_1 - \Delta t_2\right) = -\frac{2\times 10^{-4}}{0{,}6}\left(60-100\right) = 133{,}33\times 10^{-4}\ m^{-1}$$

$$\chi^{nt}\Big|_A^B = -\frac{\alpha}{c}\left(\Delta t_1 - \Delta t_2\right) = -\frac{2\times 10^{-4}}{0{,}6}\left(120-40\right) = -133{,}33\times 10^{-4}\ m^{-1}$$

$$\in^{nt}\Big|_B^C = \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2}{2}\,\alpha = \frac{60+100}{2}\times 2\times 10^{-4} = 160\times 10^{-4}$$

$$\in^{nt}\Big|_A^B = \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2}{2}\,\alpha = \frac{120+80}{2}\times 2\times 10^{-4} = 200\times 10^{-4}$$

$$\gamma^{nt} = 0$$

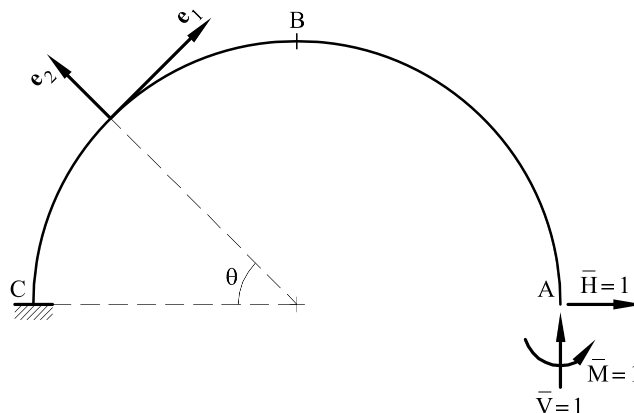


Fig. 2 Fuerzas virtuales y sistema de ejes

Para hallar el movimiento horizontal del punto A se aplica una fuerza virtual $\overline{H}=1$ en A (figura 2). Si $\overline{M}_f$ y $\overline{N}$ son, respectivamente, la ley de momentos flectores y esfuerzos axiles en la pieza motivados por $\overline{H}=1$, de acuerdo con el teorema de los trabajos virtuales complementarios se tendrá

$$u_A \cdot \overline{H} = \int_{ABC} \chi^{nt}\, \overline{M}_f\, ds + \int_{ABC} \in^{nt}\, \overline{N}\, ds$$

y como

$$\overline{M}_f = \overline{H} R \sin\theta = 2\sin\theta$$

$$\overline{N} = \overline{H}\sin\theta = \sin\theta$$

sustituyendo:

$$u_A = \int_0^{\pi/2} \left(133{,}33\times 10^{-4}\right)\times 2\sin\theta \times 2\, d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} (-133{,}33\times 10^{-4})\times 2\sin\theta\times 2\, d\theta +$$
$$+\int_0^{\pi/2} 160\times 10^{-4}\times\sin\theta\times 2\, d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} 200\times 10^{-4}\times \sin\theta\times 2\, d\theta = 720\times 10^{-4}\, metros = 72\ mm$$

Análogamente, colocando una fuerza vertical $\overline{V}=1$ y un momento $\overline{M}=1$ se deduce que el movimiento vertical y el giro de A valen

$$v_A = -987\times 10^{-4}\, metros = -98{,}7\ mm$$

$$\theta_A = 0$$

Problema 7.26 *Determinar el movimiento horizontal del apoyo móvil y el desplazamiento vertical de la sección C.*

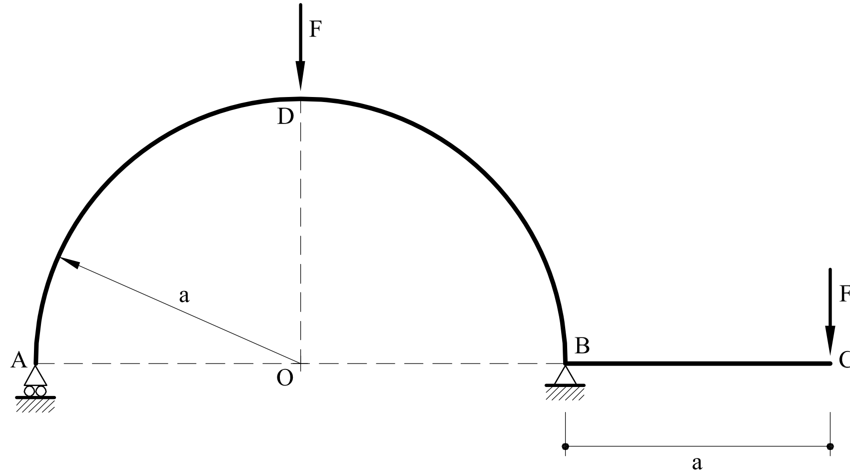


Fig. 1 estructura correspondiente al problema 7.26

Solución

De acuerdo con el criterio de ejes adoptado en la figura 2 las leyes de momentos flectores se escriben

$$M_f\Big|_C^B = -F\left(a - x_1\right)$$

$$M_f\Big|_B^D = F\ a\cos\theta$$

$$M_f\Big|_A^D = 0$$

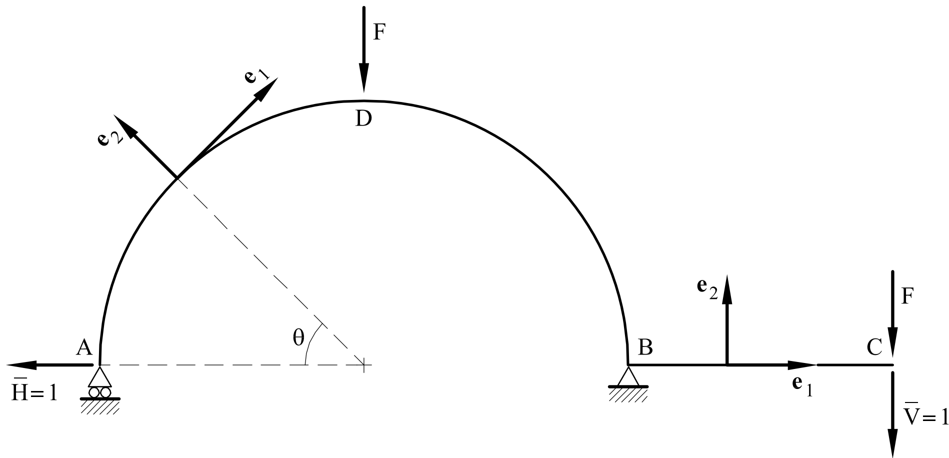


Fig. 2 Sistema de ejes y fuerzas virtuales

Para hallar el movimiento horizontal de *A* se introduce una fuerza $\overline{H} = 1$ (figura 2) que produce unos momentos flectores de valor

$$m_f\Big|_A^D = \overline{H}\,a\sin\theta = a\sin\theta$$

$$m_f\Big|_D^B = \overline{H}\, a \sin\theta = a \sin\theta$$

$$m_f\Big|_B^C = 0$$

De acuerdo con el teorema de la fuerza unidad el movimiento horizontal de *A* vale

$$u_A = \int_{ADBC} M_f\, m_f\, \frac{R\, d\theta}{E\,I} = \int_{\pi/2}^{\pi} F\, a^3 \cos\theta \sin\theta \frac{d\theta}{E\,I} = -0{,}5\, \frac{F\, a^3}{E\,I}$$

Análogamente, para hallar el movimiento vertical de *C* se introduce una fuerza virtual $\overline{V} = 1$ en *C*. Las leyes de momentos debidas a esta fuerza virtual valen

$$m_f\Big|_A^D = -\frac{\overline{V}}{2} a\left(1 - \cos\theta\right) = -\frac{a}{2}\left(1 - \cos\theta\right)$$

$$m_f\Big|_D^B = -\frac{\overline{V}}{2} a\left(1 - \cos\theta\right) = -\frac{a}{2}\left(1 - \cos\theta\right)$$

$$m_f\Big|_B^C = -\overline{V}\left(a - x_1\right) = -\left(a - x_1\right)$$

El movimiento vertical de *C* vale

$$\upsilon_C = \int_{ADBC} M_f\, m_f\, \frac{dx_1}{E\,I} = \int_{\pi/2}^{\pi} F\, a \cos\theta \left[-\frac{a}{2}\left(1 - \cos\theta\right)\right] \frac{a\, d\theta}{E\,I} + \int_0^a F\left(a - x_1\right)^2 \frac{dx_1}{E\,I} =$$

$$= 1{,}226\, \frac{F\, a^3}{E\,I}$$

Problema 7.27 *Determinar los desplazamientos vertical y horizontal, así como el giro de la sección C en la estructura de la figura.*

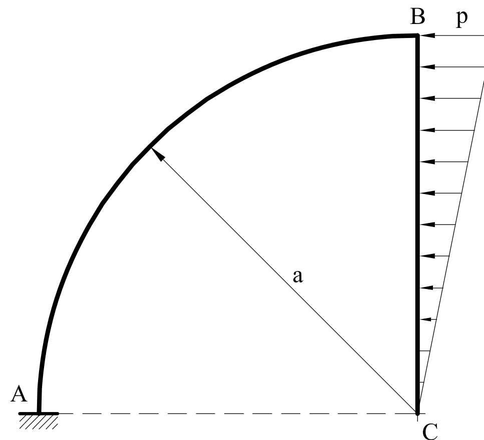


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 7.27

Solución

Debido a las cargas externas, y de acuerdo con el sistema de ejes de la figura 2 las leyes de momentos valen:

$$M_f\Big|_B^C = -p\frac{(a-x_1)^3}{6a}$$

$$M_f\Big|_A^B = p\,a^2\left(\frac{1}{3}-\frac{\sin\theta}{2}\right)$$

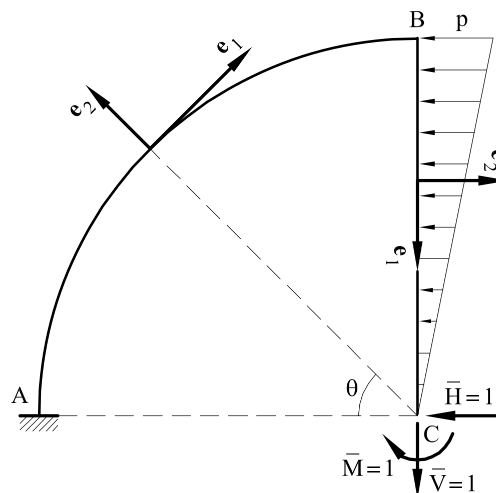


Fig. 2 Fuerzas virtuales y ejes locales

Para determinar el movimiento horizontal de *C* se coloca una fuerza virtual unitaria en *C* de valor $\overline{H}=1$. Dicha fuerza produce unas leyes de momentos de valor

$$m_f\Big|_B^C = -\overline{H}\,(a - x_1) = -(a - x_1)$$

$$m_f\Big|_A^B = -\overline{H}\,a\sin\theta = -a\sin\theta$$

De acuerdo con el teorema de la fuerza unidad, el movimiento horizontal de *C* vale

$$u_C = \int_{ABC} M_f\, m_f\, \frac{dx_1}{E\,I} = \int_0^a p\,\frac{(a-x_1)^3}{6a}\,(a-x_1)\,\frac{dx_1}{E\,I} - \int_0^{\pi/2} p\,a^2\left(\frac{1}{3} - \frac{\sin\theta}{2}\right) a\sin\theta\;\frac{a\,d\theta}{E\,I} =$$
$$= 0{,}0927\,\frac{p\,a^4}{E\,I}$$

De la misma forma, para hallar el movimiento vertical y el giro se introducen en *C*, respectivamente, una fuerza virtual $\overline{V} = 1$ y un momento virtual $\overline{M} = 1$. Aplicando el teorema de la fuerza unidad se obtiene

$$\upsilon_C = 0{,}08333\,\frac{p\,a^4}{E\,I}$$

$$\varphi_C = 0{,}0181\,\frac{p\,a^3}{E\,I}$$

Problema 7.28 *Determinar las variaciones de las distancias entre los puntos C y C' y entre los puntos A y B.*

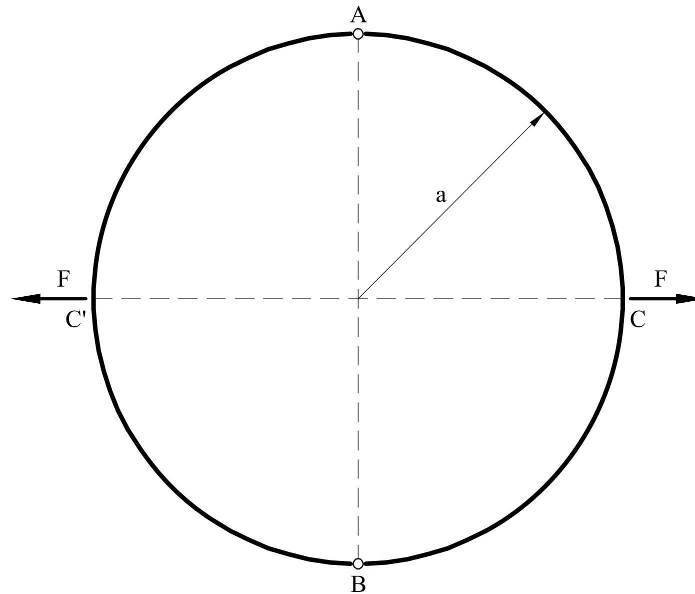


Fig. 1. Estructura correspondiente al problema 7.28

Solución

a) Variación de distancia entre *C* y *C'*.
De acuerdo con el criterio de ejes de la figura 2 el momento flector de *A* a *C* vale

$$M_f = -\frac{F}{2}a\ (1-\cos\theta)$$

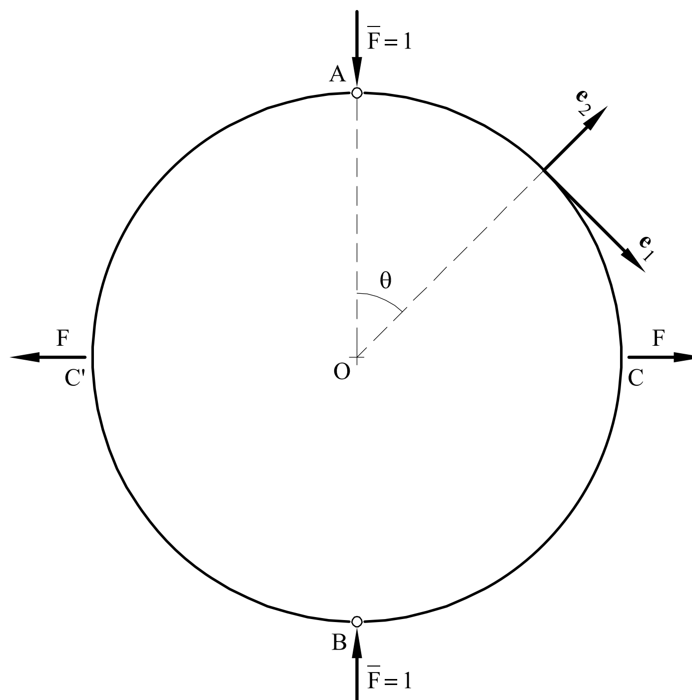


Fig. 2 Sistema de ejes locales y fuerzas unidad en A y B

La energía elástica del conjunto valdrá

$$W = 4\times\frac{1}{2}\int_A^C M_f^2\,\frac{dx_1}{E\,I}$$

y por lo tanto la variación de la distancia *CC'* vale

$$\Delta_1 = \frac{\partial W}{\partial F} = 4\int_A^C M_f\,\frac{\partial M_f}{\partial F}\,\frac{a\,d\theta}{E\,I} = 4\int_0^{\pi/2}\frac{F}{4}a^3\left(1-\cos\theta\right)^2\frac{d\theta}{E\,I} = 0{,}3562\,\frac{F\,a^3}{E\,I}$$

b) Variación de la distancia entre *A* y *B*.

Se aplicará el teorema de la fuerza unidad. Para ello, se colocan dos fuerzas $\overline{F}=1$ en *A* y *B*. La ley de momentos flectores entre *A* y *C* debido a estas fuerzas vale

$$m_f = -\frac{\overline{F}}{2}a\,sin\theta = \frac{a}{2}sin\theta$$

Por tanto, el acercamiento entre *A* y *B* valdrá

$$\Delta_2 = 4\int_A^C M_f\,m_f\,\frac{dx_1}{E\,I} = 4\int_0^{\pi/2}\frac{F}{2}a\left(1-\cos\theta\right)\frac{a}{2}\sin\theta\,\frac{a\,d\theta}{E\,I} = 0{,}5\,\frac{F\,a^3}{E\,I}$$

Problema 7.29 *Determinar el giro relativo entre ambos labios de la rótula A.*

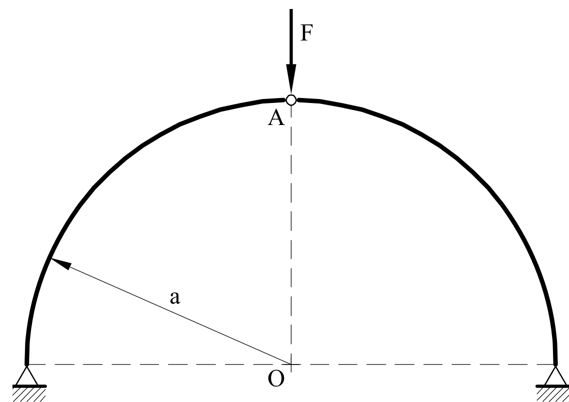


Fig. 1 Círculo correspondiente al problema 7.29

Solución

Se aplicará el teorema de Castigliano. Se colocan un par de momentos $M = 0$ en ambos labios de la rótula *A* (ver figura 2) la ley de momentos flectores vale:

$$M_f\Big|_A^C = \frac{F\,R}{2}\left(1-\sin\theta-\cos\theta\right)-M\cos\theta$$

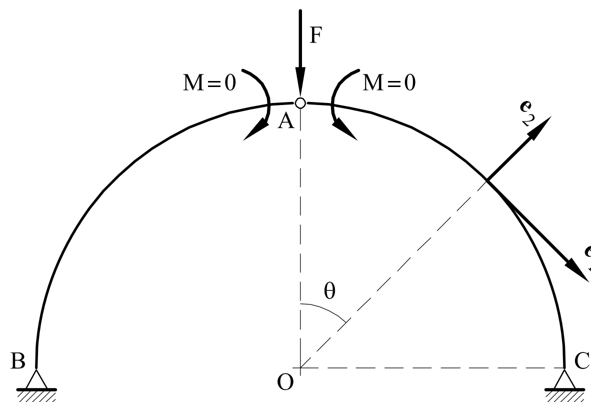


Fig. 2 Momentos $M = 0$ *y sistema de ejes*

La derivada respecto a *M* de la ley de momentos vale

$$\frac{\partial M_f\Big|_A^C}{\partial M} = -\cos\theta$$

De acuerdo con el teorema de Castigliano el giro relativo entre ambos labios de *A* vale

$$\left[\varphi_A\right] = 2\int_A^C \left[M_f\Big|_A^C\right]_{M=0} \times \frac{\partial M_f\Big|_A^C}{\partial M}\frac{R\,d\theta}{E\,I} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{F\,a^2}{2}\left(1 - sin\,\theta - cos\,\theta\right)\left(-\,cos\,\theta\right)\frac{d\theta}{E\,I} =$$

$$= 0{,}2854\,\frac{F\,a^2}{E\,I}$$

Puede comprobarse, asimismo, que el movimiento vertical del punto *A* vale $0{,}071\,F\,a^3\big/E\,I$

Capítulo 8:
Estructuras articuladas

No hay problemas correspondientes a este capítulo

Capítulo 9:
Vigas simples

Problema 9.1 *Utilizando la ecuación de la elástica, hallar las reacciones y dibujar las leyes de momentos acotándoles debidamente de la viga empotrada apoyada, de la figura 1.*

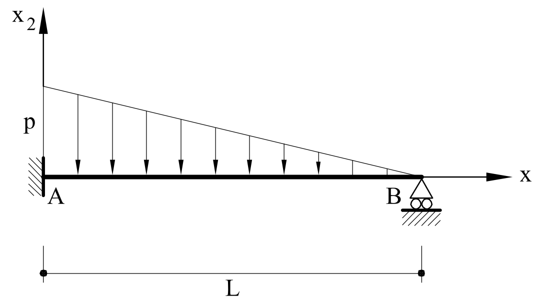


Fig.1 Viga correspondiente al problema 9.1

Solución

La expresión de la carga repartida, en función de x_1, viene dada por

$$p_2(x_1) = -p\left(1 - \frac{x_1}{L}\right)$$

Integrando la ecuación general de la elástica se obtiene

$$EI\,v_2 = -p\left(\frac{x_1^4}{24} - \frac{x_1^5}{120L}\right) + C_1\frac{x_1^3}{6} + C_2\frac{x_1^2}{2} + C_3\,x_1 + C_4$$

Las condiciones de contorno a imponer son:

-Para $x_1 = 0 \quad \Rightarrow v_2(x_1) = 0$

-Para $x_1 = 0 \quad \Rightarrow dv_2/dx_1 = 0$

-Para $x_1 = L \quad \Rightarrow v_2(x_1) = 0$

-Para $x_1 = L \quad \Rightarrow d^2v_2/dx_1^2 = 0$

con lo cual para las constantes de integración se tienen los valores: $C_1 = 2pL/5$; $C_2 = -pL^2/15$; $C_3 = C_4 = 0$.

La ecuación de la elástica queda:

$$E\,I\,v_2 = \frac{-px_1^4}{24}\left(1 - \frac{x_1}{5L}\right) + \frac{px_1^3L}{15} - \frac{p\,x_1^2L^2}{30}$$

La ley de momentos flectores valdrá

$$M_f(x_1) = EI\frac{d^2v_2}{dx_1^2} = -\frac{px_1^2}{2}\left(1 - \frac{x_1}{3L}\right) + \frac{2p\,x_1L}{5} - \frac{pL^2}{15}$$

En la figura 2 puede verse representada la ley de momentos.

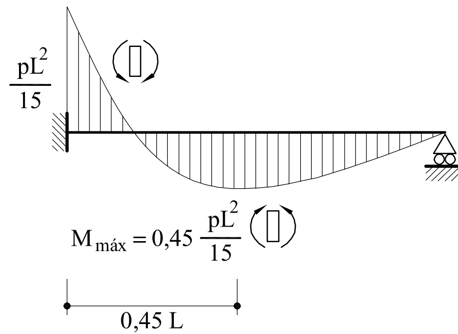


Fig. 2 Ley de momentos flectores

En cuanto a las reacciones verticales en *A* y *B*:

$$R_A = -Q_A = EI\left.\frac{d^3v_2}{dx_1^3}\right|_{x_1=0} = \frac{2}{5}pL$$

$$R_B = Q_B = -EI\left.\frac{d^3v_2}{dx_1^3}\right|_{x_1=L} = \frac{1}{10}pL$$

Problema 9.2 *Utilizando la ecuación de la elástica, determinar la ley de flechas de la viga de la figura 1.*

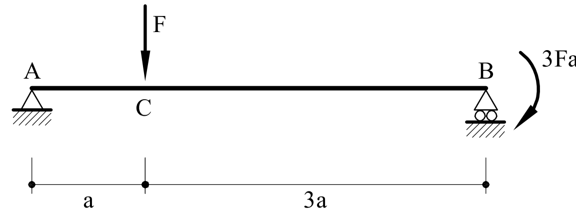


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 9.2

Solución

La ecuación de la elástica se escribirá para este caso

$$\frac{d^4 v_2}{dx_1^4} = -\frac{F}{E\,I}\delta(x_1 - a)$$

Integrando de forma sucesiva:

$$\frac{d^3 v_2}{dx_1^3} = -\frac{F}{E\,I}H(x_1 - a) + C_1$$

$$\frac{d^2 v_2}{dx_1^2} = -\frac{F}{E\,I}(x_1 - a)H(x_1 - a) + C_1 x_1 + C_2$$

$$\frac{d\,v_2}{dx_1} = -\frac{F}{E\,I}\frac{(x_1 - a)^2}{2}H(x_1 - a) + C_1\frac{x_1^2}{2} + C_2 x_1 + C_3$$

$$v_2 = -\frac{F}{E\,I}\frac{(x_1 - a)^3}{6}H(x_1 - a) + C_1\frac{x_1^3}{6} + C_2\frac{x_1^2}{2} + C_3 x_1 + C_4$$

Las condiciones de contorno a imponer serán:

$$v_2(0) = 0$$

$$v_2(4a) = 0$$

$$M_f(0) = E\,I\left.\frac{d^2 v_2}{dx_1^2}\right|_{x_1=0} = 0$$

$$M_f(4a) = E\,I\left.\frac{d^2 v_2}{dx_1^2}\right|_{x_1=4a} = -3Fa$$

con lo cual, las constantes de integración valdrán:

$C_1 = C_2 = 0$; $C_3 = 9Fa^2 / 8EI$; $C_4 = 0$. Por lo tanto, la ley de flechas valdrá

$$v_2 = -\frac{F}{EI}\frac{(x_1 - a)^3}{6} H(x_1 - a) + \frac{9Fa^2}{8EI} x_1$$

Problema 9.3 *Hallar las reacciones y dibujar las leyes de momentos acotándoles debidamente de la viga empotrada apoyada, de la figura 1.*

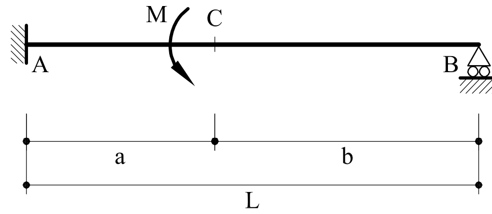


Fig.1 Viga correspondiente al problema 9.3

Solución

La viga es una vez hiperestática. Para calcular las leyes de esfuerzos se libera el apoyo *B* sustituyéndolo por la reacción R_B (figura 2).

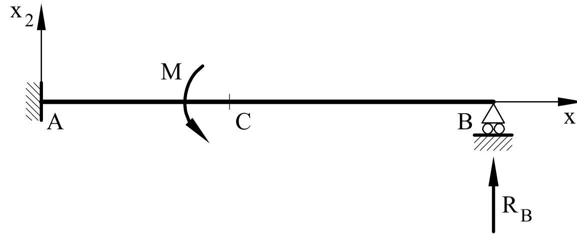


Fig. 2 Reacción en B y ejes locales

Las leyes de momentos se escriben

$$M_f\Big|_B^C = R_B\left(L - x_1\right)$$

$$M_f\Big|_A^C = R_B\left(L - x_1\right) + M$$

De acuerdo con el segundo teorema de Mohr el movimiento vertical de *B* vale

$$v_B = \int_A^B \frac{M_f}{EI}\left(L - x_1\right)\frac{dx_1}{EI} = \int_a^L R_B\left(L - x_1\right)^2 \frac{dx_1}{EI} + \int_0^a \left[R_B\left(L - x_1\right) + M\right]\left(L - x_1\right)\frac{dx_1}{EI} = \frac{RL^3}{3EI} + \frac{MaL}{EI} - M\frac{a^2}{2EI}$$

y como $v_B = 0$, resulta

$$R_B = -3\frac{M}{L}\frac{a}{L}\left(1 - \frac{a}{2L}\right) = -\frac{3}{2}\frac{M}{L^3}\left(L^2 - b^2\right)$$

En la figura 3 puede verse representada la ley de momentos flectores, siendo

$$M_d = \frac{3}{2}\frac{Mb}{L^3}\left(L^2 - b^2\right)$$

$$M_i = M - M_d$$

$$M_e = \frac{M}{2L^2}\left(L^2 - 3b^2\right)$$

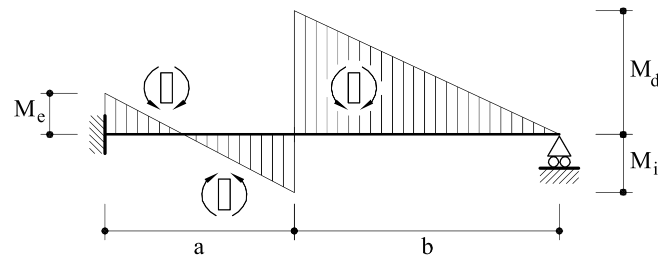


Fig.3 Ley de momentos flectores

Problema 9.4 *Hallar la flecha en el punto C de la pieza de la figura 1. Hallar asimismo el giro en A.*

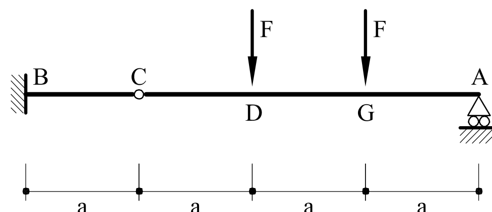


Fig.1 Viga correspondiente al problema 9.4

Solución

La ley de momentos flectores de la pieza *ABC* puede verse representada en la figura 2. Su expresión analítica es

$$M_f\Big|_A^G = F\left(4a - x_1\right)$$

$$M_f\Big|_G^D = F\left(4a - x_1\right) - F\left(3a - x_1\right) = Fa$$

$$M_f\Big|_C^D = Fa - F\left(2a - x_1\right) = -F\left(a - x_1\right)$$

$$M_f\Big|_B^C = -F\left(a - x_1\right)$$

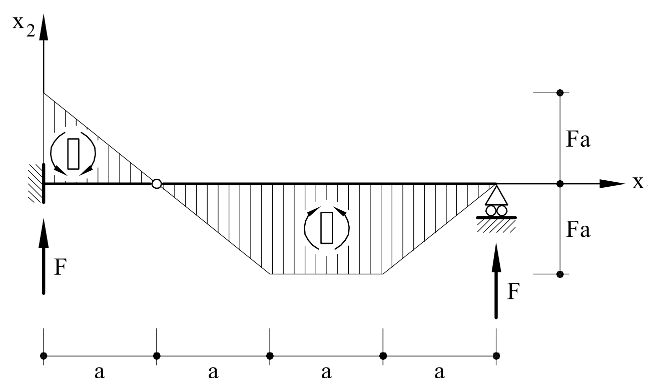


Fig. 2 Ley de momentos flectores y reacciones

El cortante en *C* vale $Q_C = -F$ (figura 3)

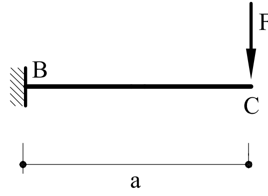


Fig. 3 Cortante en C

La flecha en *C* valdrá

$$v_C = \int_0^a M_f \Big|_B^C (a - x_1) \frac{dx_1}{EI} = -\frac{F a^3}{3EI}$$

Para calcular el giro en *A* se calculará previamente, utilizando el segundo teorema de Mohr, el giro a la derecha de *C*, φ_C^+

$$v_A = v_C + \varphi_C^+ 3a + \int_a^{4a} M_f \left(4a - x_1\right) \frac{dx_1}{EI} = 0$$

y sustituyendo, se obtiene

$$\varphi_C^+ = -\frac{8}{9} \frac{Fa^2}{EI}$$

y de acuerdo con el primer teorema de Mohr

$$\varphi_A = \varphi_C^+ + \int_a^{4a} M_f \frac{dx_1}{EI} = -\frac{8}{9} \frac{Fa^2}{EI} + 2\frac{Fa^2}{EI} = \frac{10}{9} \frac{Fa^2}{EI}$$

Problema 9.5 *Determinar el giro en el punto A de la viga de la figura 1*

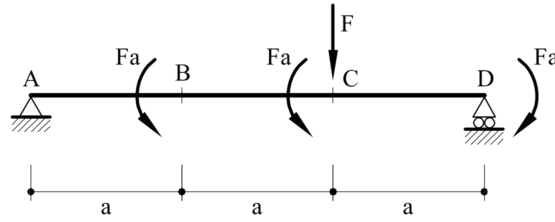


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 9.5

Solución

La ley de momentos flectores vale

$$M_f\Big|_C^D = \frac{F}{3}(3a - x_1) - F\,a = -F\,\frac{x_1}{3}$$

$$M_f\Big|_B^C = -\frac{F\,x_1}{3} + a\,F - F\,(2a - x_1) = F\left(-a + \frac{2}{3}x_1\right)$$

$$M_f\Big|_A^B = \frac{2F}{3}x_1$$

De acuerdo con el segundo teorema de Mohr:

$$v_D = 0 = v_A + \varphi_A \times 3a + \int_0^{3a} M_f\,(3a - x_1)\frac{dx_1}{E\,I}$$

y dado que $v_A = 0$ se obtiene

$$\varphi_A = -\frac{Fa^2}{9E\,I}$$

Problema 9.6 *Hallar la flecha y el giro en el punto C de la estructura de la figura 1*

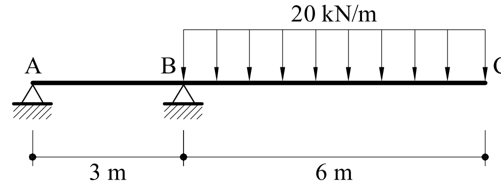


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 9.6

Solución

Para determinar la flecha y el giro en *C* se obtendrá, en primer lugar, el giro en *A* utilizando el segundo teorema de Mohr.
Las leyes de momentos flectores se escriben:

$$M_f\Big|_A^B = 240(3-x_1) - 120\times(6-x_1) = -120\,x_1$$

$$M_f\Big|_B^C = -\frac{20\times(9-x_1)^2}{2} = -10(9-x_1)^2$$

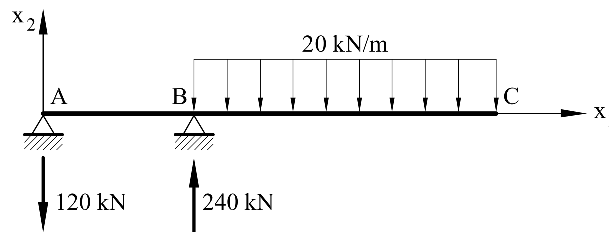


Fig.2 Ejes y reacciones

De acuerdo con el segundo teorema de Mohr

$$v_B = v_A + \varphi_A \times 3 + \int_0^3 M_f\Big|_A^B (3-x_1)\frac{d\,x_1}{E\,I} = 0$$

Sustituyendo y despejando φ_A

$$\varphi_A = \frac{180}{E\,I}$$

Por tanto:

$$v_C = v_A + \varphi_A \times 9 + \int_A^C M_f (9 - x_1) \frac{dx_1}{EI} = \frac{180}{EI} \times 9 + \int_0^3 (-120\, x_1)(9 - x_1) \frac{dx_1}{EI} +$$

$$+ \int_3^9 \left[-10 (9 - x_1)^2 \right] (9 - x_1) \frac{dx_1}{EI} = -\frac{5400}{EI}$$

Para hallar el giro en C:

$$\varphi_C = \varphi_A + \int_A^C M_f \frac{dx_1}{EI} = \frac{180}{EI} + \int_0^3 (-120\, x_1) \frac{dx_1}{EI} + \int_3^9 \left[-10 (9 - x_1)^2 \right] \frac{dx_1}{EI} = -\frac{1080}{EI}$$

Alternativamente puede descomponerse la pieza en dos vigas simples (figura 3)

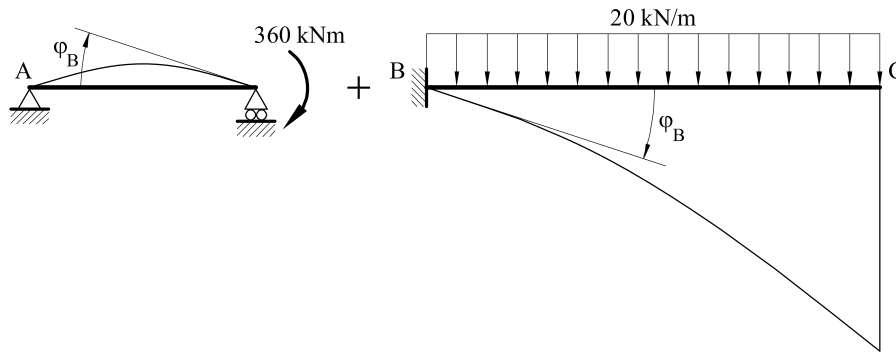


Fig. 3 Descomposición en vigas simples

De la figura 3 se deduce que

$$v_C = \varphi_B \times \overline{BC} + \int_B^C M_f (9 - x_1) \frac{dx_1}{EI}$$

y

$$\varphi_C = \varphi_B + \int_B^C M_f \frac{dx_1}{EI}$$

Utilizando los teoremas de Mohr se obtiene que

$$\varphi_B = -\frac{360 \times 3}{3EI} = -360/EI$$

Por lo que

$$v_C = -\frac{360}{EI} \times 6 + \int_3^9 \left[-10 (9 - x_1)^2 \right] (9 - x_1) \frac{dx_1}{EI} = -\frac{5400}{EI}$$

$$\varphi_C = -\frac{360}{EI} + \int_3^9 \left[-10\left(9 - x_1\right)^2 \right] \frac{dx_1}{EI} = -\frac{1080}{EI}$$

Problema 9.7 *Hallar el valor de la reacción hiperestática y las leyes de esfuerzos en la viga de la figura 1*
Nota: El producto EI *v ale* $EI = 20.000\ kNm^2$

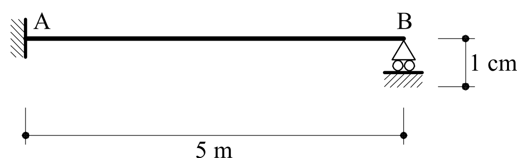


Fig.1 Viga correspondiente al problema 9.7

Solución

Para determinar la reacción en *B*, se libera el apoyo y se sustituye por la reacción R_B
La ley de momentos flectores vale

$$M_f = -R_B\left(5 - x_1\right)$$

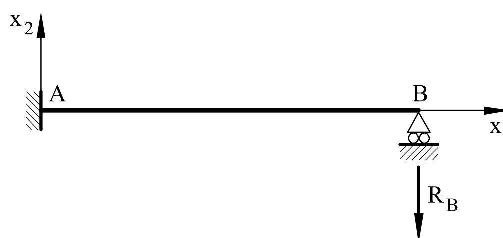


Fig. 2 Reacción en B y ejes locales

El desplazamiento de *B* vale:

$$v_B = \int_0^5 M_f\left(5 - x_1\right)\frac{dx_1}{EI} = -\int_0^5 R_B\left(5 - x_1\right)^2\frac{dx_1}{EI} = -1\ cm$$

De donde se deduce que

$$R_B = 4{,}8\ kN$$

La ley de momentos flectores puede verse representada en la figura 3

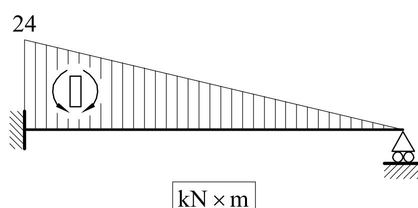


Fig.3 Ley de momentos flectores

Problema 9.8 *Hallar el valor de la reacción hiperestática y las leyes de esfuerzos de la viga de la figura 1* ($EI = 150.000\ kNm^2$)

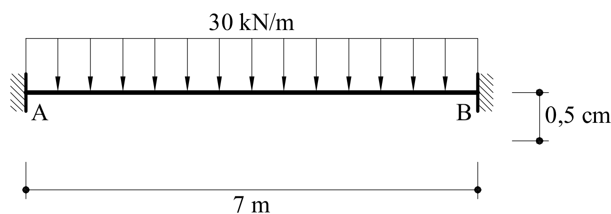


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 9.8

Solución

Se tomarán como incógnitas hiperestáticas los momentos reacción en *A* y *B* (figura 2). Para obtener sus valores es preciso anular el valor de los giros en *A* y *B*.

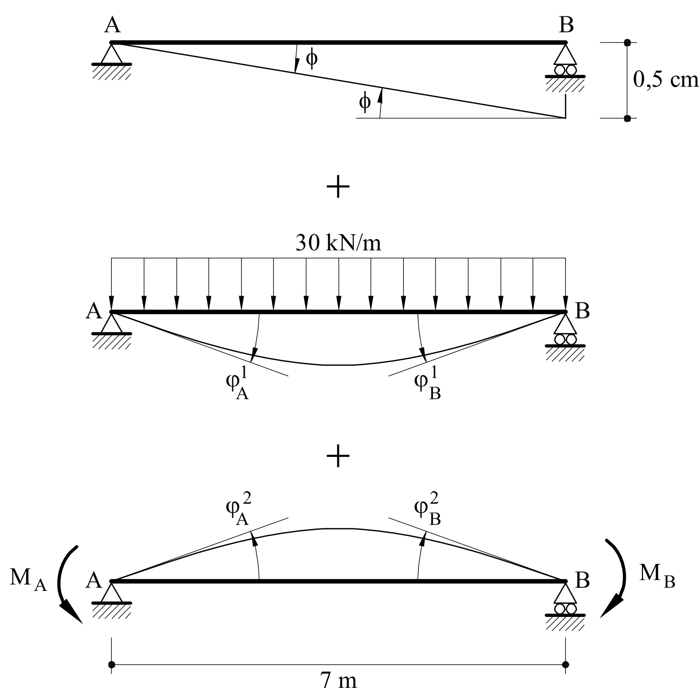


Fig. 2 Giros en la viga isostática base

El giro ϕ vale

$$\phi = -\frac{0,5cm}{7m} = -0,0007143 rdn$$

El resto de los giros puede fácilmente obtenerse utilizando los teoremas de Mohr, de forma que

$$\varphi_A^1 = -\frac{30 \times 7^3}{24 \times 150.000} = -0{,}00286 \ rdn$$

$$\varphi_B^1 = -\varphi_A^1 = 0{,}00286 \ rdn$$

$$\phi_A^2 = \frac{7M_A}{3EI} + \frac{7M_B}{6EI} = 1{,}556 \times 10^{-5} M_A + 0{,}778 \times 10^{-5} M_B$$

$$\varphi_B^2 = -\frac{7M_A}{6EI} - \frac{7M_B}{3EI} = -0{,}778 \times 10^{-5} M_A - 1{,}556 \times 10^{-5} M_B$$

El giro total debe ser nulo tanto en A como en B.

$$\varphi_A = \phi + \varphi_A^1 + \varphi_A^2 = -0{,}0007143 - 0{,}00286 + 1{,}556 \times 10^{-5} M_A + 0{,}778 \times 10^{-5} M_B = 0$$

$$\varphi_B = \phi + \varphi_B^1 + \varphi_B^2 = -0{,}0007143 + 0{,}00286 - 0{,}778 \times 10^{-5} M_A - 1{,}556 \times 10^{-5} M_B = 0$$

De donde se obtiene

$M_A = 214{,}43 \ kNm$ $\qquad$ $M_B = 30{,}68 \ kNm$

En la figura 3 puede verse representada la ley de momentos

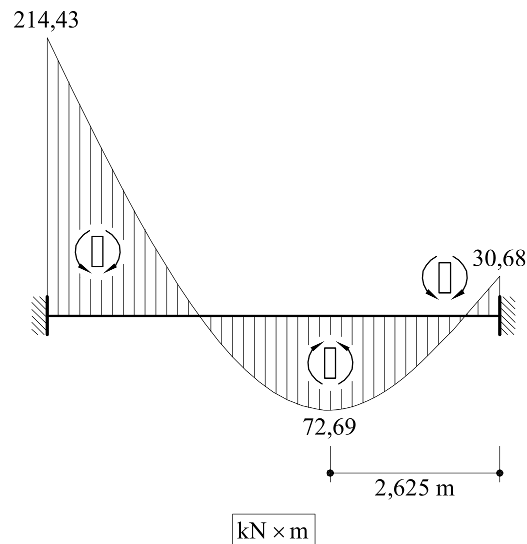


Fig. 3 Ley de momentos flectores

Problema 9.9 *Utilizando el segundo teorema de Mohr, determinar la ley de momentos flectores y la reacción en C en la viga que se acota en la figura 1*

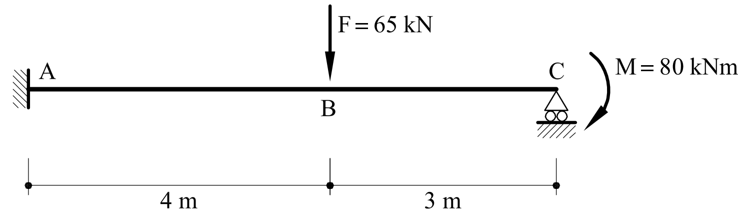


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 9.9

Solución

Se tomará como incógnita hiperestática la reacción en *C*. La ley de momentos flectores se escribe

$$M_f\Big|_A^B = R_C(7-x_1)-80-65(4-x_1)$$

$$M_f\Big|_B^C = R_C(7-x_1)-80$$

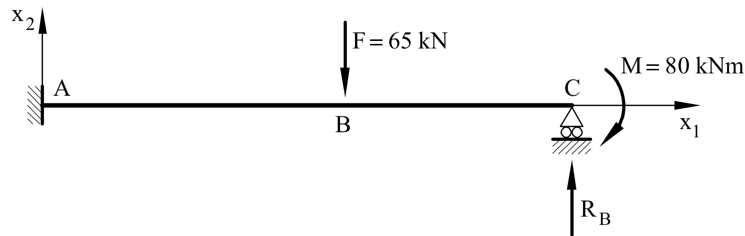


Fig. 2 Isostática base y sistema de ejes

El movimiento vertical en *C* vale

$$v_C = 0 = \int_0^4 M_f\Big|_A^B (7-x_1)\frac{d\,x_1}{E\,I} + \int_4^7 M_f\Big|_B^C (7-x_1)\frac{d\,x_1}{E\,I} = 0$$

De donde:

$$R_C = 42{,}9\ kN$$

En la figura 3 puede verse representada la ley de momentos flectores

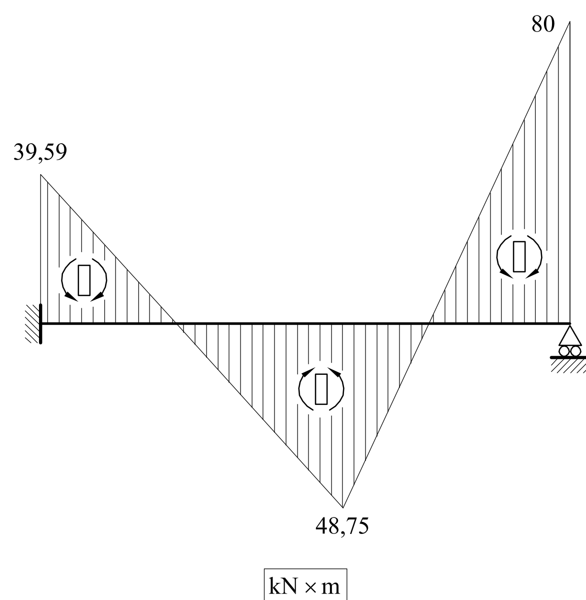


Fig. 3 Ley de momentos flectores

Problema 9.10 *Determinar la flecha en el punto C, así como los giros en ambos lados de la articulación D, en la viga de la figura 1*

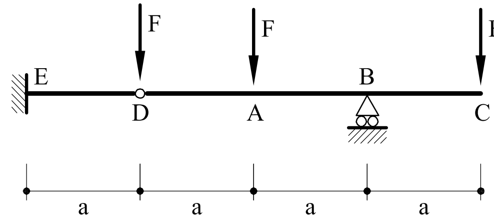


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 9.10

Solución

Se separa la pieza *AC* en las vigas *AD*, *DB* y *BC* (figura 2)

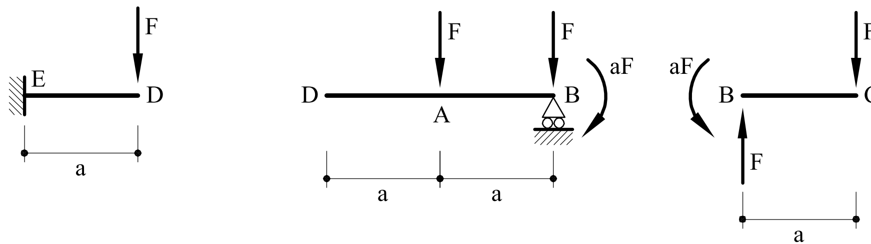


Fig. 2 Descomposición en piezas simples

De acuerdo con el segundo teorema de Mohr, el desplazamiento vertical de *D* de la pieza *ED* vale (positivo si descendente).

$$v_D = \frac{Fa^3}{3EI}$$

y asimismo

$$\varphi_D^{izq} = -\frac{Fa^2}{2EI}$$

Asimismo, para la pieza *DB*:

$$\varphi_D^{der} = \frac{v_D}{2a} + \frac{Fa^2}{12EI} = \frac{Fa^2}{4EI}$$

$$\varphi_B = \frac{v_D}{2a} - \frac{5Fa^2}{12EI} = -\frac{Fa^2}{4EI}$$

y el salto en el giro en *D*:

$$[\varphi_D] = \varphi_D^{izq} - \varphi_D^{der} = -\frac{Fa^2}{2EI} - \frac{Fa^2}{4EI} = -\frac{3}{4}\frac{Fa^2}{EI}$$

Asimismo, para la pieza *BC*:

$$v_C = -\varphi_B \cdot a + \frac{Fa^3}{3EI} = \frac{7}{12}\frac{Fa^3}{EI}$$

Problema 9.11 *Determinar la flecha en el punto A, así como los giros en ambos lados de la articulación D, de la viga de la figura 1*

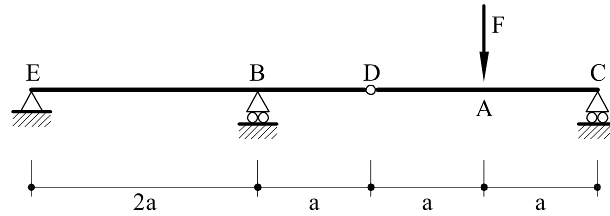


Fig.1 Viga correspondiente al problema 9.11

Solución

Se descompone la estructura en piezas simples (figura 2)

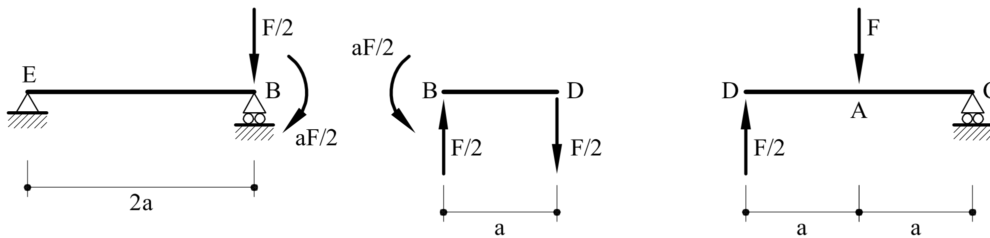


Fig.2 Descomposición en vigas simples

Utilizando los teoremas de Mohr, el giro de *B* de la pieza *EB* vale:

$$\varphi_B = -\frac{Fa^2}{3EI}$$

La flecha de *D* valdrá (positiva si descendente)

$$v_D = -\varphi_B a + \frac{(F/2)a^3}{3EI} = \frac{Fa^3}{2EI}$$

y el giro a la izquierda de *D*

$$\varphi_D^{izq} = \varphi_B - \frac{(F/2)a^2}{2EI} = -\frac{7}{12}\frac{Fa^2}{EI}$$

El giro a la derecha de *D* valdrá

$$\varphi_D^{der} = \frac{v_D}{2a} - \frac{Fa^2}{4EI} = 0$$

con lo que

$$[\varphi_D] = \varphi_D^{izq} - \varphi_D^{der} = -\frac{7}{12}\frac{Fa^2}{EI}$$

La flecha en *A* valdrá (positiva si descendente)

$$v_A = \frac{v_D}{2} + \frac{Fa^3}{6EI} = \frac{5}{12}\frac{Fa^3}{EI}$$

Problema 9.12 *Determinar la flecha en el punto C, así como los giros en ambos lados de la articulación D, de la viga de la figura 1.*

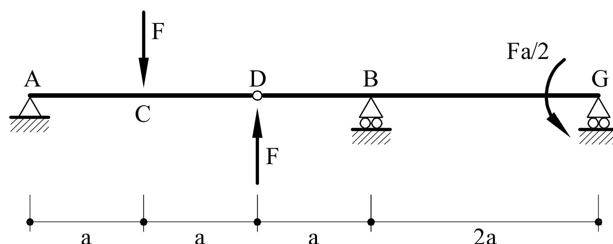


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 9.12

Solución

Se descompone la pieza en vigas simples (figura 2)

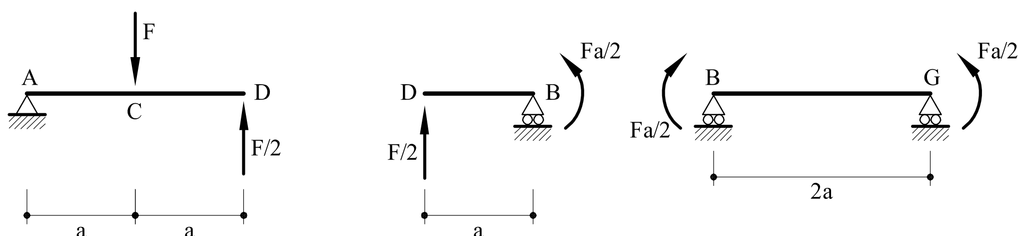


Fig. 2 Descomposición en vigas simples

El giro en B (obtenido de la pieza BG) vale:

$$\varphi_B = -\frac{Fa^2}{2EI}$$

Con lo cual, la flecha en D (positiva si descendente) vale:

$$v_D = \varphi_B a - \frac{(F/2)a^3}{3EI} = -\frac{2}{3}\frac{Fa^3}{EI}$$

El giro a la derecha de D vale:

$$\varphi_D^{der} = \varphi_B - \frac{(F/2)a^2}{2EI} = -\frac{3}{4}\frac{F\,a^2}{EI}$$

El giro a la izquierda de D vale:

$$\varphi_D^{izq} = -\frac{v_D}{2a} + \frac{Fa^2}{4EI} = \frac{7}{12}\frac{Fa^2}{EI}$$

y por tanto

$$\left[\varphi_D\right] = \varphi_D^{izq} - \varphi_D^{der} = \frac{13}{12}\frac{Fa^2}{EI}$$

La flecha en C valdrá (positiva si descendente)

$$v_C = \frac{v_D}{2} + \frac{Fa^3}{6EI} = -\frac{Fa^3}{6EI}$$

Problema 9.13 *Mediante la utilización de los teoremas de Mohr, determinar la flecha en el punto A de la viga que se representa en la figura, sabiendo que el producto* EI *vale* $EI = 10^5 \ kN \times m^2$.

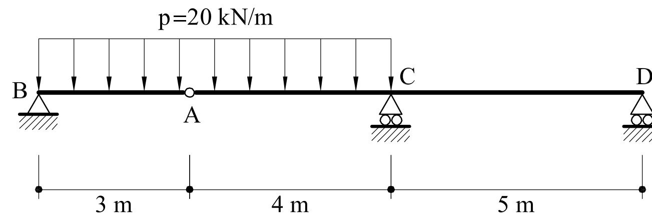


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 9.13

Solución

Para determinar la flecha en *A*, se elimina la pieza *AB*, colocando en *A* la acción que ejerce sobre *ACD* (figura 2).

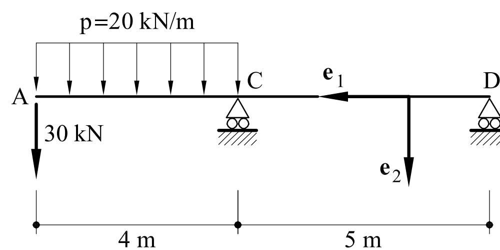


Fig. 2 Pieza ACD y ejes locales

La ley de momentos flectores se escribe

$$M_f\Big|_A^C = (9 - x_1)[30 + 10(9 - x_1)]$$

$$M_f\Big|_C^D = 56x_1$$

De acuerdo con el segundo teorema de Mohr

$$v_C = v_D + \varphi_D \times 5 + \int_0^5 M_f (5 - x_1) \frac{dx_1}{EI} = 0$$

y como $v_D = 0$ se obtiene el giro φ_D

$$\varphi_D = -\frac{233{,}33}{EI}$$

y la flecha en *A* valdrá

$$v_A = v_D + \varphi_D \times 9 + \int_0^5 56\, x_1 (9 - x_1) \frac{dx_1}{E\,I} + \int_5^9 (9 - x_1)^2 \left[30 + 10(9 - x_1)\right] \frac{dx_1}{E\,I} = \frac{3146{,}67}{E\,I}$$

y sustituyendo el producto $E\,I$ por su valor

$$v_A = 0{,}031467\ m = 3{,}1467\, cm$$

Problema 9.14 *Utilizando el teorema de Mohr, determinar el desplazamiento y el giro en los puntos A y B de la pieza de la figura .1.*

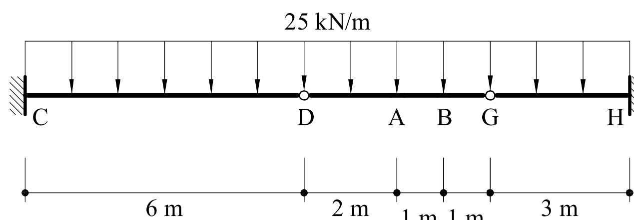


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 9.14

Solución

La viga se puede descomponer en tres piezas simples (figura 2).

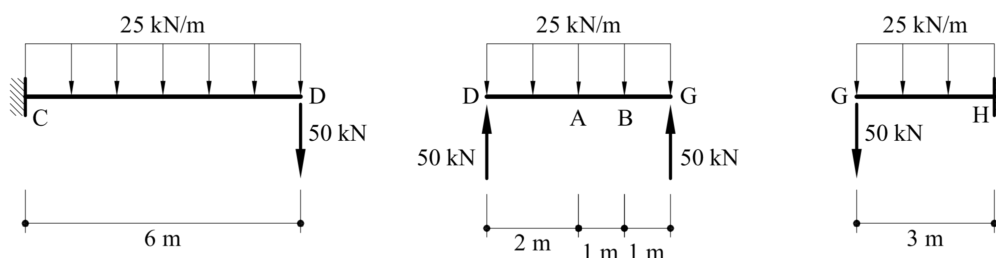


Fig. 2 Descomposición en piezas simples

De acuerdo con el segundo teorema de Mohr los movimientos verticales de *D* y *G* valen (positivos si descendentes):

$$v_D = \frac{25 \times 6^4}{8EI} + \frac{50 \times 6^3}{3EI} = \frac{7650}{EI}$$

$$v_G = \frac{25 \times 3^4}{8EI} + \frac{50 \times 3^3}{3EI} = \frac{703{,}125}{EI}$$

Si se aplica el segundo teorema de Mohr a la pieza *DG*

$$v_G = v_D - \varphi_D \times 4 - \int_0^4 M_f (4 - x_1) \frac{dx_1}{EI} = 0$$

y como se conocen los valores de v_D y v_G , se obtiene

$$\varphi_D = \frac{1670{,}05}{EI}$$

Con lo cual, aplicando nuevamente el segundo teorema de Mohr

$$v_A = v_D - 2\varphi_D - \int_0^2 M_f \left(2 - x_1\right) \frac{dx_1}{E\,I} = \frac{4259{,}9}{E\,I}$$

$$v_B = v_D - 3\varphi_D - \int_0^3 M_f \left(3 - x_1\right) \frac{dx_1}{E\,I} = \frac{2499{,}23}{E\,I}$$

Problema 9.15 *En la viga de la figura 1 determinar las leyes de esfuerzos cuando se somete a un descenso de apoyo de valor δ al punto A.*

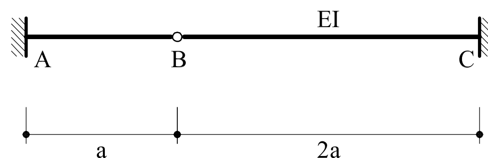


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 9.15

Determinar así mismo las leyes de esfuerzos cuando se someten a las fibras superiores a un incremento de temperatura de valor t y a las fibras inferiores a un decremento del mismo valor.

En el primer caso resolver el problema por dos procedimientos:

1. *Tomando como hiperestática el valor del cortante en B.*
2. *Tomando como hiperestática uno cualquiera de los momentos en los apoyos.*

Solución

I) Descenso de apoyo δ del punto *A*.

1. Si se toma como incógnita hiperestática el cortante en *B* se puede realizar la descomposición que se indica en la figura 2

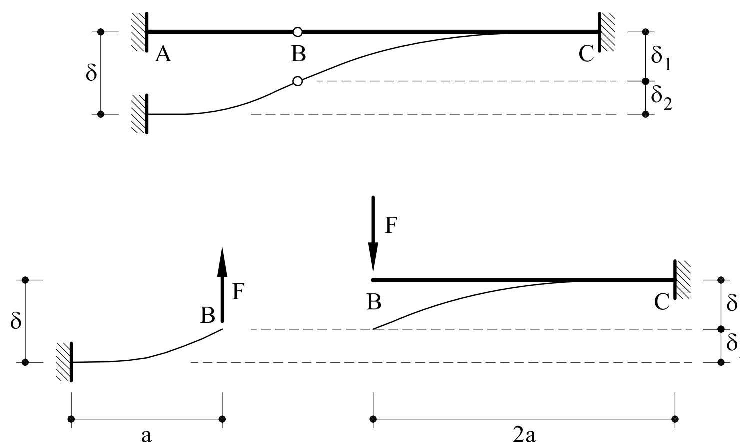


Fig. 2 Deformada y descomposición en piezas simples

A partir de los teoremas de Mohr se obtiene

$$\delta_2 = \frac{Fa^3}{3EI}$$

$$\delta_1 = \frac{F(2a)^3}{3EI}$$

Sumando:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{3Fa^3}{EI}$$

es decir:

$$F = \frac{EI}{3a^3}\delta$$

En la figura 3 pueden verse representadas las leyes de esfuerzos.

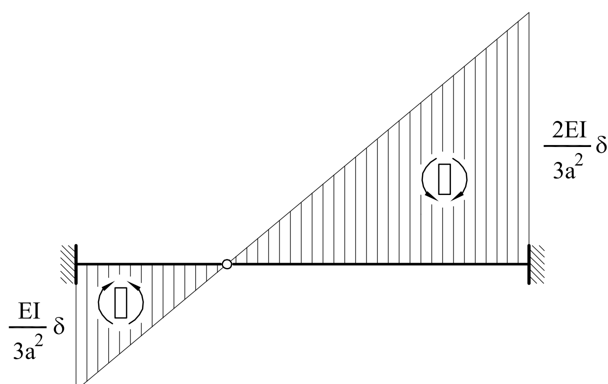


Fig. 3 Leyes de esfuerzos

2. Se toma como incógnita hiperestática el momento en *A*: En la figura 4 puede verse:
   a) Estructura isostática base
   b) Deformada, en la isostática base, debida al descenso de apoyo en *A*.
   c) Deformada, en la isostática base, debida al momento M_A.

El momento M_A se obtendrá de igualar los giros φ_A^b y φ_A^c.
El valor de φ_A^b es inmediato

$$\varphi_A^b = \frac{\delta}{a}$$

Para obtener el giro φ_A^c es preciso obtener previamente el movimiento vertical en *B*. Teniendo presente que el cortante en B vale M_A/a, se obtiene

$$\delta_B = \frac{\left(\frac{M_A}{a}\right)(2a)^3}{3EI} = \frac{8M_A a^2}{3EI}$$

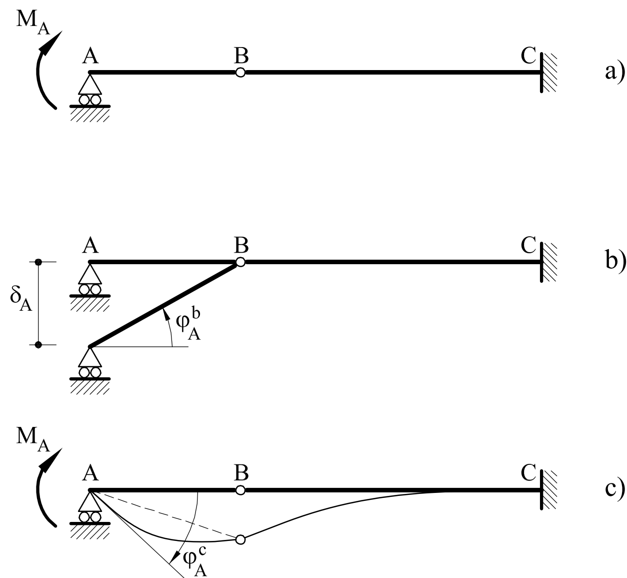


Fig.4 Isostática base y deformadas

con lo cual:

$$\varphi_A^c = \frac{M_A\, a}{3E\, I} + \frac{\delta_B}{a} = \frac{3M_A\, a}{E\, I}$$

Igualando φ_A^c con φ_A^b

$$\frac{\delta}{a} = \frac{3M_A\, a}{E\, I}$$

es decir,

$$M_A = \frac{E\, I}{3a^2}\delta$$

que es el mismo valor que el obtenido anteriormente.

II) Análogamente, para el efecto térmico se obtiene que el cortante en *B* vale

$$F = -\frac{E\, I\, \alpha\, t}{ah}$$

y el momento flector en *A*

$$M_A = -\frac{E\, I\, \alpha\, t}{h}$$

Siendo *h* el canto de la viga.

Problema 9.16 *Dada la viga de la figura 1, en el que las vigas AB y BE son de la misma sección y rigidez, se pide:*

1. *Calcular el desplazamiento vertical de la rótula B y de la sección C, por aplicación del segundo teorema de Mohr.*
2. *Determinar el giro y el desplazamiento vertical de la sección extrema libre E.*
3. *Dibujar a estima la elástica.*

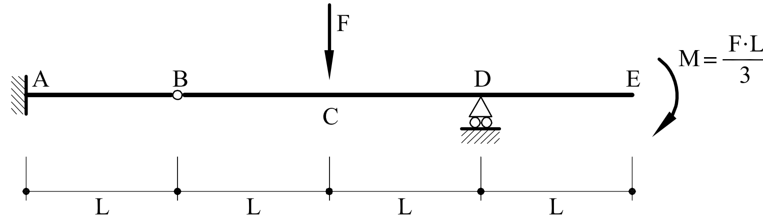


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 9.16

Solución

El esfuerzo cortante en B vale $F/3$, y por lo tanto, la flecha en B valdrá (positiva si descendente):

$$v_B = \frac{(F/3)L^3}{3EI} = \frac{F\,L^3}{9EI}$$

Para determinar la flecha en C se aplica el segundo teorema de Mohr al trozo BD:

$$v_D = 0 = v_B - \varphi_B \times 2\,L - \int_B^D M_f\,(2\,L - x_1)\frac{dx_1}{E\,I}$$

Integrando y despejando φ_B :

$$\varphi_B = -0{,}08333\frac{F\,L^2}{E\,I}$$

$$v_C = v_B - \varphi_B L - \int_B^c M_f\,(L - x_1)\frac{dx_1}{E\,I} = 0{,}13889\frac{F\,L^3}{E\,I}$$

El giro en D valdrá:

$$\varphi_D = \varphi_B + \int_B^D M_f\,\frac{dx_1}{E\,I} = \frac{1}{12}\frac{F\,L^2}{E\,I} = 0{,}08333\frac{F\,L^2}{E\,I}$$

Por lo tanto,

$$\varphi_E = \varphi_D + \int_D^E M_f \frac{dx_1}{EI} = -0{,}25\frac{FL^2}{EI}$$

$$v_E = v_D - \varphi_D L - \int_D^E M_f \left(L - x_1\right)\frac{dx_1}{EI} = \frac{1}{12}\frac{FL^3}{EI} = 0{,}0833\frac{FL^3}{EI}$$

Problema 9.17 *La barra biempotrada de la figura 1, tiene una sección rectangular de* $0{,}20 \times 0{,}50\, m^2$ *con un coeficiente de dilatación térmico de valor* $a = 10^{-4}\,{}^{\text{o}}C^{-1}$ *y una rigidez* $E\,I = 10^4\; kN \times m^2$.

La fibra superior AB está sometida a una ley de incremento de temperaturas, que referida al sistema de ejes $(ox_1\,;ox_2)$ *de la figura viene dado por la expresión:*

$$\Delta t_2 = (x_1 - 4)^2 + 60$$

La fibra inferior CD está sometida a una ley de incrementos de temperaturas, que con el mismo sistema de ejes, viene dado por la expresión:

$$\Delta t_1 = (x_1 - 4)^2 + 10$$

Se pide:

1. *Leyes de esfuerzos.*
2. *Deformada.*

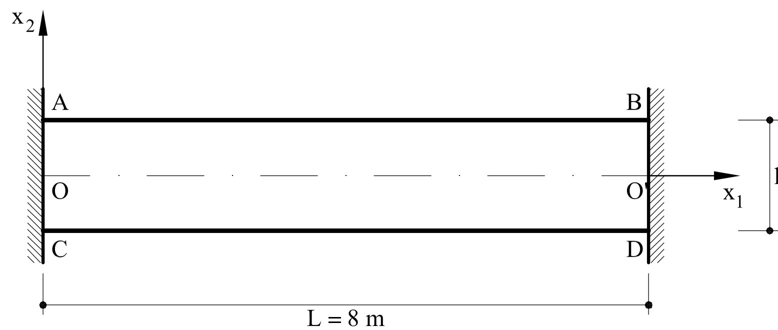


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 9.17

Solución

La distribución de temperaturas puede descomponerse en una distribución uniforme y otra variable con valor nulo en la directriz (figura 2)

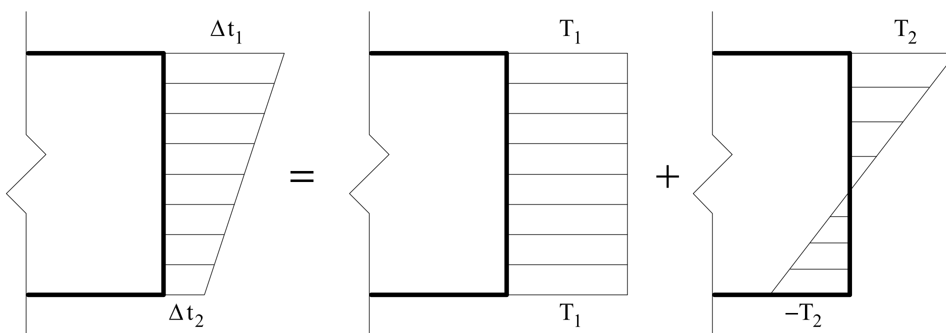


Fig. 2 Descomposición de la variación térmica

$$T_1 = \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2}{2} = (x_1 - 4)^2 + 35$$

$$T_2 = \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{2} = 25$$

Para determinar los esfuerzos, se elimina la coacción en *BD* de forma que la estructura se convierte en isostática. Debido a T_1 el alargamiento de la pieza valdrá

$$\delta = \int_0^8 \alpha\, T_1\, dx_1 = \int_0^8 10^{-4}\left[(x_1 - 4)^2 + 35\right] dx_1 = 0{,}032267\ m.$$

El esfuerzo axil *N* que contrarresta el anterior desplazamiento es tal que

$$\frac{N \cdot 8}{E\,A} = \delta = 0{,}032267$$

y como $E\,A = 480.000\ kN$, resulta

$$N = 1.936\ kN \quad (compresión)$$

Debido a la distribución variable de temperaturas el giro de *BD* vale:

$$\varphi_{BD} = \int_0^8 \left(-\frac{2\,\alpha\, T_2}{h}\right) dx_1 = -\int_0^8 \frac{2 \times 10^{-4} \times 25}{0{,}5}\, dx_1 = 0{,}08$$

El giro producido por un momento en *BD* vale:

$$\varphi_{BD} = \frac{M \times 8}{E\,I}$$

Igualando:

$$M = \frac{0{,}08 \times E\,I}{8} = 100\, kN\, m$$

Problema 9.18 *Dada la viga biapoyada representada en la figura 1, determinar, utilizando los teoremas de Mohr, los giros en A y B.*

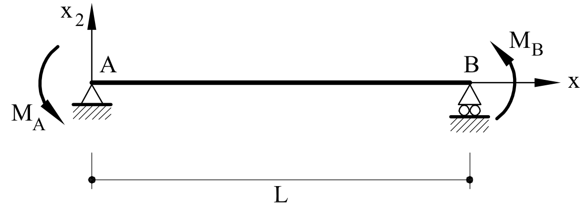


Fig.1 Viga simple correspondiente al problema 9.18

Solución

Tomando los ejes locales que se indican en la misma figura 1 la ley de Momentos flectores se escribe

$$M_f = \frac{M_A + M_B}{L} x_1 - M_A$$

por lo que, de acuerdo con (9.33)

$$\varphi_B = \varphi_A + \int_0^L \frac{M_f}{EI} dx_1 = \varphi_A + \frac{-M_A + M_B}{2} L \qquad \text{(a)}$$

Por otra parte, de acuerdo con (9.37) el movimiento vertical del punto *B* será

$$v_{2B} = \varphi_A L + \int_0^L \frac{M_f}{EI} (L - x_1) dx_1 = \varphi_A L - M_A \frac{L^2}{3} + M_B \frac{L^2}{6} \qquad \text{(b)}$$

Dado que $v_{2B} = 0$, de las expresiones (a) y (b) se obtiene

$$\varphi_A = \frac{2M_A - M_B}{6} L$$

$$\varphi_B = \frac{-M_A + M_B}{6} L$$

Problema 9.19 *Determinar la flecha del punto C de la viga que se representa en la figura 1*

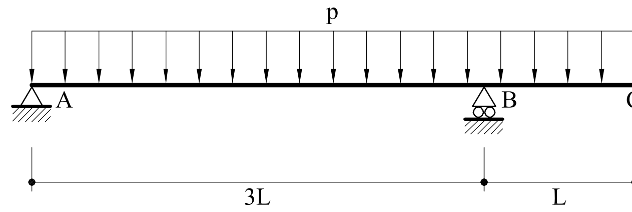


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 9.19

Solución

En la figura 2 se dibuja la deformada "a estima". Como puede verse, el desplazamiento vertical en *C* v_{2c} es igual al giro en *B* por la longitud *L* más (menos en este caso) la flecha que tendría *C* si el punto *B* no girara, es decir

$$v_{2c} = \varphi_B L - v_{2c}^0$$

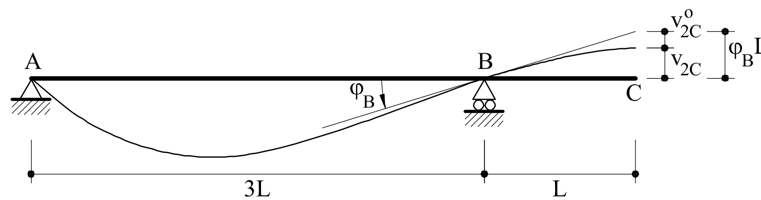


Fig. 2 Deformada "a estima"

El giro en *B*, φ_B, de la viga *AB* será el debido a la carga *p* y al momento del voladizo *BC*, es decir

$$\varphi_B = \frac{p(3L)^3}{24EI} - \frac{(pL^2/2)3L}{3EI} = 0{,}625\frac{pL^3}{EI}$$

La flecha v_{2c}^0 valdrá

$$v_{2c}^0 = \frac{pL^4}{8EI}$$

Por lo tanto, sustituyendo en la expresión de la flecha:

$$v_{2c} = 0{,}625\frac{pL^4}{EI} - \frac{pL^4}{8EI} = 0{,}5\frac{pL^4}{EI}$$

Problema 9.20 *En la viga que se representa en la figura 1 hallar la flecha y el giro en el punto D (punto medio de BC).*

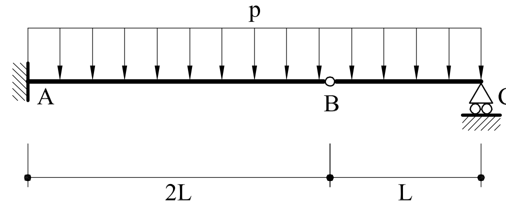


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 9.20

Solución

En la figura 2 puede verse dibujada la deformada "a estima".

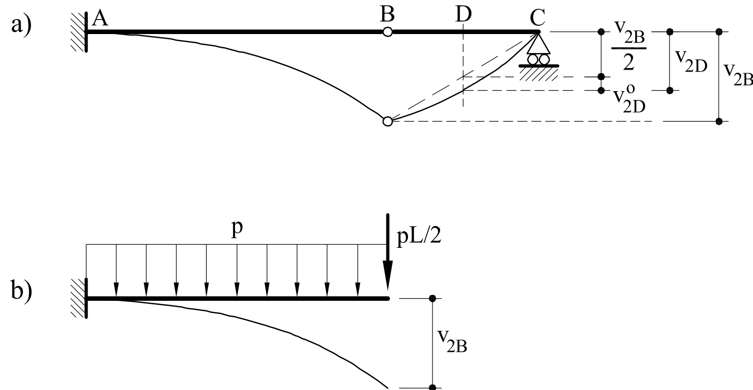


Fig. 2 a) Deformada a estima. b) Cargas y deformada del trazo AB

Como puede observarse en la figura 2, la flecha en *D*, v_{2D} , es igual a la mitad de la flecha en *B* más la flecha v_{2D}^0 que tendría el punto *D* de la pieza *BC* si ésta estuviera biapoyada en *B* y *C*. Es decir,

$$v_{2D} = \frac{v_{2B}}{2} + v_{2D}^0$$

La flecha v_{2B} del punto *B* se obtendrá a partir de la figura 2 b),

$$v_{2B} = \frac{p(2L)^4}{8EI} + \frac{(pL/2)(2L)^3}{3EI} = 3{,}3333\frac{pL^4}{EI}$$

La flecha v_{2D}^0 vale:

$$v_{2D}^0 = \frac{5pL^4}{384EI} = 0{,}01302\frac{pL^4}{EI}$$

Por lo tanto, la flecha en *D* valdrá

$$v_{2D} = \frac{3{,}3333}{2} \frac{pL^4}{E\,I} + 0{,}01302 \frac{pL^4}{E\,I} = 1{,}68 \frac{pL^4}{E\,I}$$

Problema 9.21 *Determinar la flecha en el punto B así como la ley de momentos flectores en la viga que se representa en la figura 1*

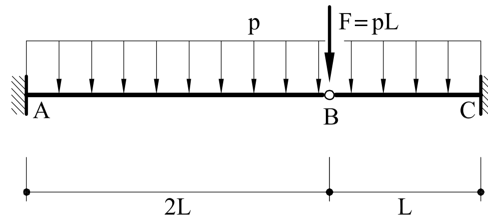


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 9.21

Solución

Se corta la pieza por el punto *B* (ver figura 2). En el punto de corte aparecerán sendas fuerzas F_1 y F_2 tales que $F_1 + F_2 = F = pL$. Por otro lado, el movimiento vertical del punto *B*, considerado perteneciente a *AB*, debe ser igual al movimiento vertical de *B*, considerado perteneciente a *BC*. Es decir

$$\frac{p(2L)^4}{8EI} + F_1 \frac{(2L)^3}{3EI} = \frac{pL^4}{8EI} + F_2 \frac{L^3}{3EI}$$

o sea:

$$F_1 = -0{,}5139\, pL$$
$$F_2 = 1{,}5139\, pL$$

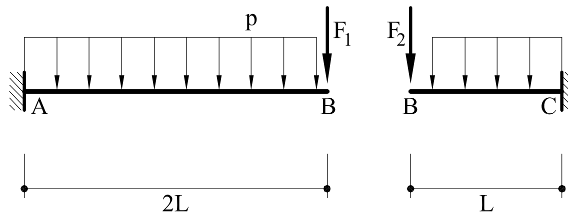


Fig. 2 División de la viga en dos partes

El movimiento vertical de *B* valdrá:

$$v_{2B} = \frac{p(2L)^4}{8EI} + F_1 \frac{(2L)^3}{3EI} = 0{,}6296 \frac{pL^4}{EI}$$

o también

$$v_{2B} = \frac{pL^4}{8EI} + F_2 \frac{L^3}{3EI} = 0{,}6296 \frac{pL^4}{EI}$$

Las reacciones verticales en *A* y *C* valdrán

$V_A = 1{,}4861\, pL$ $\qquad$ $V_C = 2{,}5139\, pL$

y los momentos reacción:

$M_A = 0{,}9722\, pL^2$ $\qquad$ $M_B = -2{,}0139\, pL^2$

y la ley de momentos flectores:

$$M_f\Big|_A^B = -0{,}9722\, p\, L^2 + 1{,}4861\, p\, L\, x_1 - p\frac{x_1^2}{2}$$

$$M_f\Big|_B^C = -1{,}0278\, p\, L^2 + 0{,}4861\, p\, L\, x_1 - p\frac{x_1^2}{2}$$

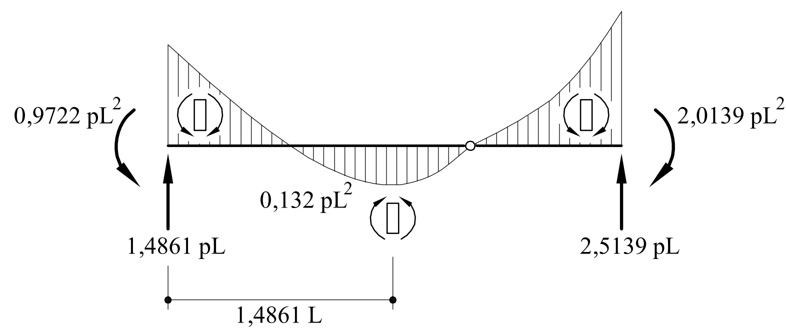


Fig. 3 Ley de momentos flectores

Problema 9.22 *En la viga que se representa en la figura 1 determinar el giro relativo entre ambos labios de la rótula C ,* $[\varphi_c]$

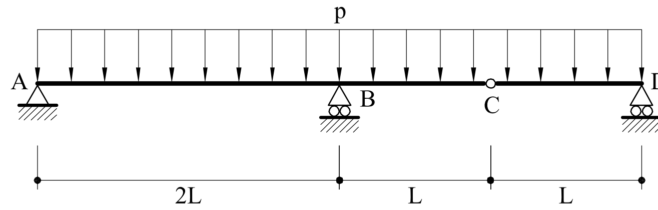


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 9.22

Solución

Se abordará la resolución utilizando dos metodologías diferentes:

Primer procedimiento: Utilizando los teoremas de Mohr. Para ello se corta la pieza por el punto *C* (ver figura 2 a)).

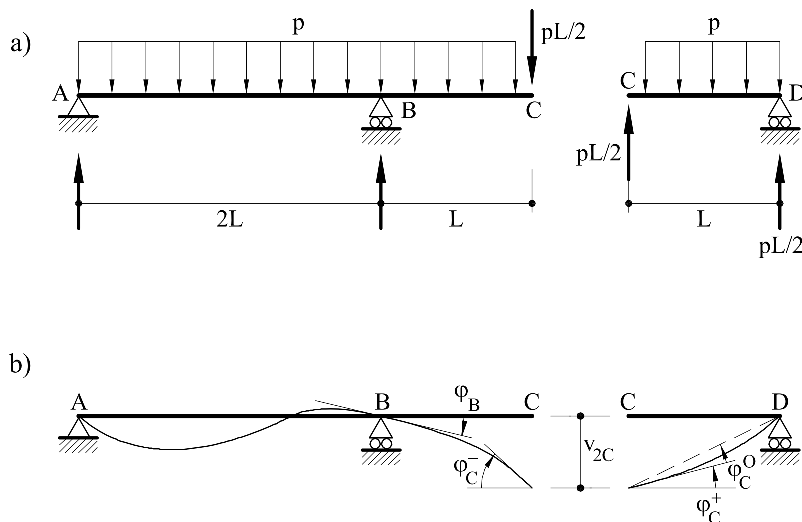


Fig. 2 a)Descomposición de la viga
b)Deformada "a estima"

A partir de la observación de la figura 2 b) se obtienen las siguientes relaciones:

$$[\varphi_c] = \varphi_c^+ - \varphi_c^-$$

$$\varphi_c^+ = \frac{v_{2c}}{L} - \varphi_c^0$$

El valor de la flecha v_{2c} así como el del giro φ_c^- se obtienen siguiendo los mismos pasos que en problemas anteriores, resultando:

$$\varphi_c^- = -0,75 \frac{pL^3}{E\,I}$$

$$v_{2c} = 0,625 \frac{pL^4}{E\,I}$$

Por otro lado:

$$\varphi_c^0 = \frac{pL^3}{24EI} = 0,0417 \frac{pL^3}{EI}$$

es decir:

$$\varphi_c^+ = 0,625 \frac{PL^3}{E\,I} - 0,0417 \frac{pL^3}{E\,I} = 0,5833 \frac{pL^3}{E\,I}$$

Resultando, por consiguiente:

$$[\varphi] = 0,75 \frac{pL^3}{E\,I} + 0,5833 \frac{pL^3}{E\,I} = 1,3333 \frac{pL^3}{E\,I}$$

Segundo procedimiento: Utilizando el teorema de la fuerza unidad. Para ello, se introducen dos momentos unidad $\overline{M} = 1$ en ambos labios de la rótula. (figura 3). El giro relativo vendrá dado por:

$$[\varphi_c] = \int M_f m_f \frac{ds}{E\,I}$$

siendo M_f la ley de momentos flectores de la estructura debidas a la carga real y m_f la ley de momentos flectores de la misma estructura debida a los momentos $\overline{M} = 1$.

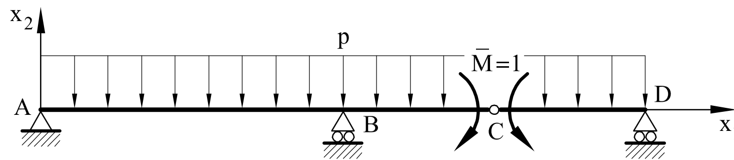


Fig. 3 Introducción de dos momentos $\overline{M} = 1$

Las leyes de momentos flectores se escriben:

$$M_f \Big|_A^B = 0,5\, pL\, x_1 - 0,5\, p\, x_1^2$$

$$M_f \Big|_B^D = -6\, pL^{\,2} + 3,5\, p\, L\, x_1 - 0,5\, p\, x_1^2$$

$$m_f\Big|_A^B = -\frac{x_1}{L}$$

$$m_f\Big|_B^D = -4 + \frac{x_1}{L}$$

Por lo tanto, el giro relativo valdrá

$$[\varphi_C] = \int_0^{2L} M_f\Big|_A^B m_f\Big|_A^B \frac{d\,x_1}{E\,I} + \int_{2L}^{4L} M_f\Big|_B^D m_f\Big|_B^D \frac{d\,x_1}{E\,I} = 1{,}3333\frac{p\,L^3}{E\,I}$$

Resultado que, lógicamente, es igual al obtenido anteriormente.

Problema 9.23 *En la viga que se representa en la figura 1, utilizando el teorema de la fuerza unidad, hallar el giro relativo entre los dos labios de la rótula del punto B.*

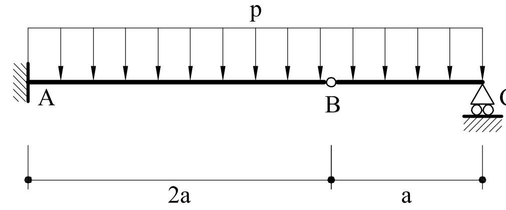


Fig.1 Viga correspondiente al problema 9.23

Solución

Para hallar el giro relativo entre los dos labios de la rótula *B* se coloca un momento virtual $\overline{M}$ unidad: $\overline{M}=1$ (ver figura 2)

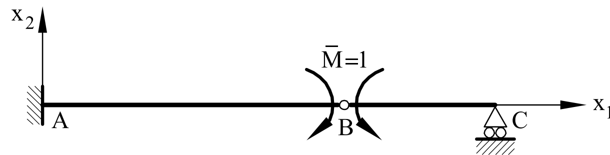


Fig. 2. Momento virtual unidad

La ley de momentos flectores debida a las cargas reales se escribe:

$$M_f = \frac{p\,a}{2}\left(3a - x_1\right) - \frac{p}{2}\left(3a - x_1\right)^2$$

La ley de momentos flectores debida a las cargas virtuales vale:

$$m_f = -\frac{3a - x_1}{a}$$

Con lo cual, el salto del giro en B vale

$$\left[\varphi_B\right] = \int_0^{3a} M_f\, m_f\, \frac{d\,x_1}{E\,I} = \frac{45}{8}\,\frac{p\,a^3}{E\,I} = 5{,}625\,\frac{p\,a^3}{E\,I}$$

Problema 9.24 *Aplicando el teorema de Mohr, hallar los giros en los puntos A y B de la viga representada en la figura 1*

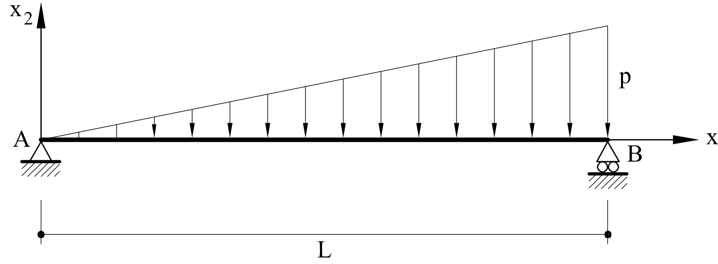


Fig.1 Viga correspondiente al problema 9.24

Solución

Las reacciones en A y B valen:

$$R_A = \frac{p\,L}{6} \qquad\qquad R_B = \frac{p\,L}{3}$$

La ley de momentos flectores se escribe:

$$M_f = \frac{p\,L}{6} x_1 - \frac{p\,x_1^3}{6L}$$

El movimiento vertical del punto B vale cero, por tanto, aplicando el segundo teorema de Mohr

$$u_{2B} = 0 = \varphi_A L + \int_0^L M_f \left(L - x_1\right) \frac{d\,x_1}{E\,I} = \varphi_A L + \frac{7}{360\,E\,I} p\,L^4$$

Es decir,

$$\varphi_A = -\frac{7\,p\,L^3}{360\,E\,I}$$

El giro en B valdrá:

$$\varphi_B = \varphi_A + \int_0^L M_f \frac{d\,x_1}{E\,I} = -\frac{7}{360\,E\,I} p\,L^3 + \frac{p\,L^3}{24\,E\,I} = \frac{1}{45\,E\,I} p\,L^3$$

Problema 9.25 *Utilizando las tablas de flechas y giros, hallar el movimiento vertical del punto E en la viga de la figura 1.*

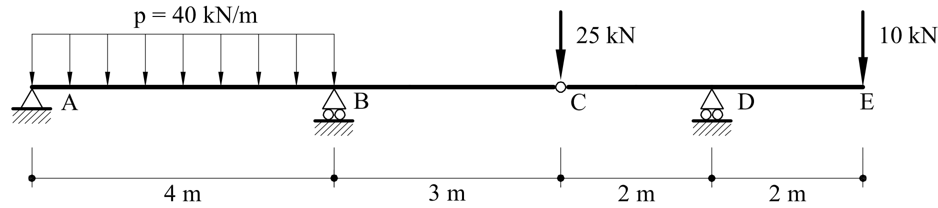


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 9.25

Solución

Se corta la estructura por el punto C y se separa el trozo ABC (figura 2 a)). A su vez, separando el trozo AB se obtiene la viga simple indicada en la figura 2 b). A partir de esta última figura (tomando positivo el sentido antihorario de giro):

$$\varphi_B = \frac{1}{EI}\left(\frac{40\times 4^3}{24} - \frac{45\times 4}{3}\right) = \frac{46{,}667}{EI}$$

Si se toma como flecha positiva el sentido descendente, la flecha en C vale (a partir de la figura 2 a)):

$$v_c = -\frac{46{,}667\times 3}{EI} + \frac{15\times 3^3}{EI} = -\frac{5}{EI}$$

Por otra parte, a partir de la figura 3

$$\varphi_D = \frac{v_c}{2} - \frac{20\times 2}{3EI} = -\frac{5}{2EI} - \frac{20\times 2}{3EI} = -\frac{15{,}83}{EI}$$

Con lo cual, el desplazamiento vertical del punto E valdrá

$$v_E = -2\varphi_D + \frac{10\times 2^3}{3EI} = \frac{2\times 15{,}83}{EI} + \frac{10\times 2^3}{3EI} = \frac{58{,}34}{EI}$$

Problema 9.26 *La estructura de la figura 1 está compuesta por una viga horizontal AB de módulo de elasticidad E e inercia I, y por un tirante BC de módulo de elasticidad E y sección recta ω. Se desea determinar la tensión en el tirante.*

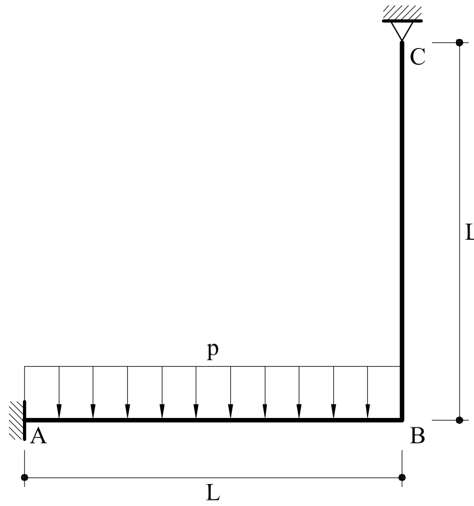


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 9.26

Solución

Se separa la ménsula del tirante sustituyéndolos por sus efectos (figura 2).

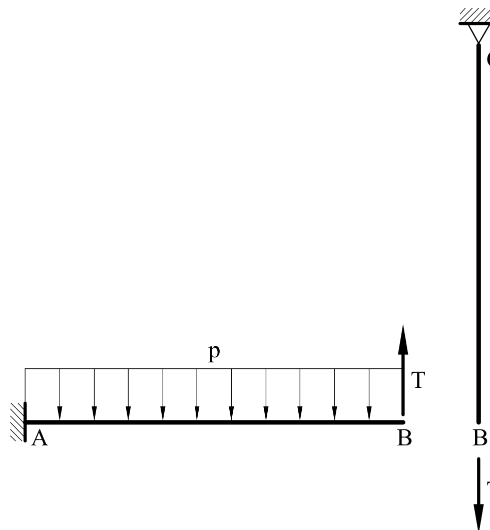


Fig. 2 Separación de la ménsula y del tirante

El movimiento vertical de *B* debe ser el mismo si se le considera perteneciente a la ménsula o al tirante, es decir:

$$v_{2B} = \frac{pL^4}{8EI} - \frac{TL^3}{3EI} = \frac{TL}{E\omega}$$

de donde:

$$T = \frac{p\,L}{8\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{I}{\omega\,L^2}\right)}$$

Nótese que para el caso en que $\omega = \infty$ (apoyo simple) el valor de T sería $T = 3\,p\,L/8$

Problema 9.27 *La estructura de la figura 1 está compuesta por una viga horizontal AB de módulo de elasticidad E e inercia I, y un tirante inclinado BC de módulo de elasticidad E y sección recta ω. Se desea determinar la tensión en el tirante.*

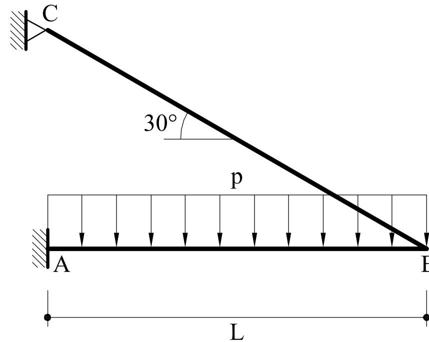


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 9.27

Solución

Sea T la tensión en el tirante CB. Debido a dicha tensión el tirante CB experimentará un alargamiento de valor

$$\Delta_{CB} = \frac{T\,L_{CB}}{E\,\omega} = \frac{T\,L}{E\,\omega\,\cos 30}$$

En la figura 2 puede verse la composición de movimientos: El punto *B*, debido al alargamiento del tirante se moverá hasta *B'*. Dado que la posición B' no es compatible con el movimiento del punto *B* de la viga, el cable *CB* gira alrededor de *C*, es decir el punto *B'* se moverá hasta *B''*.

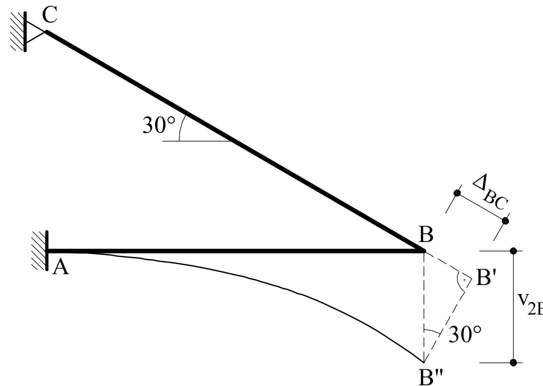


Fig. 2 Composición de movimientos

Por lo tanto,

$$v_{2B} = \frac{p\,L^4}{8EI} - \frac{T\sin 30\,L^3}{3EI}$$

$$v_{2B} = \Delta_{BC} / \sin 30$$

Igualando:

$$\frac{p\,L^4}{8\,E\,I}-\frac{T\,L^3\,sin\,30}{3\,E\,I}=\frac{T\,L}{E\omega\,cos\,30\,sin\,30}$$

es decir,

$$T=\frac{p\,L}{8\left(\frac{1}{6}+\frac{2\,I}{L^2\omega\,cos\,30}\right)}$$

Problema 9.28 *La estructura que se representa en la figura 1 está formada por una viga biapoyada ABC de momento de inercia I. En el punto B se apoya el puntual BD el cual está biarticulado. Las rectas AD y DC son tirantes de sección recta ω. Sabiendo que el módulo de elasticidad es el mismo para toda la estructura, se desea conocer el valor del esfuerzo axil en los tirantes AD y DC.*

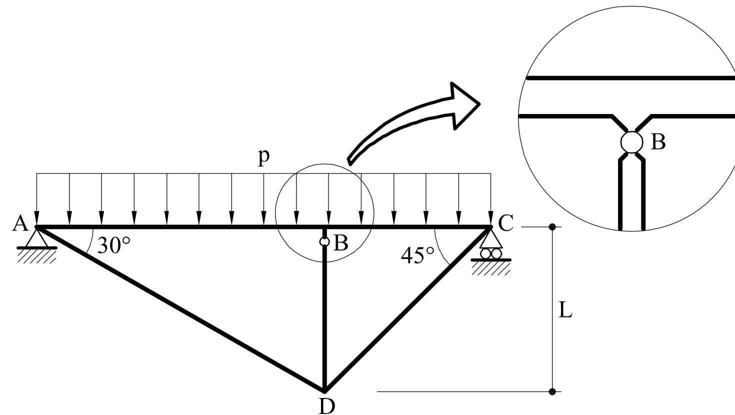


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 9.28

Solución

Sean T_1 y T_2 los esfuerzos en los tirantes *AD* y *DC* respectivamente. La resultante de T_1 y T_2 debe tener la dirección vertical ya que la pieza *BD* no tiene momentos flectoresal estar biarticulada (figura 2). Por lo tanto:

$$T_1 \cos 30 = T_2 \cos 45$$

$$T_1 = 0{,}8165 \ T_2$$

y además

$$T = T_1 \sin 30 + T_2 \sin 45 = 1{,}1154 \ T_2$$

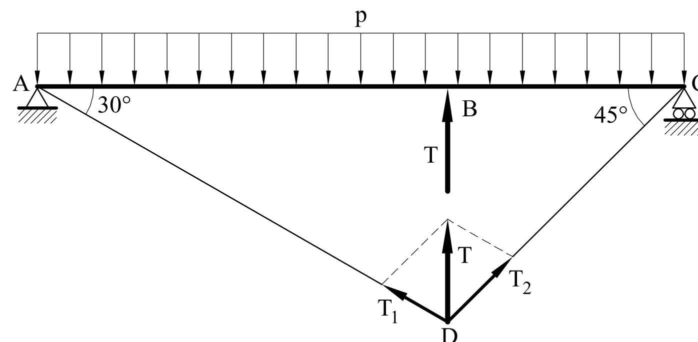


Fig. 2 Esquema de fuerzas

El movimiento vertical del punto *D* debe ser el mismo tanto si se considera que pertenece a la subestructura *ABCD* como si se considera que pertenece a los dos tirantes *AD* y *DC*.

a) *Movimiento vertical de D considerando que pertenece a ABCD*
El movimiento vertical de *D* será el mismo que el del punto *B* de la viga *ABC*.

$$v_{2D} = v_{2B} = 0{,}6637\,\frac{p\,L^4}{E\,I} - 0{,}366\,\frac{T\,L^3}{E\,I} = 0{,}6637\,\frac{p\,L^4}{E\,I} - 0{,}4083\,\frac{T_2\,L^3}{E\,I}$$

b) *Movimiento vertical de D considerando que pertenece a los tirantes* (figura 3)

El alargamiento del tirante *AD* valdrá

$$\Delta_{AD} = \frac{T_1\,L_{AD}}{E\,\omega} = \frac{1{,}633\,T_2\,L}{E\,\omega}$$

El alargamiento del tirante *CD* valdrá

$$\Delta_{CD} = \frac{T_2\,L_{CD}}{E\,\omega} = \frac{1{,}4142\,T_2\,L}{E\omega}$$

Con lo cual, componiendo movimientos (figura 3) se tendrá

$$v_{2D} = 0{,}9\,\Delta_{CD} + 0{,}732\,\Delta_{AD} = 2{,}4681\,\frac{T_2\,L}{E\,\omega}$$

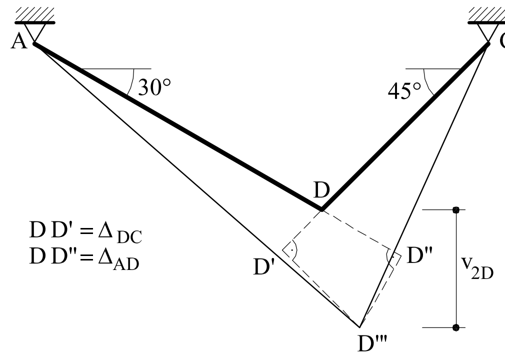


Fig. 3 Composición de movimientos en los tirantes

A la misma conclusión se llega aplicando el teorema de Castigliano. La energía elástica de los cables valdrá:

$$W = \frac{1}{2}\left[\frac{T_1^2 L_{AD}}{E\,\omega} + \frac{T_2^2\,L_{CD}}{E\,\omega}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{2{,}2137\,T^2 L}{E\,\omega}$$

$$v_{2D} = \frac{\partial W}{\partial T} = \frac{2{,}2137\,T\,L}{E\,\omega} = 2{,}468\,\frac{T_2\,L}{E\,\omega}$$

valor que coincide con el obtenido anteriormente.
Igualando los movimientos del punto *D* se obtiene la ecuación:

$$0{,}6637\ \frac{p\,L^4}{E\,I} - 0{,}4083\,\frac{T_2\,L^3}{E\,I} = 2{,}4681\,\frac{T_2\,L}{E\,\omega}$$

es decir

$$T_2 = \frac{p\,L}{0{,}6152 + 3{,}7187\ \dfrac{I}{L^2\omega}}$$

y también

$$T_1 = \frac{p\,L}{0{,}7535 + 4{,}5544\ \dfrac{I}{L^2\omega}}$$

Problema 9.29 *La ménsula de la figura 1, tiene sección rectangular de 1 metro de ancho por 1,2 de canto. La viga se postensa mediante un cable AB de sección* ω *.La fuerza de postensado F es tal que las máximas tensiones en el hormigón sean de* $15\ MPa$.

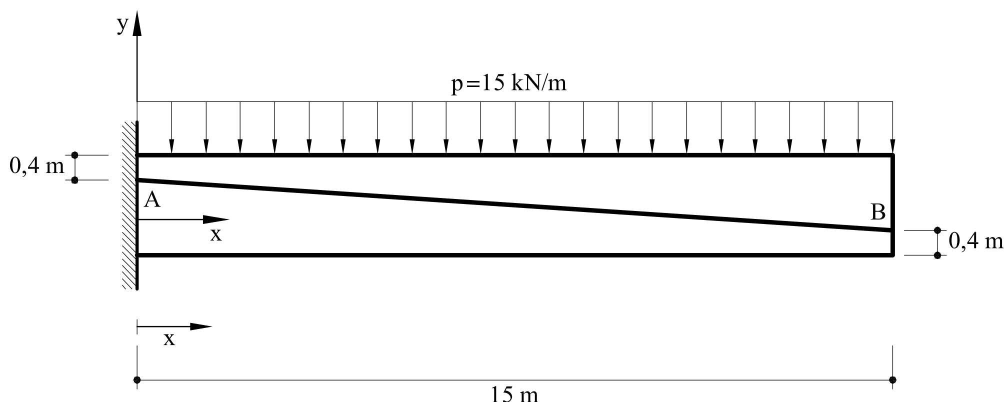


Fig. 1 Pieza correspondiente al problema 9.29

Una vez postensada la viga, sin que exista adherencia entre el hormigón y el acero, se aplica una fuerza uniformemente repartida por unidad de longitud $p = 15\ kN/m$.

Sabiendo que la sección ω *es tal que después de postensar las tensiones en el acero valen* $900\ MPa$.

DETERMINAR:

- *Distribución de tensiones en el hormigón en las secciones situadas a distancias* $x = 0$, $x = 7{,}5 m$.
- *Flecha en el punto* $x = 15 metros$.

NOTAS:

- *No se considera el peso propio del hormigón.*
- $E_a = 210\ GPa$
- $E_h = 30\ GPa$
- $n = \dfrac{E_a}{E_h} = 7$

Solución

- La ecuación de la recta *AB* respecto a los ejes *x, y* se escribe

$$y = -\frac{0{,}4}{15}\ x + 0{,}2$$

La ley de esfuerzos axiles será constante en toda la pieza y valdrá $N = F$. La ley de momentos flectores se escribe

$$M_f = F\,y = F\left(-\frac{0,4}{15}x + 0,2\right)$$

Las máximas tensiones de compresión en el hormigón, después de postensar, se producirán o bien en la fibra inferior en $x = 15\,m$ o bien en la fibra superior en $x = 0$. En ambos casos valdrán

$$\sigma^1 = -\frac{F}{A} - \frac{M_f\,(x=0)\times 0,6}{I}$$

siendo *A* el área del hormigón e *I* el momento de inercia de valor $I = 0,144\,m^4$. Por tanto:

$$\sigma^1 = -\frac{F}{1,2} - \frac{(0,2\,F)\times 0,6}{0,144} = -1,6667\,F$$

y como estas tensiones deben ser iguales a $15\ MPa$, resulta que

$$F = 9\ 000\,kN$$

Dado que las tensiones en el acero deben valer $900\,MPa$, la sección de acero valdrá

$$\omega = \frac{9\ 000\,kN}{900\,MPa} = 100\,cm^2$$

Al aplicar la sobrecarga $p = 200\,kN/m$ se producirán unas sobretensiones en el hormigón y en el acero que se calculan a continuación. Al no existir adherencia entre el cable *AB* y el hormigón, ninguna de las secciones se comportará como una sección mixta. El incremento de fuerza ΔF que se producirá en el cable se obtendrá compatibilizando el alargamiento de *AB* en el cable con el alargamiento de *AB* en el hormigón. Las leyes de momentos en el hormigón valdrán

$$M_f = \Delta F\left(-\frac{0,4}{15}x + 0,2\right) - p\,\frac{(15-x)^2}{2}$$

El alargamiento de una fibra cualquiera en el hormigón situada en la recta *AB* (figura 2) valdrá

$$d\Delta_{AB} = -\frac{\Delta F}{EA}dx - \frac{M_f}{EI}y\,dx$$

Es decir:

$$\Delta_{AB} = -\frac{\Delta F}{E_h A}\times 15 - \int_0^{15}\frac{M_f\,y}{EI}dx = -\frac{\Delta F}{E_h}\frac{15}{1,2} - \int_0^{15}\frac{\Delta F\left(-\frac{0,4}{15}x + 0,2\right) - p\,\frac{(15-x)^2}{2}}{E_h I}\times$$

$$\left(-\frac{0,4}{15}x + 0,2\right)dx = \frac{1}{E_h}\left(-13,889\,\Delta F + 5\,859,4\right)$$

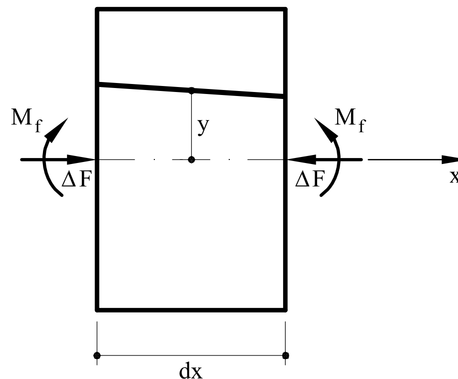


Fig.2 Dovela entre A y B

El incremento de longitud del cable vale

$$\Delta_{AB} = \frac{\Delta F \times 15}{E_a \omega} = \frac{\Delta F}{E_a} \times 1\,500$$

Igualando:

$$\Delta F = 25{,}68\,kN$$

- Tensiones en $x = 0$

a) Tensiones debidas al pretensado

$$\sigma^1 = -\frac{F}{A} - \frac{M_f\,y}{I} = -\frac{9\,000}{1{,}2} - \frac{0{,}2 \times 9\,000\,y}{0{,}144} = -7\,500 - 12\,500\,y \quad \left(kN/m^2\right)$$

b) Tensiones debidas a la carga $p = 200\,kN/m$

El momento flector vale

$$M_f = 0{,}2\,\Delta F - p\frac{15^2}{2} = 5{,}14 - 1\,687{,}5 = -1\,682{,}36\,kN\,m$$

Las tensiones valdrán:

$$\sigma^2 = -\frac{\Delta F}{A} - \frac{M_f\,y}{I} = -\frac{25{,}68}{1{,}2} + \frac{1\,682{,}36\,y}{0{,}144} = -21{,}4 + 11\,683{,}1\,y \quad \left(kN/m^2\right)$$

c) Tensiones totales (figura 3):

$$\sigma = \sigma^1 + \sigma^2 = -7521{,}4 - 816{,}9\, y \quad \left(kN/m^2\right)$$

- Tensiones en $x = 7{,}5\, m.$

a) Tensiones debidas al pretensado:

$$\sigma^1 = -\frac{F}{A} = -\frac{9\,000}{1{,}2} = -7\,500\; kN/m^2$$

b) Tensiones debidas a la carga $p = 200\, kN/m$
El momento flector vale:

$$M_f = -p\frac{(7{,}5)^2}{2} = -421{,}9\; kN\, m$$

Las tensiones valdrán:

$$\sigma^2 = -\frac{\Delta F}{A} - \frac{M_f\, y}{I} = -\frac{25{,}68}{1{,}2} + \frac{421{,}9\, y}{0{,}144} = -21{,}4 + 2\,930\, y \quad \left(kN/m^2\right)$$

c) Tensiones totales

$$\sigma = \sigma^1 + \sigma^2 = -7\,521{,}4 + 2\,930\, y \quad \left(kN/m^2\right)$$

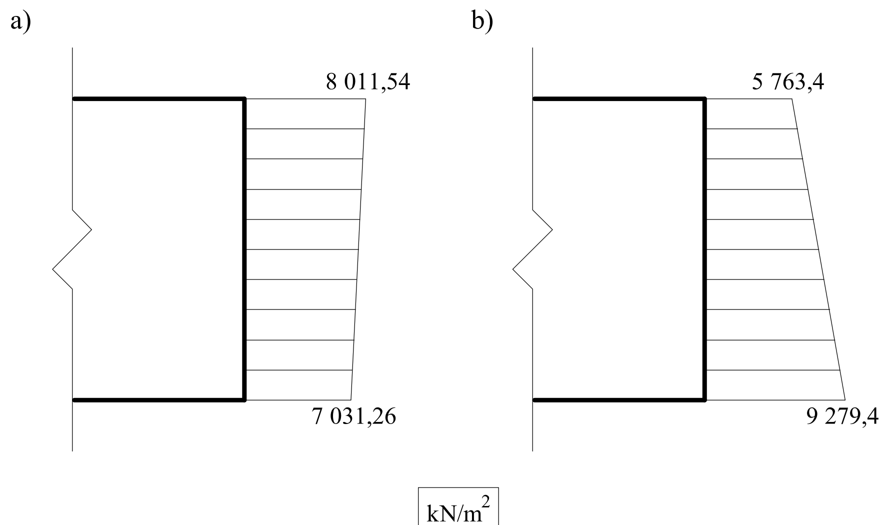


Fig. 3 Distribución de tensiones: a) Tensiones en $x = 0$ *b) Tensiones en* $x = 7{,}5\, m.$

Flecha en el punto $x = 15\, m$

a. Flecha debida al pretensado:
La ley de momentos flectores vale:

$$M_f = F\left(-\frac{0,4}{15}x + 0,2\right)$$

Por tanto, la flecha vertical de *B* valdrá (positiva si ascendente)

$$f_B^1 = \int_0^{15} M_f (15 - x)\frac{dx}{EI} = 0,002232 \;\; m.$$

b. Flecha debida a las cargas

La ley de momentos flectores vale:

$$M_f = \Delta F\left(-\frac{0,4}{15}x + 0,2\right) - p\frac{(15 - x)^2}{2} = 25,68\left(-\frac{0,4}{15}x + 0,2\right) - 15\frac{(15 - x)^2}{2}$$

La flecha en *B* vale

$$f_B^2 = \int_0^{15} M_f (15 - x)\frac{dx}{EI} = -0,00313 \;\; m$$

La flecha total valdrá (positivo si descendente):

$$f_B = f_B^1 + f_B^2 = -0,0009 \; metros.$$

Problema 9.30 *En la estructura de la figura 1, los dos triángulos superiores están articulados a la viga ABC, así como entre sí en D. La sección de AD, BD,* y *DC* es ω *y la inercia de ABC es 1, siendo* $I/\omega = 2\ m^2$.

Se considera la deformación por axil de las barras AD, BD, y DC.

Determinar en todas las piezas las leyes de esfuerzos.

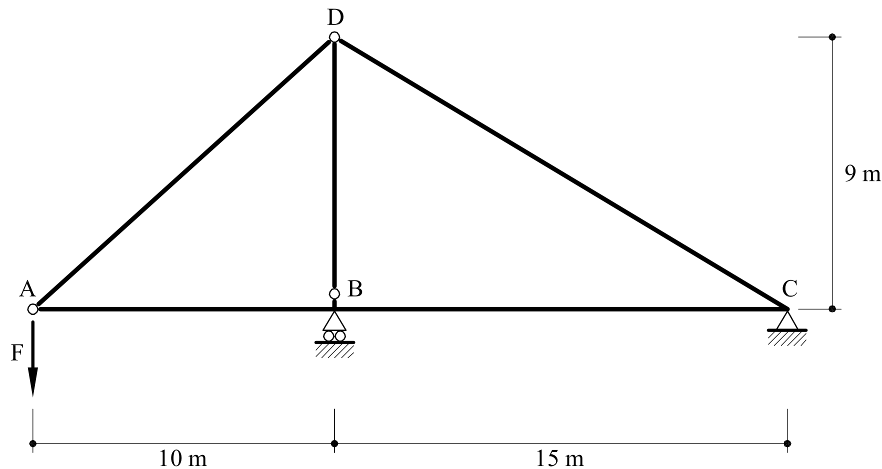


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 9.30

Solución

Sea *P* el esfuerzo axil de *AD*. Por equilibrio, el esfuerzo axil de *DB* valdrá 1,1157 *P* (compresión) y el axil de *DC* 0,867 *P*.

Cortando por el punto *A*, el movimiento de dicho punto supuesto perteneciente a las piezas *AD*, *DB* y *DC* se obtendrá como sigue: (ver figura 2)

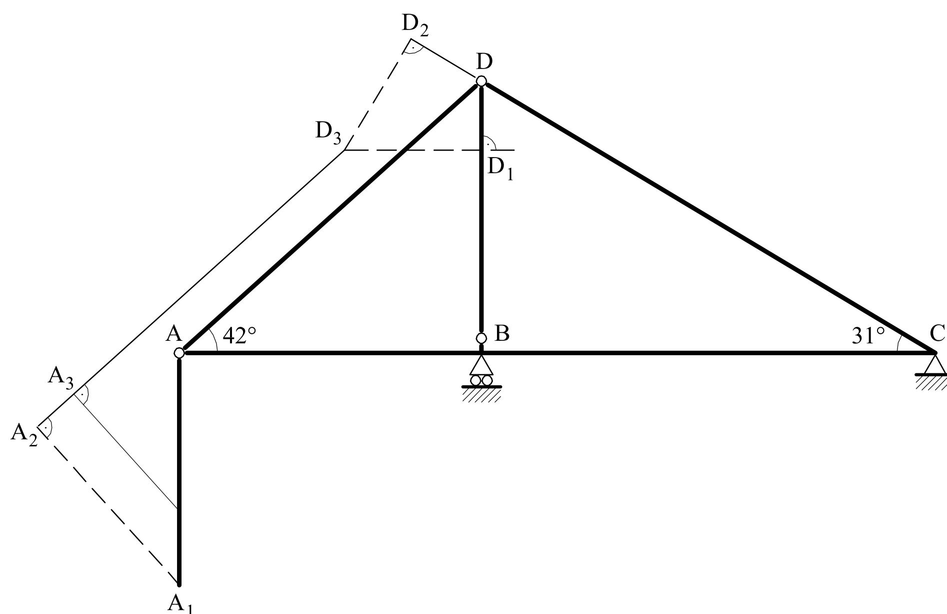


Fig. 2 Composición de movimientos

$$DD_2 = \frac{N_{CD} L_{CD}}{E\omega} = \frac{0{,}867\,\mathrm{P} \times 17{,}49}{E\omega} = 15{,}17\,\frac{\mathrm{P}}{E\omega}$$

$$DD_1 = \frac{N_{DB} L_{DB}}{E\omega} = \frac{1{,}1157\,\mathrm{P} \times 9}{E\omega} = 10{,}04\,\frac{\mathrm{P}}{E\omega}$$

y proyectando los cuatro lados del cuadrilátero $DD_1D_2D_3$ sobre DC se obtiene

$$DD_2 + DD_1 \sin 31 = D_1D_3 \cos 31$$

es decir

$$D_1D_3 = 23{,}73\,\frac{\mathrm{P}}{E\omega}$$

Asimismo, puede verse que

$$\delta_A = AA_1 = DD_1 + \frac{D_1D_3}{\tan 42} + \frac{A_2A_3}{\sin 42} = \left(10{,}04 + \frac{23{,}73}{\tan 42} + \frac{L_{AD}}{\sin 42}\right)\frac{\mathrm{P}}{E\omega} = 56{,}5\,\frac{\mathrm{P}}{E\omega}$$

Por otro lado, la flecha del punto *A* supuesto que pertenece a la viga vale (figura 3).

$$\delta_A = 833{,}33\,\frac{F - 0{,}67\,\mathrm{P}}{E\,I}$$

Igualando, y teniendo en cuenta que $I/\omega = 2\,m^2$,

$$\mathrm{P} = 1{,}24\,F$$

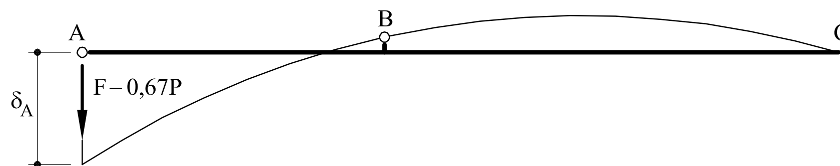
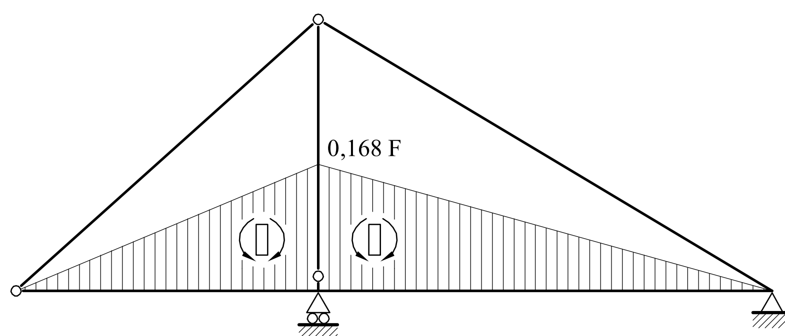
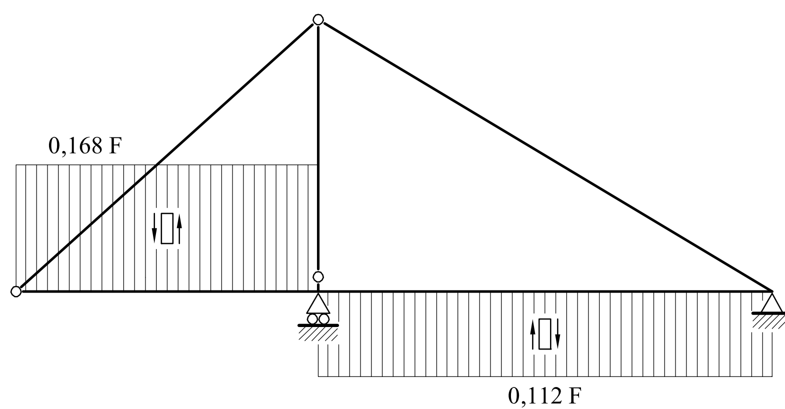


Fig. 3 Deformada de la viga

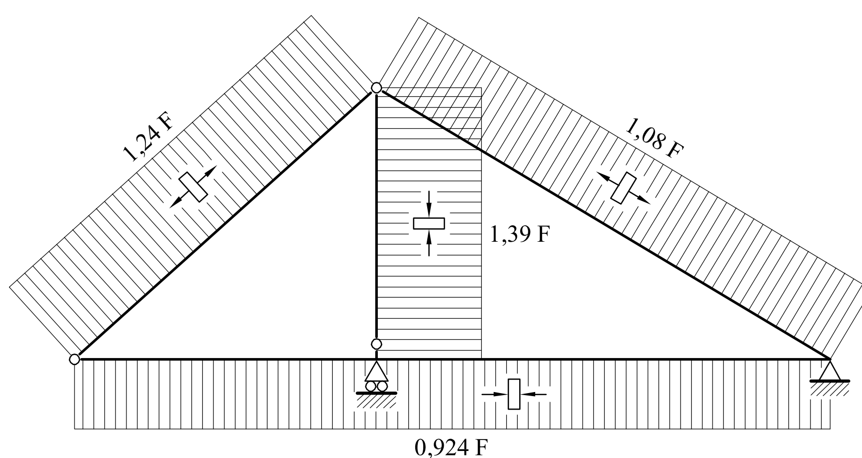
Conocido el valor de *P* ya pueden hallarse las leyes de esfuerzos (Figura 4). Asimismo, en la figura 5 puede verse la deformada de toda la estructura.



Flectores



Cortantes



Axiles

Fig. 4 Leyes de esfuerzos

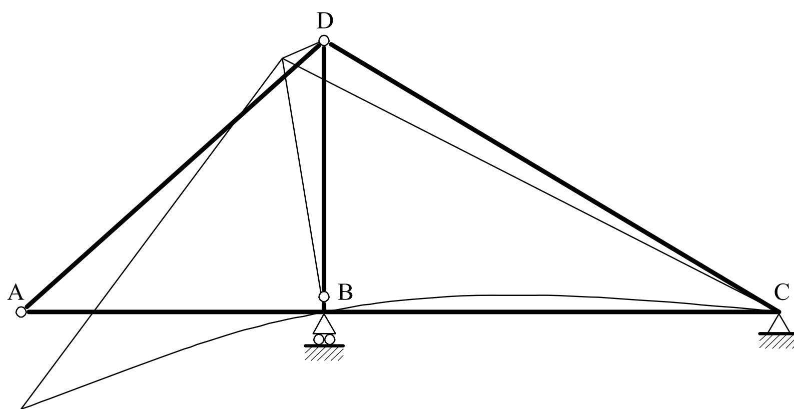


Fig. 5 Deformada de toda la estructura

Problema 9.31 *En la pasarela de peatones de la figura 1, las rectas AD, DD' y D'A' representan tres tirantes que se unen entre sí y a la estructura en D y D'. El producto* EI *en el tablero vale* $(EI)_t = 80.000\ kN \times m^2$, *mientras que las características del tirante son: Módulo de elasticidad* $E_C = 210\ GPa$ *y área* $A = 40\,cm^2$. *Las piezas inclinadas están articuladas entre sí en los puntos* D *y* D', *y articuladas al tablero en los puntos B, C, C' y B'. Asimismo, los triángulos BCD y B'C'D' son equiláteros.*

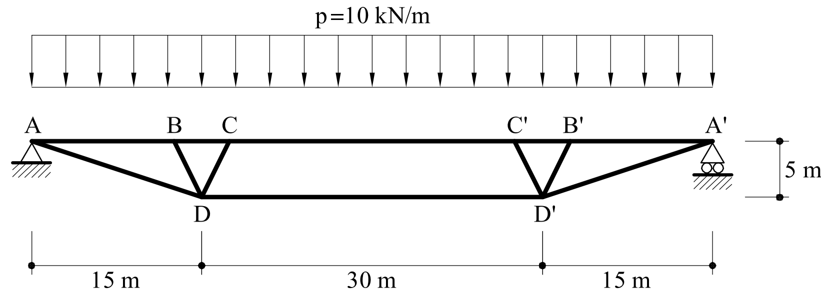


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 9.31

DETERMINAR:

- *Leyes de esfuerzos en toda la estructura*
- *Esfuerzos en los tirantes*
- *Flecha en el punto medio de CC'*

Solución

Sea T_1 el esfuerzo en los tirantes *AD* y *A'D'* y T_2 el esfuerzo en el tirante *DD'*. Se eliminan dichos tirantes sustituyéndolos por los efectos que ejercen en el resto de la estructura. Dado que las barras inclinadas están biarticuladas es inmediato obtener las fuerzas que, debido a los tirantes, actúan sobre la viga horizontal (figura 2).

El movimiento vertical de los puntos *B* y *C* valdrá

$$v_B = -\frac{326,96}{EI}T_1 - \frac{900,64}{EI}T_2 + \frac{1,01\times10^6}{EI}$$

$$v_C = -\frac{336,88}{EI}T_1 - \frac{1299}{EI}T_2 + \frac{1,37\times10^6}{EI}$$

Con lo cual, el desplazamiento vertical de *D* valdrá:

$$v_D = \frac{v_B + v_C}{2} = -\frac{331,92}{EI}T_1 - \frac{1099,82}{EI}T_2 + \frac{1,19\times10^6}{EI}$$

y el desplazamiento horizontal (positivo hacia la derecha)

$$u_D = \frac{v_B - v_D}{5}\,\frac{5\sqrt{3}}{2} = 0,866\left(v_B - v_D\right) = \frac{8,59}{EI}\,T_1 + \frac{345}{EI}T_2 - \frac{0,3118\times10^6}{EI}$$

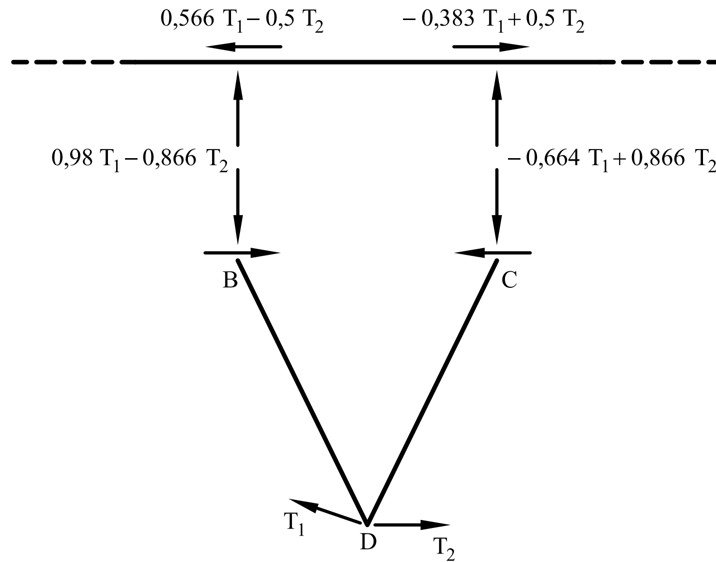


Fig. 2 Descomposición de fuerzas en BCD

La proyección de los desplazamientos sobre la recta *AD* vale

$$\delta_1 = v_D \sin(18{,}45) + u_D \cos(18{,}45) = \frac{-96{,}81\, T_1 - 20{,}49\, T_2 + 0{,}0805 \times 10^6}{E\, I}$$

La proyección de los desplazamientos sobre la recta *DD'* es u_D

$$\delta_2 = -u_D$$

Igualando δ_1 al alargamiento del tirante *AD* y δ_2 al alargamiento de la mitad del tirante *DD'*:

$$-96{,}81 T_1 - 20{,}49 T_2 + 0{,}0805 \times 10^6 = \frac{E\, I}{E\, \omega} T_1 \times 15{,}81$$

$$8{,}59 T_1 + 345 T_2 - 0{,}3118 \times 10^6 = -\frac{E\, I}{E \omega} T_2 \times 15$$

de donde resulta el sistema de ecuaciones

$$98{,}32 T_1 + 20{,}49 T_2 = 80.500$$

$$8{,}59 T_1 + 349{,}43 T_2 = 311.800$$

Sistema que resuelto proporciona el valor de T_1 y T_2.

$$T_1 = 634{,}47\ kN$$

$$T_2 = 884{,}3\ kN$$

En la figura 3 pueden verse representadas las leyes de momentos flectores y las de esfuerzos cortantes.

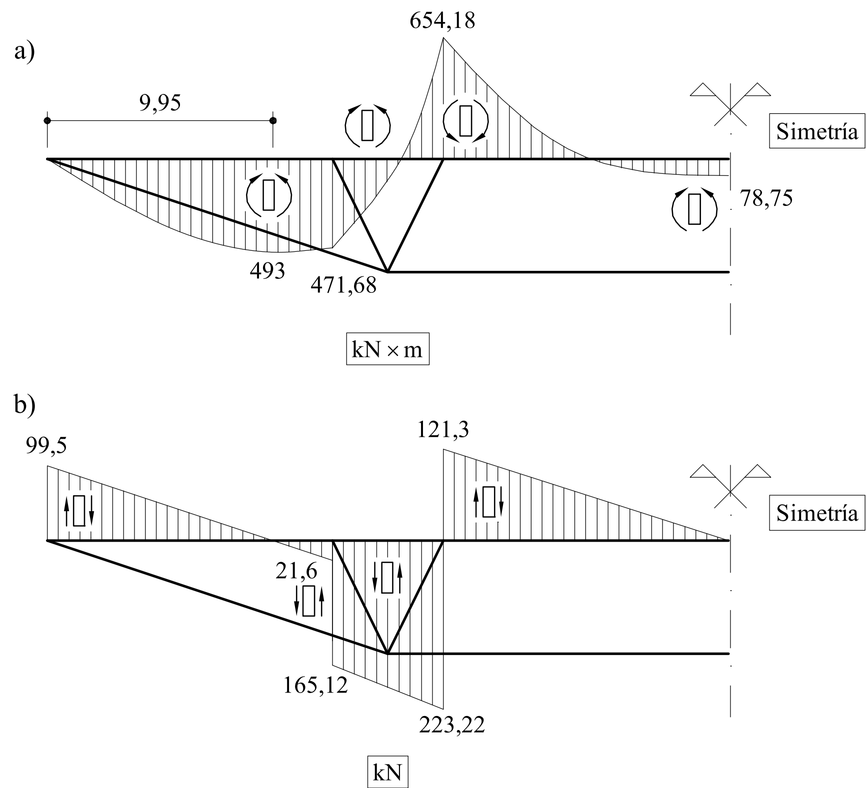


Fig. 3 Leyes de esfuerzos: a)Momentos flectores. b)Esfuerzos cortantes.

Problema 9.32 *En la pasarela de peatones de la figura 1, las rectas AD, DD' y D'A' representan un tirante único el cual puede deslizar libremente en los puntos D y D'. El producto* $E\,I$ *en el tablero vale* $\left(E\,I\right)_t = 80000\ kN \times m^2$ *, mientras que las características del tirante son: Módulo de elasticidad* $E_C = 210\ GPa$ *y área* $A = 40\ cm^2$*. Las piezas inclinadas están articuladas entre sí en los puntos D y D', y articuladas al tablero en los puntos B, C' y B'. Asimismo, los triángulos BCD y B'C'D' son equiláteros.*

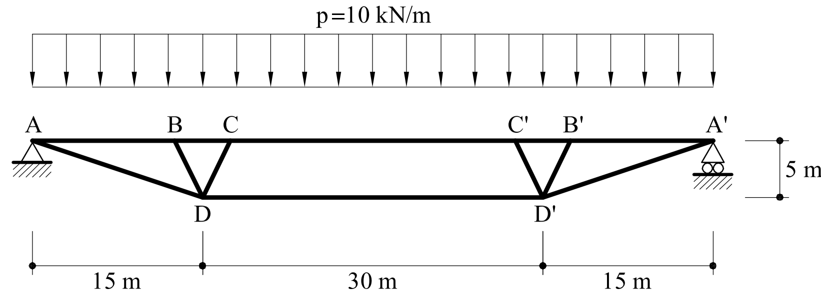


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 9.32

DETERMINAR:

- *Leyes de esfuerzos en toda la estructura*
- *Tensión en el tirante*
- *Flecha en el punto medio de CC'*

Solución

En base a los resultados obtenidos en el problema 9.28, el movimiento de *D* en la dirección *AD* vale : (téngase presente que en este caso $T_1 = T_2 = T$).

$$\delta_1 = \frac{-96{,}81T - 20{,}49T + 0{,}0805 \times 10^6}{E\,I} = \frac{-117{,}3T + 0{,}0805 \times 10^6}{E\,I}$$

y en la dirección *DD'*:

$$\delta_2 = u_D = \frac{8{,}59T + 345T - 0{,}3118 \times 10^6}{E\,I} = \frac{353{,}59T - 0{,}3118 \times 10^6}{E\,I}$$

con lo cual, el alargamiento de la mitad del cable valdrá $\delta = \delta_1 - \delta_2$ (el signo negativo que afecta a δ_2 es debido a que el movimiento horizontal de *D* se considera positivo si es hacia la derecha). Por tanto,

$$\delta = \frac{-470{,}89T + 0{,}3923 \times 10^6}{E\,I}$$

Igualando δ al alargamiento de medio tirante

$$\frac{-470{,}89T + 0{,}3923 \times 10^6}{E\,I} = T\frac{15{,}81 + 15}{E\,\omega} = \frac{30{,}81T}{E\,\omega}$$

Es decir:

$$T = 828{,}5\ kN$$

Conocido el valor de T , se obtienen fácilmente las leyes de esfuerzos.

Problema 9.33

a) La pasarela de peatones de la figura 1 está sometida a una sobrecarga en la viga horizontal de $p = 35\ kN/m$

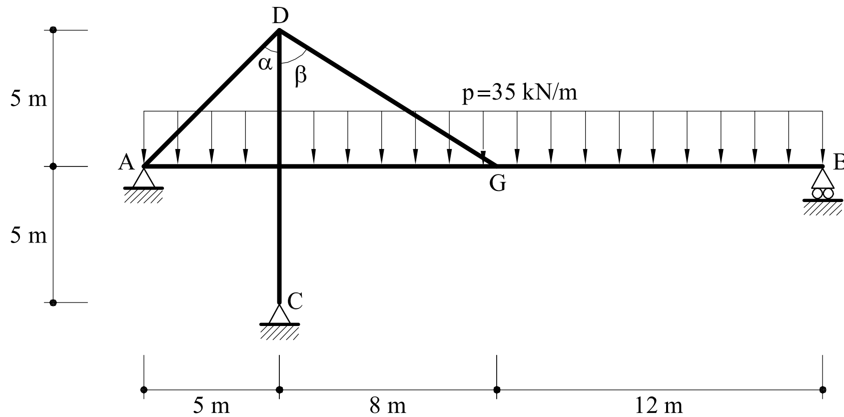


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 9.33

Las rectas AD y DG son dos tirantes de sección $\omega = 20\,cm^2$ *y módulo de elasticidad* $E_t = 210\ GPa$. *En el extremo D del mástil DC los dos tirantes se unen al mástil. Las rectas AG y DC se cruzan sin cortarse.*

La inercia de la viga AGB vale $I = 0{,}1\ m^4$ *siendo su módulo de elasticidad* $E_v = 30\ GPa$

DETERMINAR:

- *Leyes de esfuerzos*
- *Movimientos de los puntos D y G*

b) En el caso de que la sección ω *de los cables fuera desconocida, determinar el valor de* ω *de forma que el momento flector en el punto G de la viga AGB sea cero.*

Solución

a) Sea δ el movimiento horizontal del punto *D*. Por otro lado, si *T* es el esfuerzo axil en el cable *DG*, y dado que el axil de *DG* más el axil de *AD* debe tener la dirección *DC*, el axil en *AD* vale

$$T_{AD} = T\,\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

El alargamiento de *AD* valdrá

$$\delta_{AD} = \frac{T_{AD}L_{AD}}{E_t\omega} = \frac{5T}{E_t\omega}\,\frac{\sin\beta}{\sin^2\alpha}$$

El alargamiento de *DG* vale

$$\delta_{DG} = \frac{T_{DG} L_{DG}}{E_t \omega} = \frac{5T}{E_t \omega} \frac{1}{\cos\beta}$$

En la figura 2 puede verse la composición de movimientos

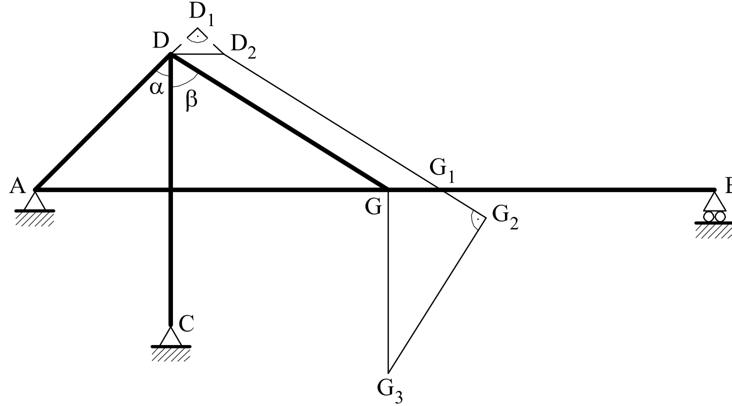


Fig. 2 Composición de movimientos

Siendo:

$$DD_1 = \delta_{AD}$$

$$G_1 G_2 = \delta_{DG}$$

$$DD_2 = GG_1 = \frac{DD_1}{\sin\alpha} = \frac{\delta_{AD}}{\sin\alpha} = \frac{5T}{E_t \omega} \frac{\sin\beta}{\sin^3\alpha}$$

A partir del cuadrilátero $GG_1\ G_2\ G_3$ se obtiene

$$G_1 G_2 + GG_1 \sin\beta = GG_3 \cos\beta$$

Sustituyendo y llamando $GG_3 = \Delta$

$$\Delta = \frac{\frac{5T}{E_t \omega} \frac{1}{\cos\beta} + \frac{5T}{E_t \omega} \frac{\sin^2\beta}{\sin^3\alpha}}{\cos\beta} = \frac{5T}{E_t \omega} \left(\frac{1}{\cos^2\beta} + \frac{\tan\beta \sin\beta}{\sin^3\alpha} \right) = \frac{37T}{E_t \omega}$$

Por otro lado, la viga *AGB* está sometida a una carga repartida de valor $35\ kN/m$ y a una fuerza inclinada de valor *T* aplicada en *G*. La flecha en *G* valdrá

$$\Delta = \frac{177.677{,}5 - 172T}{E_v I}$$

Igualando y teniendo en cuenta que

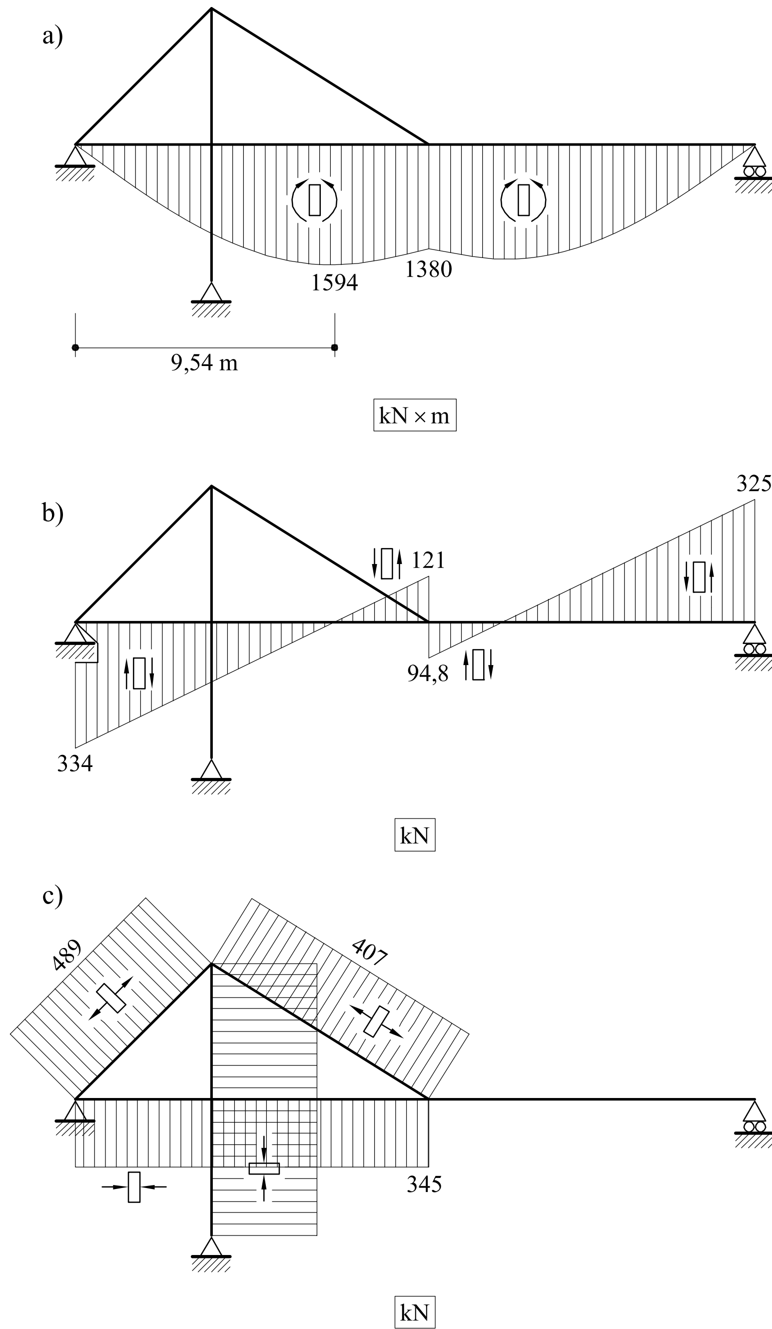


Fig. 3 Leyes de esfuerzos: a) Momentos flectores b) Esfuerzos cortantes c) Esfuerzos axiles

$$\frac{E_v I}{E_t \omega} = 0{,}14$$

resulta que:

$$0{,}14\,(177.677{,}5 - 172\,T) = 37\,T$$

es decir:

$$T = 407\ kN$$

Conocido este valor pueden hallarse las leyes de esfuerzos (figura 3).

b) Para que el momento flector en *G* sea cero, es preciso que *T* valga: $T = 825{,}5\ kN$, con lo cual, igualando nuevamente movimientos en *G*:

$$\frac{37 \times 825{,}5}{E_t \omega} = \frac{177677{,}5 - 172 \times 825{,}5}{E_V I}$$

es decir,

$$\omega = \frac{E_V I}{E_t} \frac{30543{,}5}{35691{,}5} = 0{,}012225\, m^2 = 122{,}25\ cm^2$$

Problema 9.34 *Considérese la misma estructura que la correspondiente al problema resuelto 9.28 con la diferencia de que el nudo B es rígido. Se desea hallar el valor del esfuerzo axil en cada tirante.*

Solución

Si nuevamente T_1 y T_2 son los esfuerzos axiles de los tirantes *AD* y *CD* respectivamente, es evidente ahora que su resultante no será, en general, vertical, sino que tendrá también componente horizontal. (figura 1). Se verificará que:

$$T_H = -T_1 \cos 30 + T_2 \cos 45 = -0{,}866\,T_1 + 0{,}7071\,T_2$$

$$T_V = T_1 \sin 30 + T_2 \sin 45 = 0{,}5\,T_1 + 0{,}7071\,T_2$$

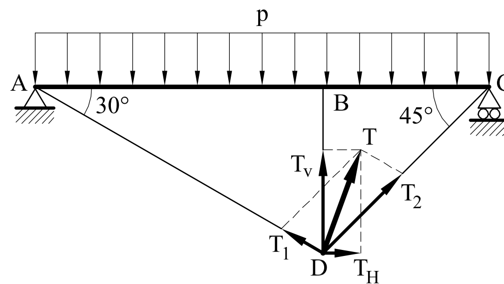


Fig. 1 Descomposición de fuerzas

Los movimientos vertical y horizontal del punto *D* deben ser los mismos tanto si se considera que pertenece a la subestructura *ABCD* como si se considera que pertenece a los tirantes *AD* y *DC*.

a) Movimiento vertical y horizontal de D considerando que pertenece a ABCD. Se trata de determinar el movimiento horizontal y vertical de la estructura representada en la figura 2.

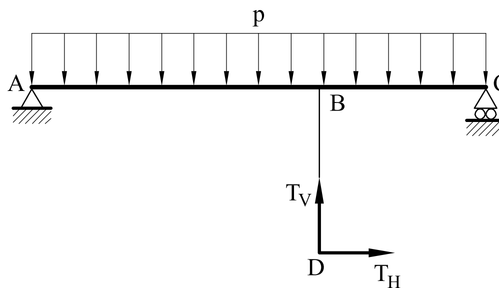


Fig. 2 Esquema de fuerzas en la subestructura ABCD

El movimiento vertical de *D* será el mismo que el punto *B* sometidos a las cargas que se indican en la figura 9.31.3 a), es decir:

$$v_{2D} = 0{,}664\frac{pL^4}{EI} - 0{,}366\frac{T_V L^3}{EI} + 0{,}155\frac{T_H L^3}{EI} = 0{,}664\frac{pL^4}{EI} - 0{,}3172\frac{T_1 L^3}{EI} - 0{,}1492\frac{T_2 L^3}{EI}$$

El movimiento horizontal de *D* será igual al giro de *B*, (sometido a las cargas que se indican en la figura 3 a)), multiplicado por la distancia *BD,* más el movimiento horizontal de la ménsula *BD* (figura 3 b)):

$$v_{1D} = 0{,}333\frac{pL^4}{EI} - 0{,}155\frac{T_V L^3}{EI} + 0{,}61\frac{T_H L^3}{EI} = 0{,}333\frac{pL^4}{EI} - 0{,}6058\frac{T_1 L^3}{EI} + 0{,}3217\frac{T_2 L^3}{EI}$$

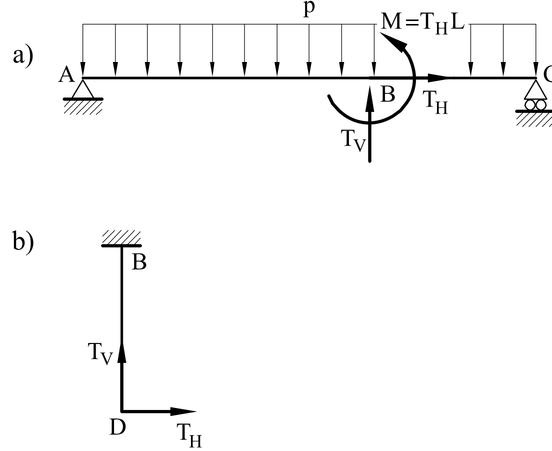


Fig. 3: a) Esquema de fuerzas en la viga ABC
b) Esquema de fuerzas en el voladizo BD

b) Movimientos horizontal y vertical del punto D considerado perteneciente a los tirantes
Utilizando la misma composición de movimientos representada en la figura 3 del problema 9.25, se obtienen los movimientos horizontal y vertical del punto *D*.

$$v_{2D} = 0{,}9\,\Delta_{CD} + 0{,}732\,\Delta_{AD} = 1{,}464\frac{T_1 L}{E\omega} + 1{,}273\frac{T_2 L}{E\omega}$$

$$v_{1D} = -0{,}518\,\Delta_{CD} + 0{,}732\,\Delta_{AD} = 1{,}464\frac{T_1 L}{E\omega} - 0{,}732\frac{T_2 L}{E\omega}$$

Igualando con los movimientos horizontal y vertical halladas anteriormente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$0{,}664\frac{pL^4}{EI} - 0{,}3172\frac{T_1 L^3}{EI} - 0{,}1492\frac{T_2 L^3}{EI} = 1{,}464\frac{T_1 L}{E\omega} + 1{,}273\frac{T_2 L}{E\omega}$$

$$0{,}333\frac{pL^4}{EI} - 0{,}6058\frac{T_1 L^3}{EI} + 0{,}3217\frac{T_2 L^3}{EI} = 1{,}464\frac{T_1 L}{E\omega} - 0{,}732\frac{T_2 L}{E\omega}$$

y particularizando para $\dfrac{I}{L^2\omega} = 0{,}1$ y reagrupando términos

$$0{,}4636\,T_1 + 0{,}2765\,T_2 = 0{,}664\,pL$$

$$0{,}7522\,T_1 - 0{,}3949\,T_2 = 0{,}333\,pL$$

es decir:

$$T_1 = 0{,}906\,pL$$

$$T_2 = 0{,}882\,pL$$

Problema 9.35 *En la estructura de la figura 1, las rectas BS y BT representan tirantes de 70 cm² de sección cada uno y un módulo de elasticidad* $E_t = 2{,}1 \times 10^5\ MPa$.

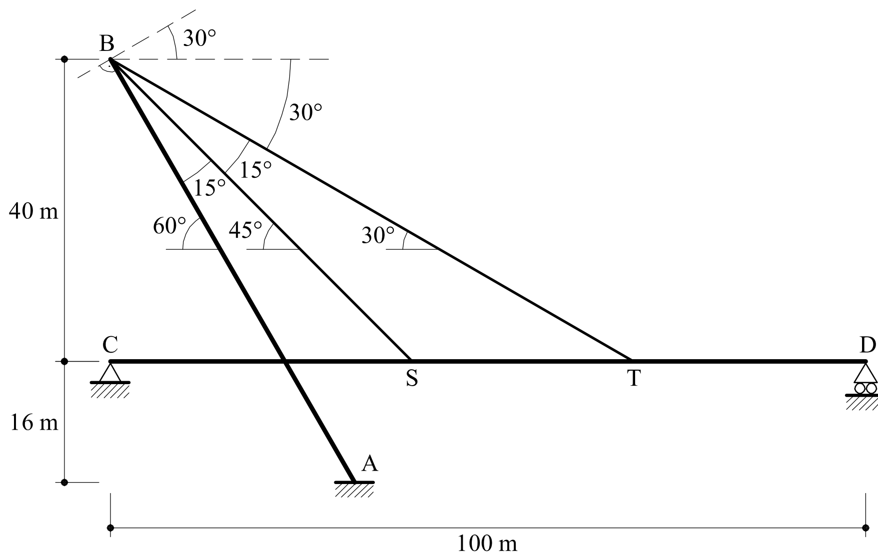


Fig. .1 Estructura correspondiente al problema 9.35

El mástil BA tiene una inercia de 40 m⁴ y se cruza con el tablero, el cual tiene un momento de inercia de valor 0,3 m⁴. Tanto el tablero como el mástil tienen un módulo de elasticidad de 30.000 MPa.

Sobre el tablero actúa una fuerza repartida de valor $p = 75\ kN/m$.

Hallar las leyes de esfuerzos

Solución

Las características mecánicas de las diferentes piezas son las siguientes:

- Mástil

$$EI_m = 30 \times 10^3\, MPa \times 40\, m^4 = 1\,200 \times 10^6\ kN\, m^2$$

- Tablero

$$EI_v = 30 \times 10^3\, MPa \times 0{,}3 m^4 = 9 \times 10^6\ kN\, m^2$$

- Tirantes

$$EA = 2{,}1 \times 10^5\, MPa \times 70\, cm^2 = 1{,}47 \times 10^6\ kN$$

Sea F_1 el esfuerzo axil en *BS* y F_2 el esfuerzo axil en *BT*. En la figura 2 pueden verse las dimensiones y los ángulos de los elementos más característicos de la estructura.

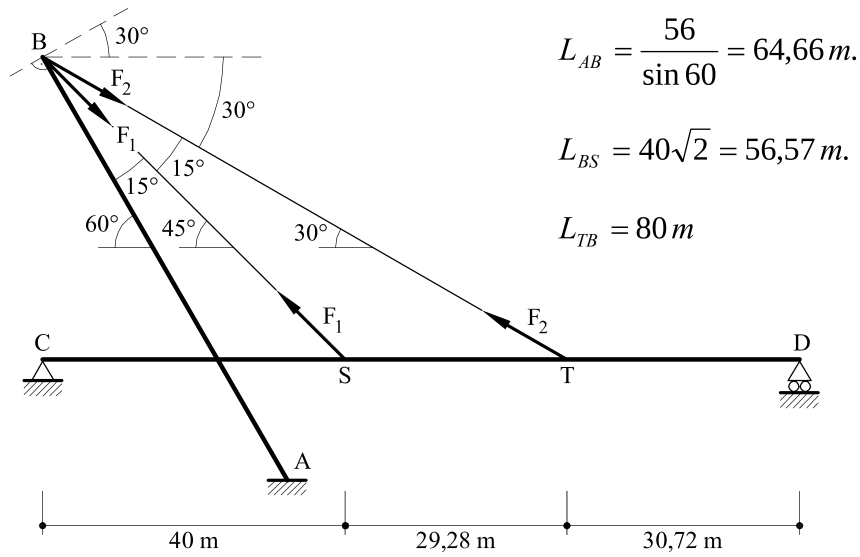


Fig.2. Ángulos y dimensiones.

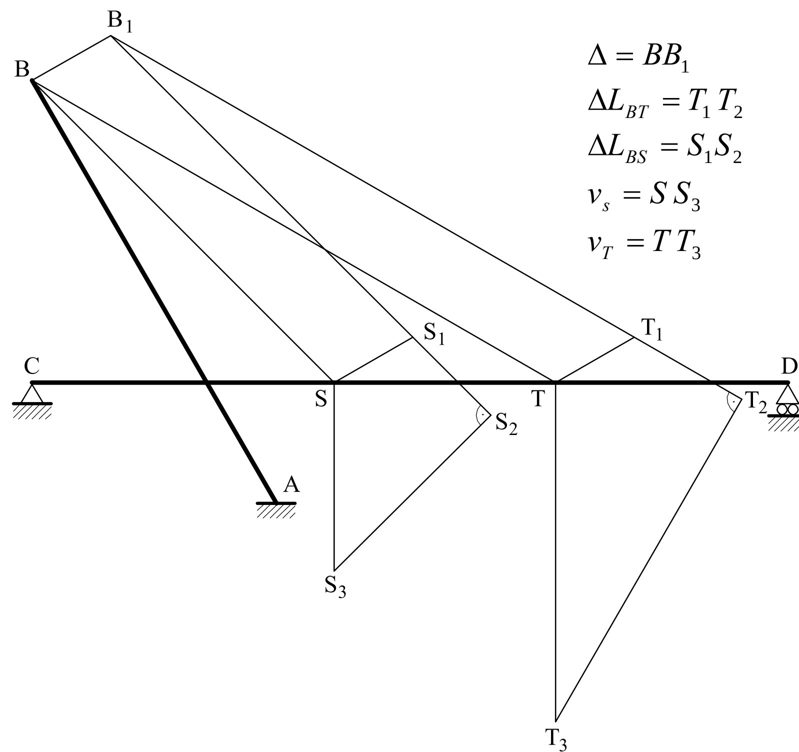


Fig. 3. Movimientos

Si $\Delta = BB_1$, es el movimiento del punto *B*, este movimiento debe ser perpendicular a *AB*. Dado que en *B* actúan las fuerzas T_1 y T_2, el movimiento Δ valdrá

$$\Delta = \frac{F_1 \cos 75 \times L_{AB}^3}{3EI_m} + \frac{F_2 \cos 60 \times L_{AB}^3}{3EI_m} = 19{,}44 \times 10^{-6} F_1 + 37{,}55 \times 10^{-6} F_2$$

En la figura 3 puede verse la composición de movimientos de la estructura. Lógicamente, las incógnitas a determinar son T_1 y T_2. Las dos ecuaciones se obtendrán de imponer igualdad de movimientos en *S* y *T*.

A partir de los movimientos en *S* (figura 3) se obtiene:

$$S_1S_2 + S\,S_1 \sin 15 = S\,S_3 \cos 45$$

Análogamente para el punto *T*

$$T_1T_2 + T\,T_1 \sin 30 = T\,T_3 \cos 60$$

Es decir:

$$\Delta L_{BS} + \Delta \sin 15 = v_s \cos 45$$

$$\Delta L_{BT} + \Delta \sin 30 = v_T \cos 60$$

Y sustituyendo:

$$\frac{F_1 \times 56{,}57}{EA} + (19{,}44\,F_1 + 37{,}55\,F_2) \times 10^6 \sin 15 = v_S \cos 45$$

$$\frac{F_2 \times 80}{EA} + (19{,}44\,F_1 + 37{,}55\,F_2) \times 10^{-6} \sin 30 = v_T \cos 60$$

o sea:

$$v_s = 61{,}54 \times 10^{-6}\,F_1 + 13{,}74 \times 10^{-6}\,F_2$$
$$v_T = 19{,}44 \times 10^{-6}\,F_1 + 146{,}39 \times 10^{-6}\,F_2$$

Por otro lado, aislando la viga *CD* (figura 4)

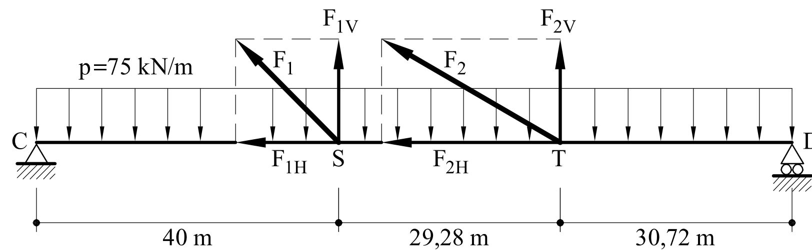


Fig. 4. Fuerzas en la viga

La flecha en *S* y *T* vale, respectivamente:

$$v_s = -1\,508{,}5 \times 10^{-6}\,F_1 - 848{,}4 \times 10^{-6}\,F_2 + 10{,}3333$$

$$v_T = -1199{,}8 \times 10^{-6}\,F_1 - 838{,}8 \times 10^{-6}\,F_2 + 8{,}96264$$

Igualando con los movimientos previamente obtenidos se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$1\,570{,}04\,F_1 + 862{,}14\,F_2 = 10{,}3333 \times 10^6$$

$$1\,219{,}24\,F_1 + 985{,}19\,F_2 = 8{,}96264 \times 10^6$$

Resolviendo el sistema:

$$F_1 = 5\,030\,kN$$

$$F_2 = 2\,973\,kN$$

En las figuras 5,6 y 7 pueden verse representadas las leyes de esfuerzos.

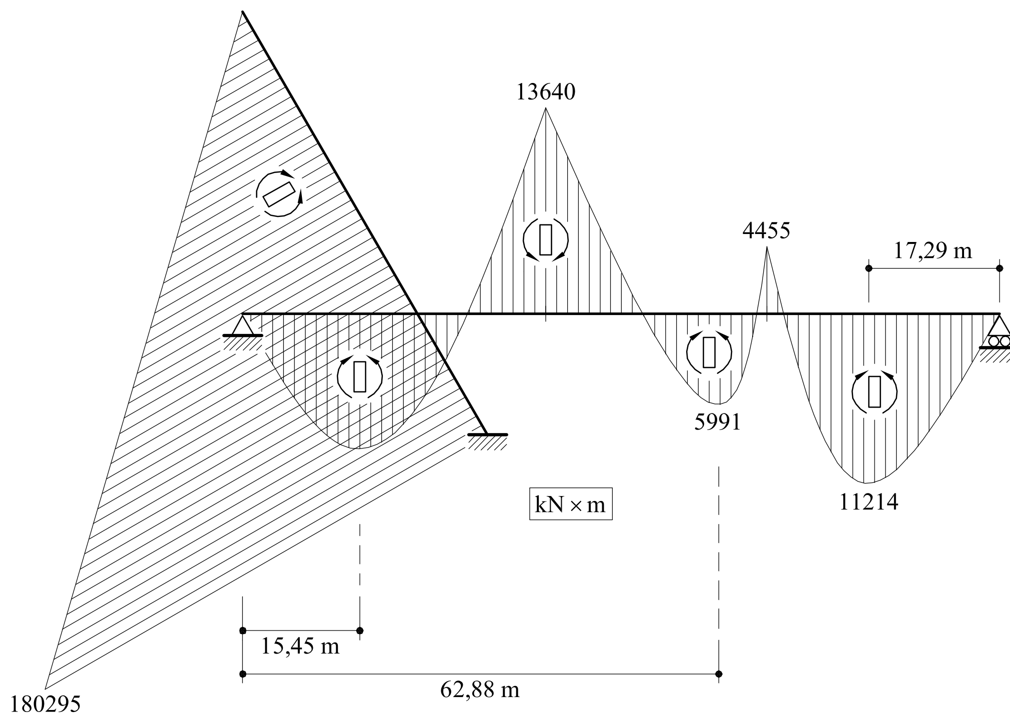


Fig. 5 Ley de momentos flectores

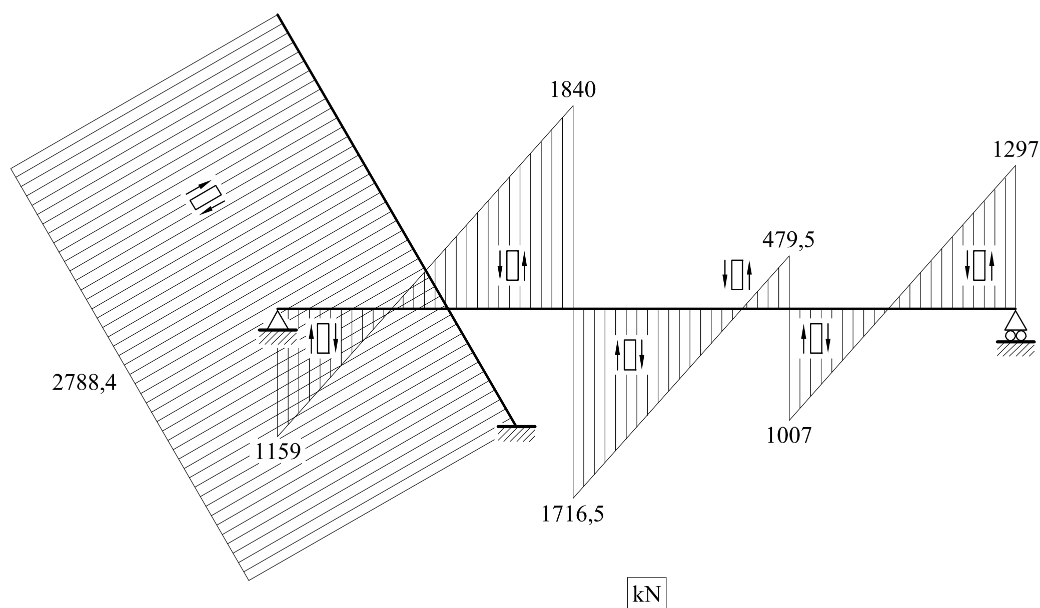


Fig. 6 Ley de esfuerzos cortantes

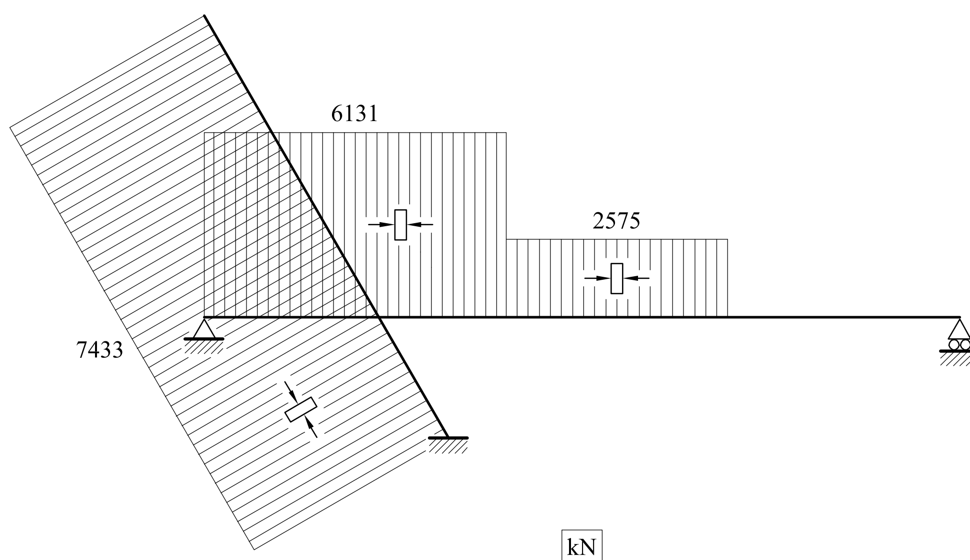


Fig. 7 Ley de esfuerzos axiles

Problema 9.36 *En la estructura de la figura 1, las rectas BC y AB son tirantes de sección* $\omega = 2\,cm^2$. *La viga BD tiene inercia* $I = 10^6\,cm^4$ *y está cargada con una carga uniformemente repartida de valor* $p = 100\,kN/m$.

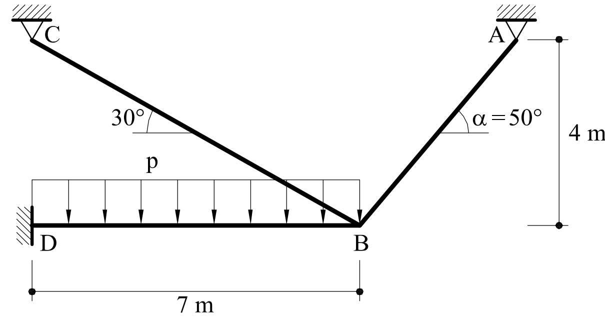


Fig. 1. Estructura correspondiente al problema resuelto 9.36

Hallar las leyes de esfuerzos en todas las piezas de la estructura, así como el movimiento del punto B.

Solución

Sean T_1 y T_2 los esfuerzos en los tirantes *AB* y *CB* respectivamente (figura 2). El movimiento del punto *B* será vertical. En la figura 2 puede verse la composición de movimientos en dicho punto, siendo:

- $BB_1 = v_B$ el movimiento vertical de *B*.
- $BB_2 = \Delta_{BC}$ el alargamiento del tirante *BC*.
- $BB_3 = \Delta_{AB}$ el alargamiento del tirante *AB*.

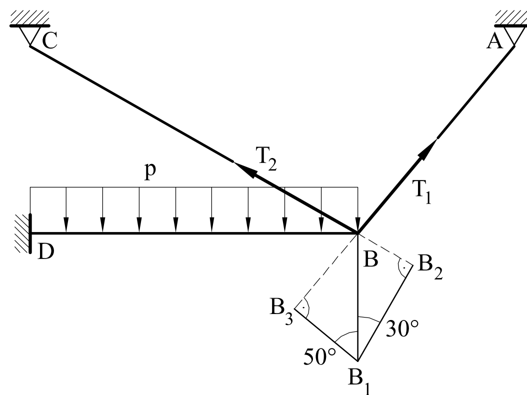


Fig. 2. Movimientos de punto B

Es evidente que

$$\Delta_{BC} = BB_2 = BB_1 \sin 30 = v_B \sin 30 \qquad (1)$$

$$\Delta_{AB} = BB_3 = BB_1 \sin 50 = v_B \sin 50 \qquad (2)$$

Por otro lado,

$$\Delta_{BC} = \frac{T_2 \, \overline{BC}}{E\omega} \qquad\qquad \Delta_{AB} = \frac{T_1 \, \overline{AB}}{E\omega}$$

$$v_B = \frac{p \times 7^4}{8EI} - \frac{\left(T_1 \sin 50 + T_2 \sin 30\right) \times 7^3}{3EI}$$

Introduciendo los valores anteriores en las expresiones (1) y (2) se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$400\,T_2 = -28{,}58\,T_2 - 43{,}79\,T_1 + 15{,}01 \times 10^6$$
$$261{,}08\,T_1 = -43{,}792\,T_2 - 67{,}093\,T_1 + 23 \times 10^6$$

Es decir:

$$T_1 = 28{,}25\,kN$$

$$T_2 = 66{,}4\,kN$$

En las figuras 3, 4 y 5 pueden verse representadas las leyes de esfuerzos.

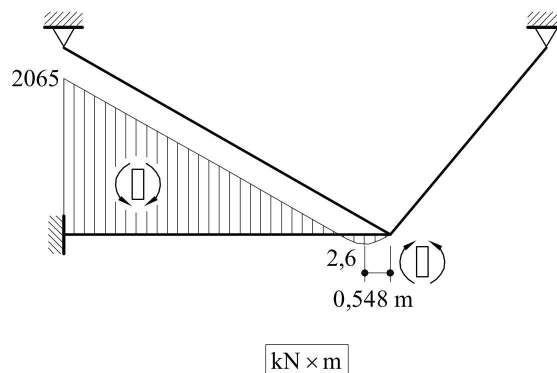


Fig. 3. Ley de momentos flectores.

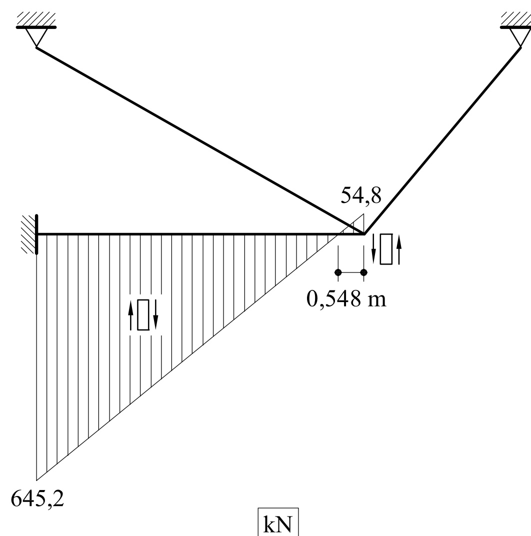


Fig. 4. Ley de esfuerzos cortantes.

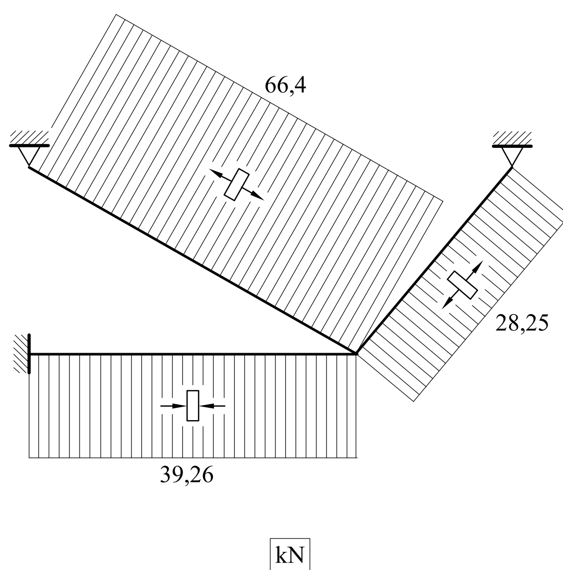


Fig. 5. Ley de esfuerzos axiles.

Problema 9.37 *En la estructura de la figura 1 las piezas AD y A'D' tienen rigidez infinita. Las rectas DC y D'C' son dos tirantes de sección* ω. *Sobre la pieza A'BA actúa una carga uniformemente distribuida de valor* $p = 15\,kN/m$. *La inercia de las piezas A'BA y BC es I.*

a) Determinar el valor de b para que los tirantes no trabajen.
b) Con el valor de b obtenido anteriormente, supóngase que previamente a la introducción de la carga p se da al tirante una tensión previa de $50\,kN$, *introduciendo seguidamente la carga p. Determinar y dibujar las leyes de esfuerzos para el estado final.*

Nota: A excepción de los tirantes, solamente se tendrá en cuenta la deformación por Momento Flector.

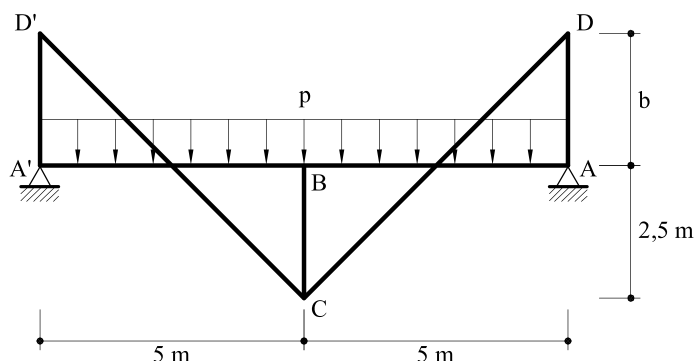


Fig. 1. Estructura correspondiente al problema resuelto 9.37

Solución

a) Para que los tirantes no trabajen, es preciso que su longitud sea la misma antes y después de aplicar las cargas. Además, si los tirantes no trabajan las rectas *A'D'* y *AD* seguirán rectas después de la carga y no tendrán esfuerzos. La deformada será la indicada en la figura 2.

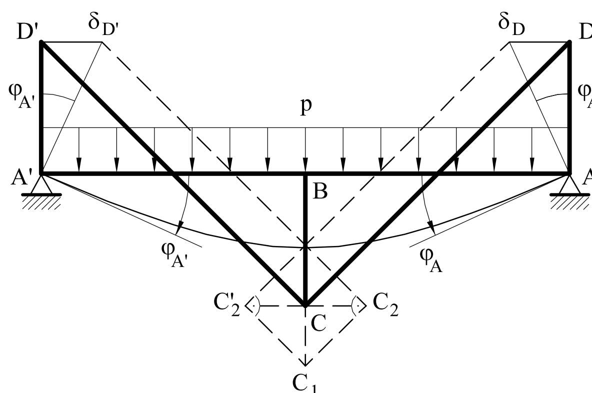


Fig. 2. Deformada

El giro en *A* y *A'* así como la flecha en *B* y *C* serán las correspondientes a una viga biapoyada.

$$\varphi_A = \frac{p \times 10^3}{24 EI}$$

$$v_B = \frac{5p \times 10^4}{384 EI}$$

$$\delta_D = b \varphi_A$$

y como

$$\tan \alpha = \frac{CC_2}{CC_1} = \frac{\delta_D}{v_B} = \frac{b \varphi_A}{v_B} = 0{,}32\, b$$

y también

$$\tan \alpha = \frac{b + 2{,}5}{5}$$

Igualando:

$$b = 4{,}17\, m$$

b) Si se da una tensión previa a los tirantes de *50 kN*, este valor se mantendrá al aplicar las cargas, de acuerdo con lo visto en el apartado anterior. Por lo tanto, las leyes de esfuerzos son inmediatas (figuras 3, 4 y 5).

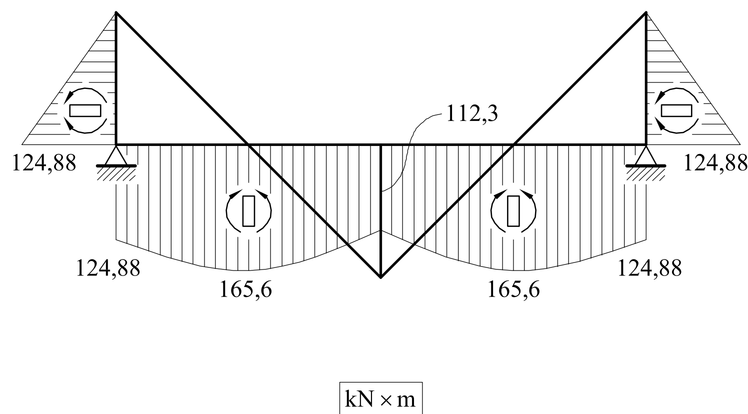


Fig. 3 Ley de momentos flectores.

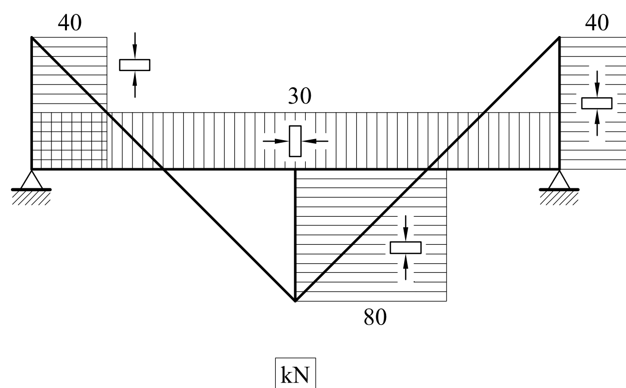


Fig. 4 Ley de esfuerzos axiles.

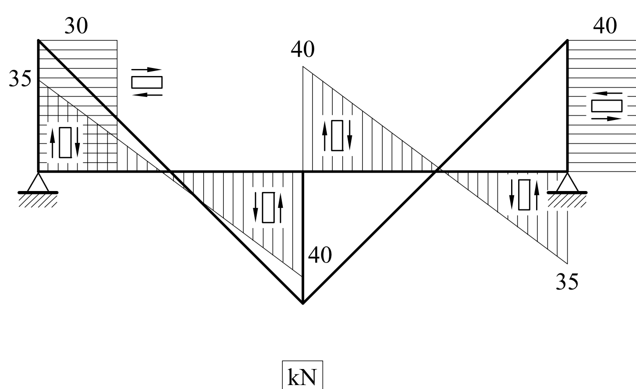


Fig. 5 Ley de esfuerzos cortantes.

Problema 9.38 *En la estructura de la figura 1, las rectas AB, BC y CD representan tres tirantes de igual sección* $\omega = 20\,cm^2$ *y módulo de elasticidad* $E_t = 210\,GPa$. *El resto de la estructura tiene un producto* $EI = 250\,000\,kN \times m^2$.

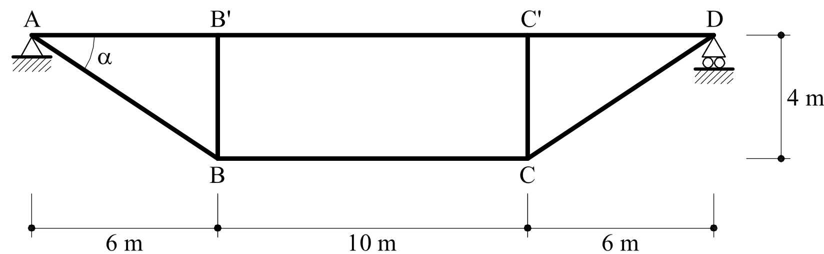


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 9.38

1.) Determinar las leyes de esfuerzos cuando las cargas que actúan son:

- *Carga uniformemente repartida sobre la pieza AD, vertical descendente de valor* $p = 15\,kN/m$
- *Incremento uniforme de temperatura en la pieza AD de valor* $\Delta t = 30^{o}\,C$ *(coeficiente de dilatación lineal* $a = 10^{-5}\,{}^{o}C^{-1}$*).*

2.) Supóngase que la línea quebrada ABCD representa un único cable que desliza libremente sobre los puntos B y C. Determinar las leyes de esfuerzos cuando actúa únicamente la carga uniformemente repartida.

Solución

Sea T_1 el esfuerzo en el tirante *AB* y T_2 el esfuerzo en el tirante *BC*.

Se quitan los tirantes *AB*, *BC* y *CD* sustituyéndolos por los efectos que producen en la estructura (figura 2).

1.)

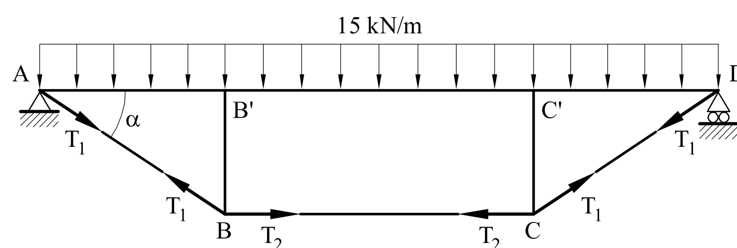


Fig. 2 descomposición de fuerzas en los tirantes.

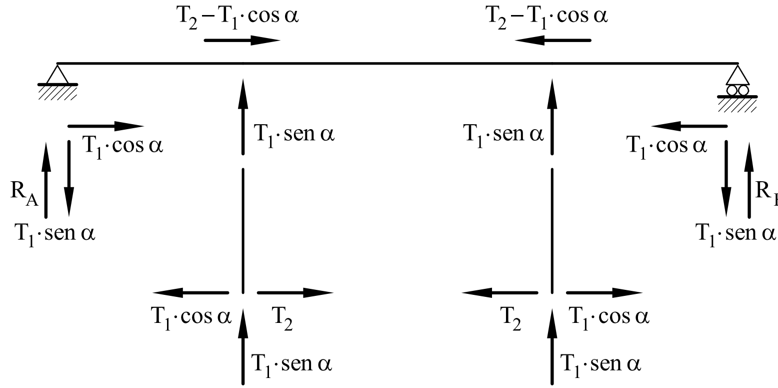


Fig. 3 Descomposición de fuerzas en los tirantes.

El movimiento vertical de *B* valdrá: (sentido descendente positivo)

$$v_B = \frac{34\,800}{EI} - \frac{139{,}78\,T_1}{EI}$$

El movimiento horizontal de *B* se verá afectado por el movimiento horizontal de *B'*, debido a un alargamiento en todo el tablero causado por el incremento de temperatura.

$$u_B = \frac{21{,}33\,T_2 - 17{,}75\,T_1}{EI} + u_{B'} \qquad \text{(positivo hacia la derecha).}$$

La proyección de los desplazamientos sobre la recta *AB* vale:

$$\delta_1 = v_B \sin\alpha + u_B \cos\alpha + 10^{-5} \times 30 \times 6 \times \cos\alpha$$

La proyección de los desplazamientos sobre la recta *CD* es u_D.

$$\delta_2 = u_D$$

Igualando δ_1 al alargamiento del tirante *AB* y δ_2 al alargamiento de la mitad del tirante *BC*. Se obtiene el sistema:

$$u_B = 8{,}533 \times 10^{-5} T_2 - 7{,}1 \times 10^{-5} T_1 + 10^{-5} \times 30 \times 6 = \frac{1}{2}\,\frac{T_2 \cdot L_2}{\omega \cdot E_t}$$

$$v_B \sin\alpha + u_B \cos\alpha + 10^{-5} \times 30 \times 6 \times \cos\alpha = \frac{T_1 L_1}{\omega \cdot E_t}$$

$$\left.\begin{array}{l} 7{,}343 \times 10^{-5} T_2 - 7{,}1 \times 10^{-5} T_1 = -1{,}8 \times 10^{-3} \\ 3{,}8616 \times 10^{-4} T_1 - 7{,}1 \times 10^{-5} T_2 = 0{,}0787 \end{array}\right\}$$

$$T_1 = 243\,kN$$

$$T_2 = 209\,kN$$

En la figura 4 pueden verse representadas las leyes de momentos flectores y esfuerzos cortantes y axiles.

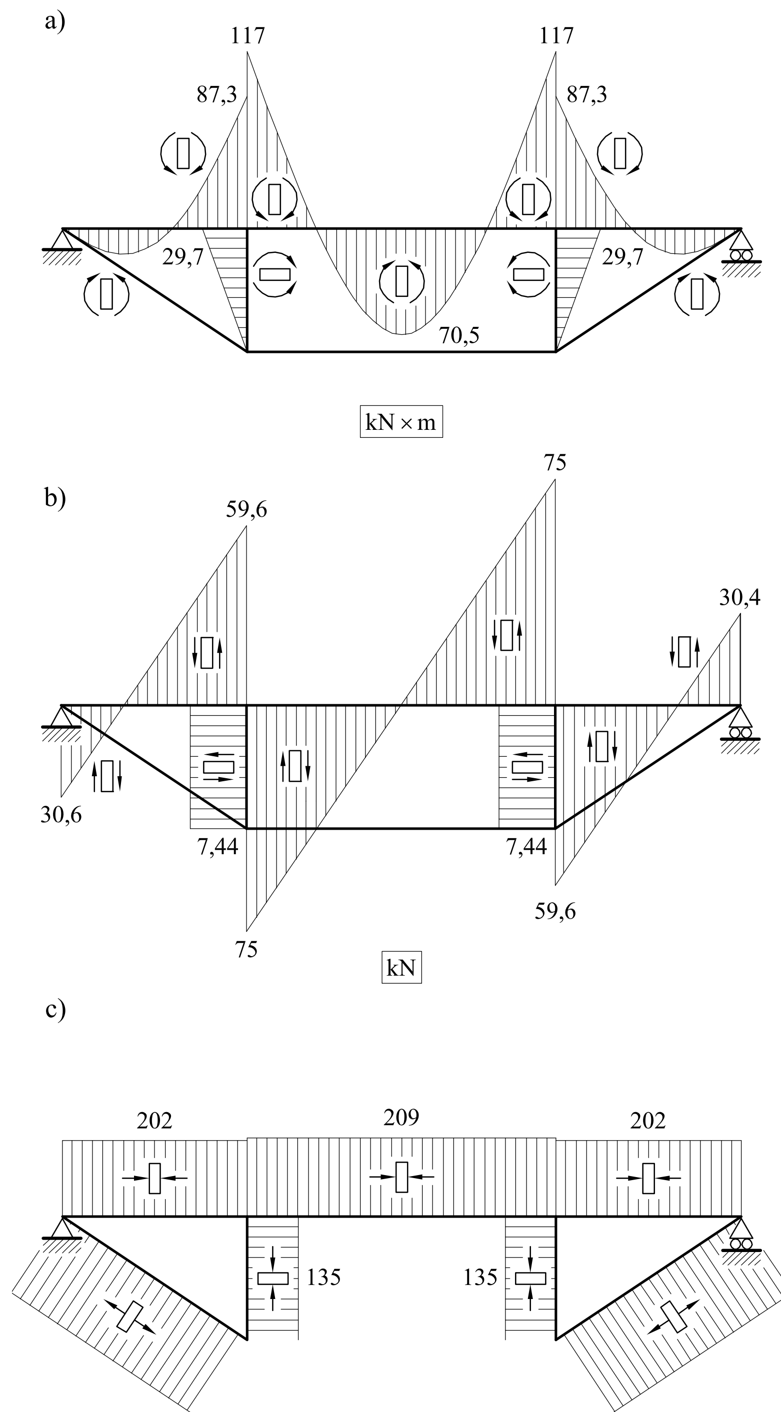


Fig. 4 Leyes de esfuerzos: a)Momentos flectores.
b)Esfuerzos cortantes.
c)Esfuerzos axiles.

2.)

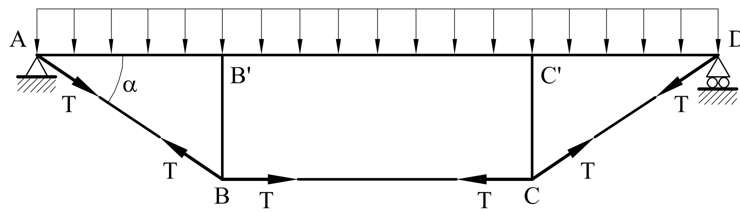


Fig. 5 Descomposición de fuerzas en los tirantes.

En base a los resultados obtenidos en el apartado 1, y teniendo en cuenta que $T_1 = T_2 = T$

$$v_B = \frac{34\,800}{EI} - \frac{139{,}78\,T}{EI} = 0{,}1392 - 5{,}59 \times 10^{-4}\,T$$

$$u_B = \frac{21{,}33\,T - 17{,}75\,T}{EI} = \frac{3{,}58\,T}{EI} = 1{,}432 \times 10^{-5}\,T$$

$$\delta_1 = v_B \sin\alpha + u_B \cos\alpha = \frac{T_1 \cdot L_1}{\omega \cdot E_t}$$

De donde se obtiene, $T = 245\,kN$

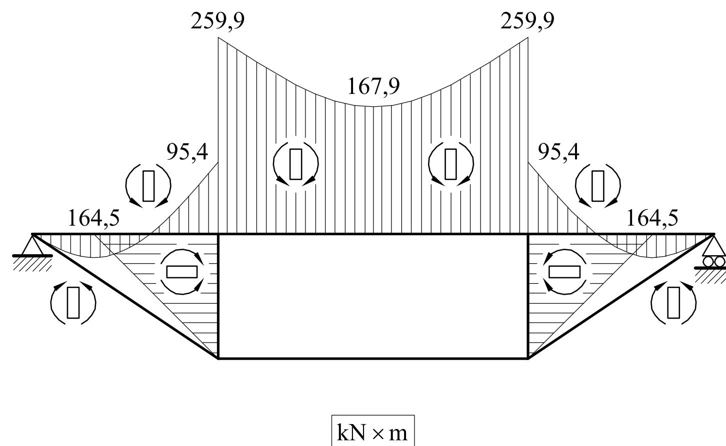


Fig. 6 Ley de momentos flectores.

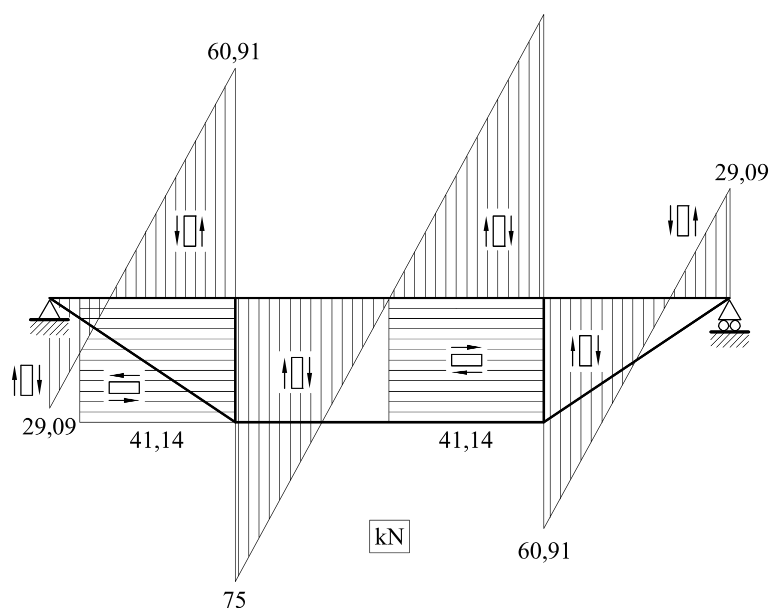


Fig. 7 Ley de esfuerzos cortantes.

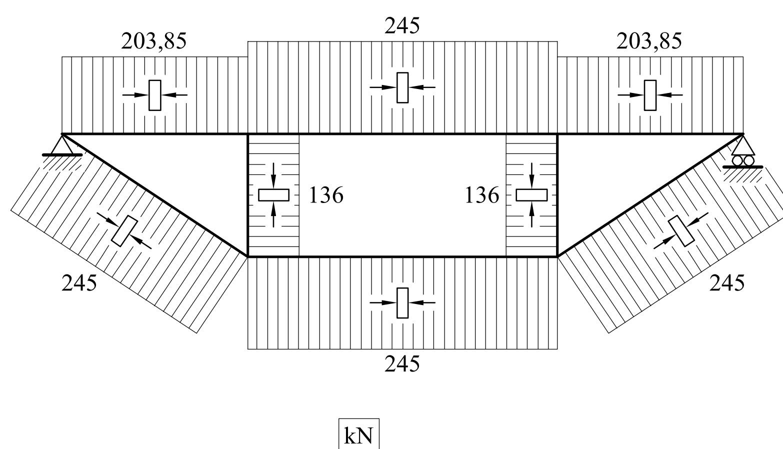


Fig. 8 Ley de esfuerzos axiles

Capítulo 10:
Vigas continuas

Problema 10.1 *Determinar las leyes de esfuerzos de la estructura representada en la figura 1.*

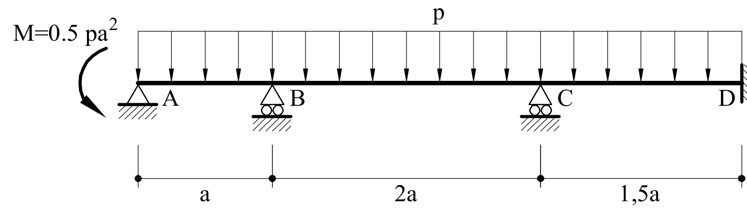


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 10.1

Solución

Se descompone la pieza en las vigas simples que se indican en la figura 2.

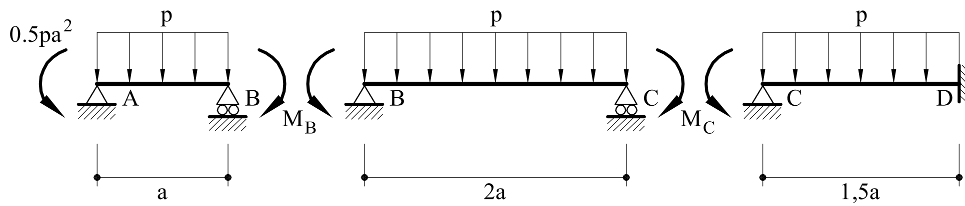


Fig. 2 Descomposición en vigas simples

Las incógnitas a determinar son los momentos en los apoyos intermedios M_B y M_C.

- Giro en el apoyo *B*:

  - Giro en *B* de la pieza *AB*

$$\varphi_B^{AB} = -\frac{0{,}5\,p\,a^2 a}{6EI} - \frac{M_B\,a}{3EI} + \frac{p\,a^3}{24EI}$$

  - Giro en *B* de la pieza *BC*

$$\varphi_B^{BC} = \frac{M_B\,2a}{3EI} + \frac{M_C\,2a}{6EI} - \frac{p(2a)^3}{24EI}$$

Igualando ambos giros se obtiene la primera ecuación

$$M_B + 0{,}3333 M_C = 0{,}2917\,p\,a^2$$

- Giro en el apoyo *C*

  - Giro en *C* de la pieza *BC*

$$\varphi_C^{BC} = -\frac{M_B\,2a}{6EI} - \frac{M_C\,2a}{3EI} + \frac{p(2a)^3}{24EI}$$

- Giro en *C* de la pieza *CD*

$$\varphi_C^{CD} = \frac{M_C \, 1{,}5\, a}{4\, E\, I} - \frac{p\left(1{,}5\, a\right)^3}{48\, E\, I}$$

Igualando ambos giros

$$0{,}3333\, M_B + 1{,}0417\, M_C = 0{,}4036\, p\, a^2$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$M_B = 0{,}182\, p\, a^2$$
$$M_C = 0{,}3292\, p\, a^2$$

En la figura 3 se dibujan las leyes de esfuerzos.

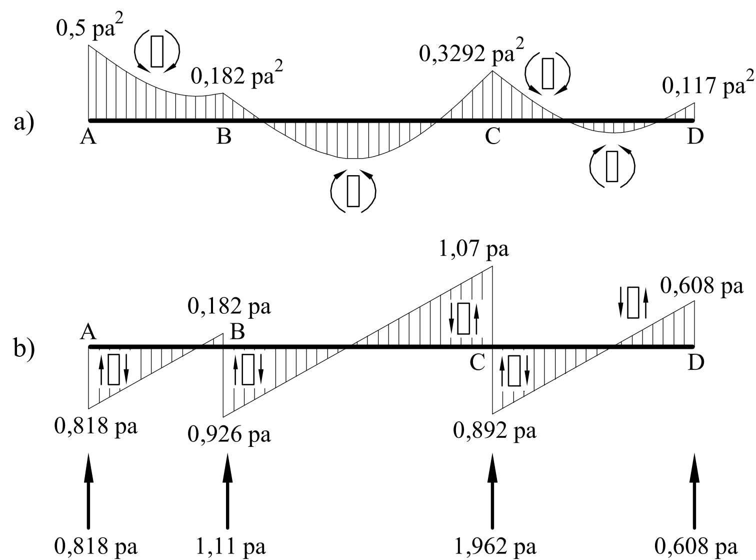


Fig. 3: a) Ley de momentos flectores.
b) Ley de esfuerzos cortantes y reacciones.

Problema 10.2 *La viga de la figura 1 no tiene cargas externas, pero sufre un giro en el empotramiento de valor* $\overline{\varphi}_A$. *Hallar:*

- *Giro en B*
- *Momento en A*
- *Momento en B*

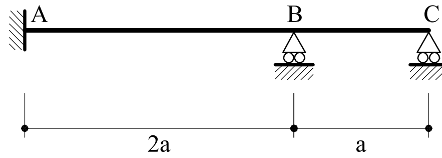


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 10.2

Solución

Se tomarán como incógnitas hiperestáticas el momento en *A* y el momento flector en *B*.
Se descompone la viga continua en dos vigas simples (figura 2)

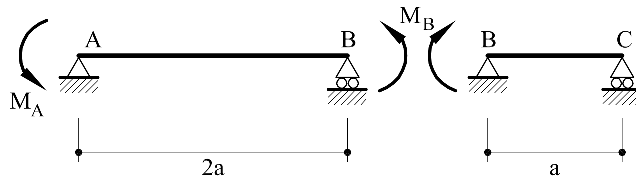


Fig.2 Descomposición en vigas simples

El giro en *A* valdrá

$$\varphi_A = \overline{\varphi}_A = \frac{M_A\,2a}{3EI} - \frac{M_B\,2a}{6EI}$$

Asimismo, igualando el giro en *B* de las piezas *AB* y *BC* se obtiene:

$$-\frac{M_A\,2a}{6EI} + \frac{M_B\,2a}{3EI} = -\frac{M_B\,a}{3EI}$$

y resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$M_A = 1{,}8\,\frac{EI}{a}\,\overline{\varphi}_A$$

$$M_B = 0{,}6\,\frac{EI}{a}\,\overline{\varphi}_A$$

Por otra parte,

$$\varphi_B = -\frac{M_B\, a}{3EI} = -0{,}2\,\overline{\varphi}_A$$

Problema 10.3 *En la viga continua de la figura 1, hallar las leyes de esfuerzos.*

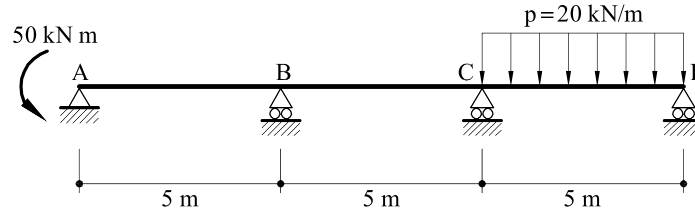


Fig. 1 Viga continua correspondiente al problema 10.3

Solución

Se descompone la estructura en tres vigas simples (figura 2)

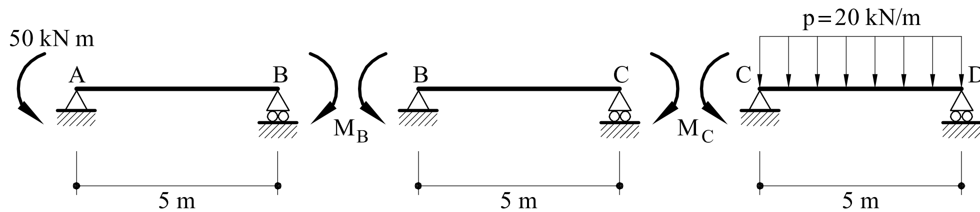


Fig. 2 Descomposición en vigas simples

El giro en *B* de la pieza *AB* valdrá

$$\varphi_B^{AB} = -\frac{50 \times 5}{6EI} - \frac{M_B 5}{3EI}$$

El giro en *B* de la pieza *BC* valdrá

$$\varphi_B^{BC} = \frac{M_B 5}{3EI} + \frac{M_C 5}{6EI}$$

Igualando ambos giros se obtiene la primera ecuación

$$4M_B + M_C = -50$$

Por otro lado, el giro en *C* de la pieza *BC* valdrá

$$\varphi_C^{BC} = -\frac{M_B 5}{6EI} - \frac{M_C 5}{3EI}$$

El giro en *C* de la pieza *CD* vale

$$\varphi_C^{CD} = \frac{M_C 5}{3EI} - \frac{20 \times 5^3}{24EI}$$

Igualando ambos giros se obtiene la segunda ecuación

$$M_B + 4M_C = 125$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$M_B = -21{,}7 \; kNm$$
$$M_C = 36{,}7 \; kNm$$

En la figura 3 pueden verse dibujadas las leyes de esfuerzos

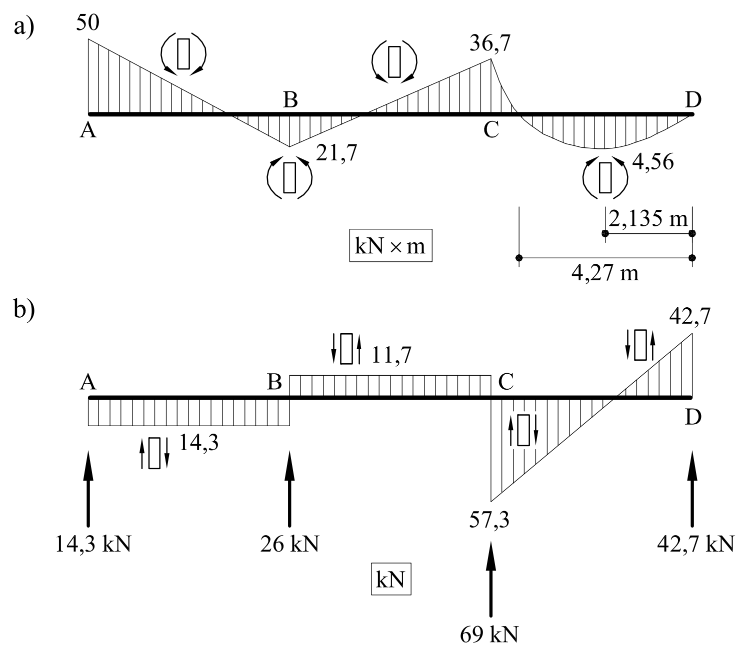


Fig.3 a) Ley de momentos flectores.
b) Ley de esfuerzos cortantes y reacciones.

Problema 10.4 *En la viga de la figura 1 se aplica un momento externo M en B de forma que el giro valga* $\varphi_B = \overline{\varphi}$*. Determinar en función de* $\overline{\varphi}$ *el valor de M y dibujar la ley de momentos flectores.*

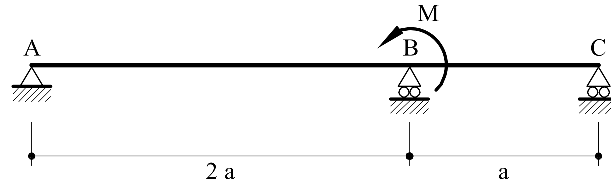


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 10. 4

Solución

Se descompone la estructura en dos vigas simples (figura 2)

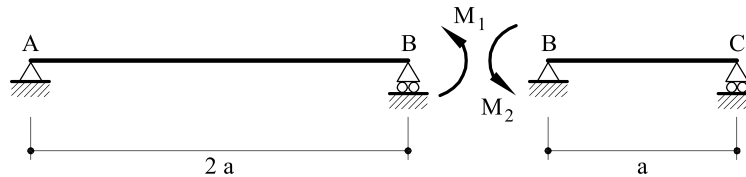


Fig. 2 Descomposición en vigas simples.

El giro en *B* de la pieza *AB* vale

$$\varphi_B = \frac{M_1 2a}{3EI}$$

El giro en *B* de la pieza *BC* vale

$$\varphi_B = \frac{M_2\, a}{3EI}$$

Igualando y teniendo en cuenta que $M_1 + M_2 = M$ se obtiene

$$M_1 = M/3$$

$$M_2 = 2M/3$$

y por lo tanto:

$$\overline{\varphi} = \frac{(M/3)2a}{3EI} = \frac{2\,Ma}{9\,EI}$$

y despejando *M*

$$M = \frac{9\,EI}{2\,a}\,\bar{\varphi}$$

En la figura 3 puede verse representada la ley de momentos.

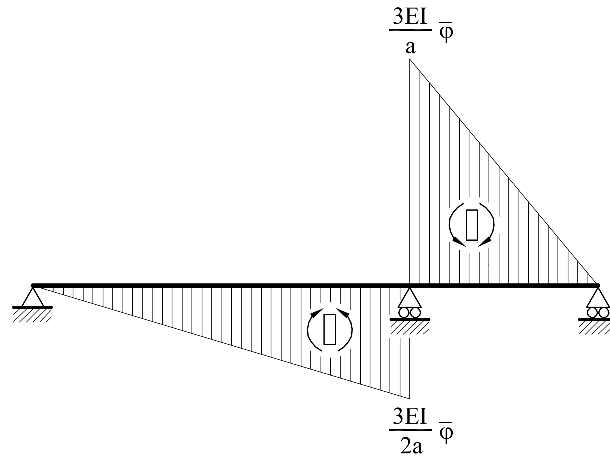


Fig. 3 Ley de momentos flectores

Problema 10.5 *Determinar las leyes de esfuerzos y reacciones en la viga continua que se acota en la figura 1.*

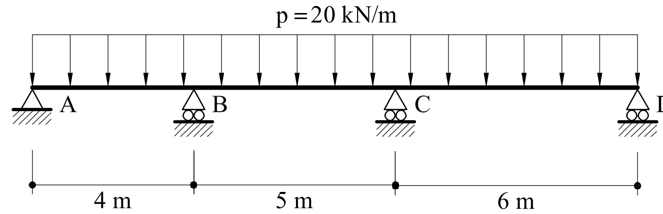


Fig. 1 Viga continua correspondiente al problema 10.5

Solución

Se descompone la estructura en vigas simples (figura 2) y se igualan giros en *B* y *C*.

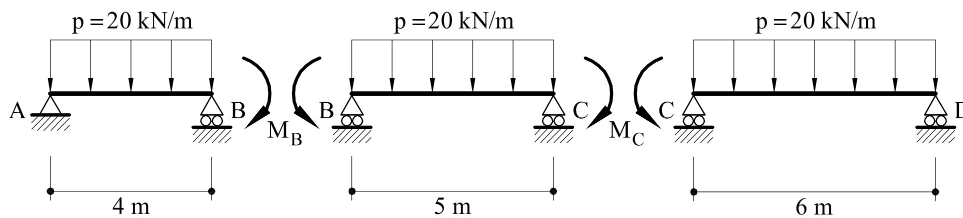


Fig. 2 Descomposición en vigas simples

Los giros se escribirán

$$\varphi_B^{AB} = \frac{20\times(4)^3}{24EI} - \frac{M_B\cdot 4}{3EI} = \frac{1}{EI}(53{,}3333 - 1{,}3333M_B)$$

$$\varphi_B^{BC} = -\frac{20\times 5^3}{24EI} + \frac{M_B\cdot 5}{3EI} + \frac{M_C\cdot 5}{6EI} = \frac{1}{EI}(-104{,}1666 + 1{,}6667M_B + 0{,}8333M_C)$$

También puede escribirse

$$\varphi_B^{AB} = \frac{1}{3EI}(160 - 4M_B)$$

$$\varphi_B^{BC} = \frac{1}{3EI}(-312{,}5 + 5M_B + 2{,}5M_C)$$

Igualando:

$$472{,}5 = 9M_B + 2{,}5M_C$$

$$\varphi_C^{BC} = \frac{20 \times 5^3}{24EI} - \frac{M_B \cdot 5}{6EI} - \frac{M_C \cdot 5}{3EI} = \frac{1}{3EI}\left(312{,}5 - 2{,}5M_B - 5M_C\right)$$

$$\varphi_C^{CD} = -\frac{20 \times 6^3}{24EI} + \frac{M_C \cdot 6}{3EI} = \frac{1}{3EI}\left(-540 + 6M_C\right)$$

Igualando:

$$852{,}5 = 2{,}5M_B + 11M_C$$

Resolviendo:

$$M_B = 33{,}06\, kN \times m$$

$$M_C = 70\, kN \times m$$

En la figura 3 pueden verse dibujadas las leyes de momentos.

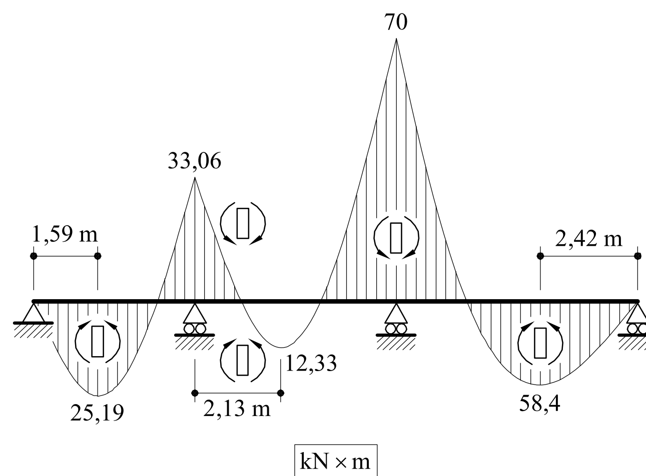


Fig. 3 Ley de momentos flectores

Problema 10.6 *Determinar las reaccione y los momentos flectores en las vigas contínuas representadas en la figura 1*

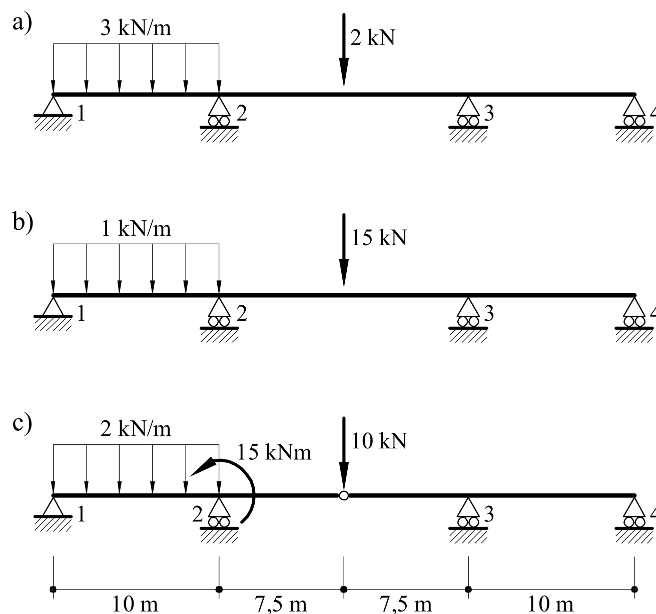


Fig. 1 Vigas correspondientes al problema 10.6

Solución

En la figura 2 puede verse dibujada la ley de momentos flectores y las reacciones

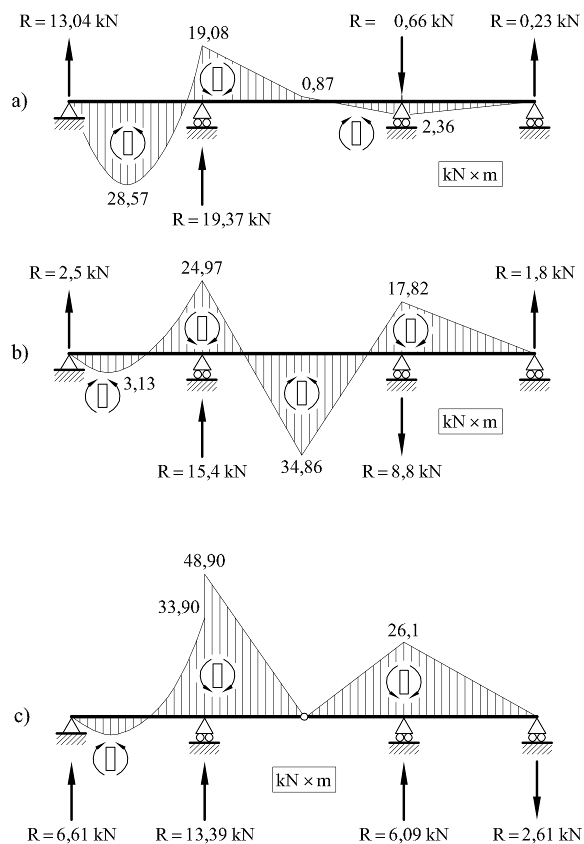


Fig. 2 Leyes de momentos flectores

♣**Problema 10.7** *De la estructura de la figura 1 hallar:*

1.Ley de esfuerzos cortantes.
2. Ley de momentos flectores.

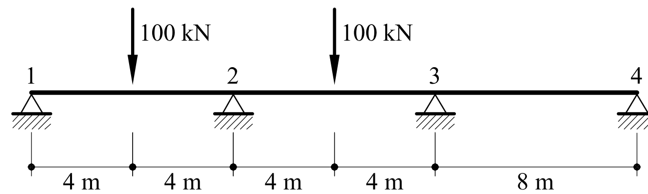


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 10.7

Solución

En la figura 2 pueden verse representadas las leyes de esfuerzos.

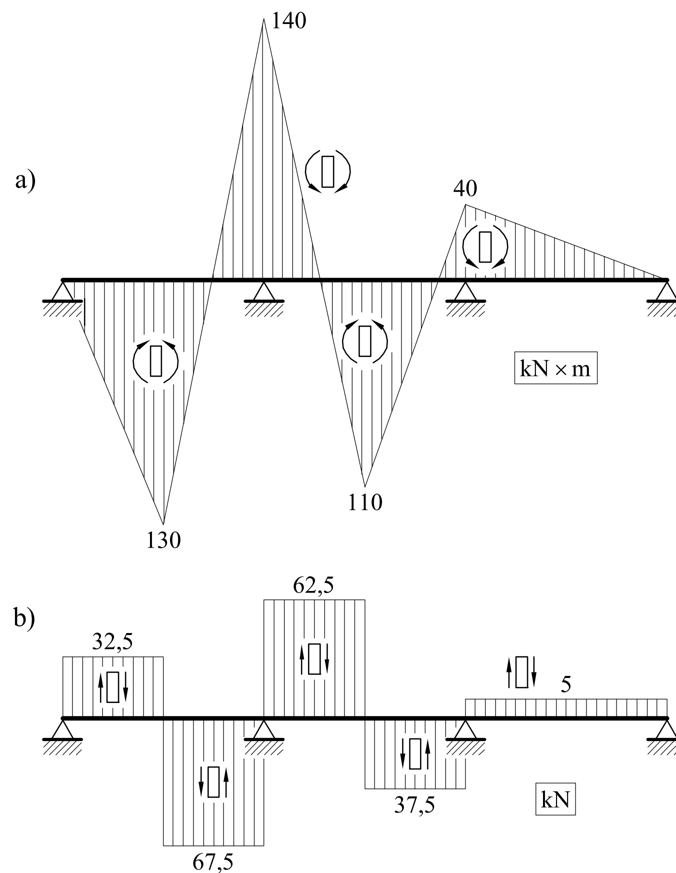


Fig .2 Leyes de esfuerzos: a)Ley de esfuerzos cortantes. b)Ley de momentos flectores.

Problema 10.8 *En la viga de la figura 1, la recta DC representa un tirante de sección* $\omega = 18\ I/L^2$ *. Toda la viga se halla sometida a una carga uniformemente distribuida por unidad de longitud de valor* p *. Se desea obtener el esfuerzo axil en el tirante.*

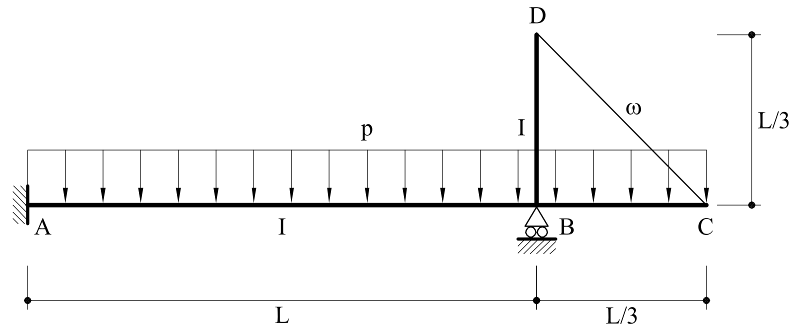


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 10.8

Solución

Para determinar el esfuerzo axil en el tirante, es irrelevante el valor del giro en *B*, por lo que puede suponerse que es nulo (figura 2)

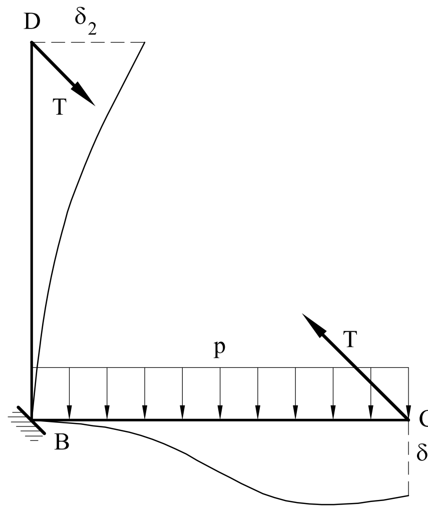


Fig. 2 Subestructura DBC

La flecha δ_2 valdrá (figura 2)

$$\delta_2 = \frac{T\sqrt{2}}{2}\frac{(L/3)^3}{3EI}$$

y la flecha δ_1

$$\delta_1 = \frac{p(L/3)^4}{8EI} - \frac{T\sqrt{2}}{2}\frac{(L/3)^3}{3EI}$$

El alejamiento de los puntos D y C valdrá

$$\Delta_{DC} = (\delta_1 - \delta_2)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(L/3)^3}{EI}\left[\frac{P(L/3)}{8} - \frac{T\sqrt{2}}{3}\right]\frac{\sqrt{2}}{2}$$

El alargamiento del tirante valdrá

$$\Delta_{DC} = \frac{T(L/3)\sqrt{2}}{E\omega}$$

Igualando ambos alargamientos se obtiene

$$T = 0{,}02832\, pL$$

Problema 10.9 *Obtener las leyes de esfuerzos y la deformada de la viga contínua de dos vanos de la figura 1. La viga es de sección constante e igual en ambos vanos.*

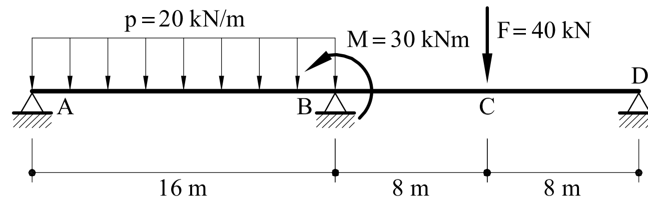


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 10.9

Solución

Se descompone la pieza en vigas simples (figura 2)

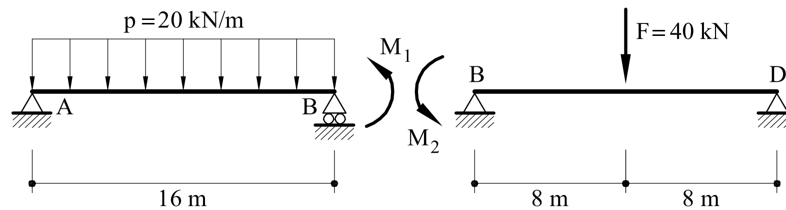


Fig. 2 Descomposición en vigas simples

Para determinar M_1 y M_2 se igualarán giros en B, teniendo presente además que $M_1 + M_2 = 30 \ kN\,m$

$$\varphi_B^{AB} = \frac{M_1 \times 16}{3EI} + \frac{20 \times 16^3}{24EI}$$

$$\varphi_B^{BD} = \frac{M_2 \times 16}{3EI} - \frac{40 \times 16^2}{16EI}$$

Igualando se obtiene:

$$M_1 - M_2 = -760$$

y como $M_1 + M_2 = 30$, resulta:

$$M_1 = -365 \, kN\,m$$
$$M_2 = 395 \, kN\,m$$

En la figura 3 puede verse representada la ley de momentos flectores.

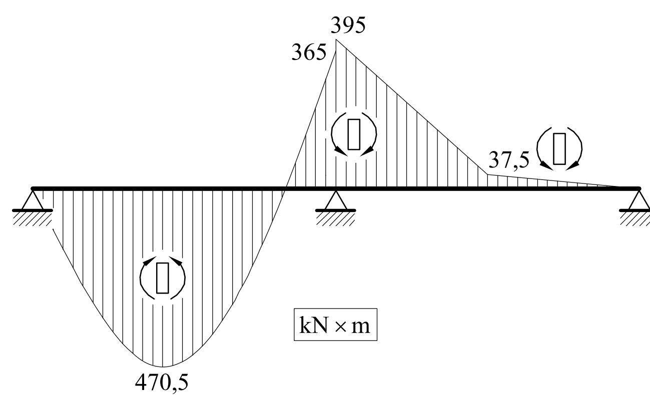


Fig. 3 Leyes de momentos flectores

Problema 10.10 *Dada la viga continua de la figura 1, se pide hallar y dibujar las leyes de momentos flectores y de esfuerzos cortantes.*

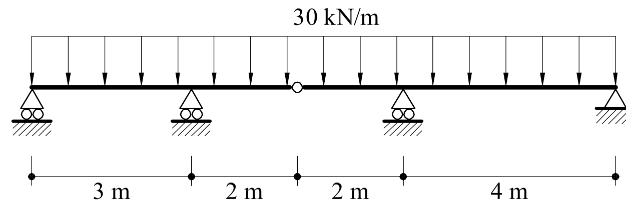


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 10.10

Solución

Se corta la viga por el punto C introduciéndose el cortante hiperestático F (figura 2). El valor de F se obtendrá igualando las flechas del punto C a la izquierda y a la derecha. Tomando positivas las flechas en sentido ascendente:

$$EI\,\upsilon_c^- = \frac{F\times 2^3}{3} - \frac{30\times 2^4}{8} + \frac{30\times 3^3}{24}\times 2 - \frac{(60-2F)\times 3}{3}\times 2$$

$$EI\,\upsilon_c^+ = -\frac{F\times 2^3}{3} - \frac{30\times 2^4}{8} + \frac{30\times 4^3}{24}\times 2 - \frac{(60+2F)\times 4}{3}\times 2$$

Igualando ambas flechas se obtiene el valor del cortante F

$$F = 3{,}58\ kN$$

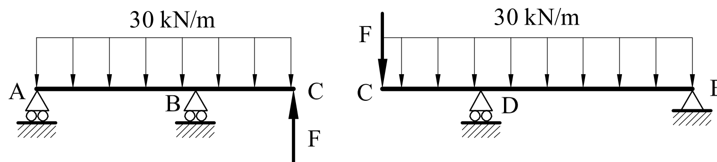


Fig. 2 Corte por C y cortante hiperestático

Conocido este valor pueden hallarse las leyes de momentos flectores y esfuerzos cortantes (figuras 3 y 4).

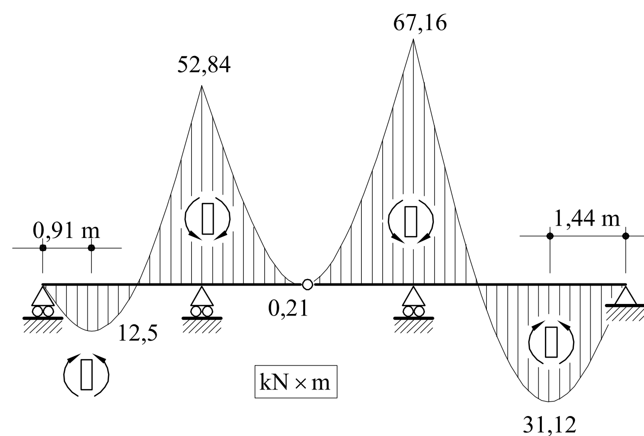


Fig. 3 Ley de momentos flectores

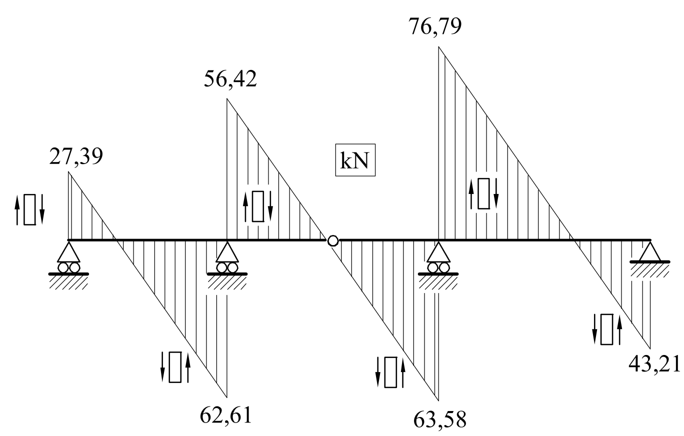


Fig. 4 Ley de esfuerzos cortantes

Problema 10.11 *En la viga continua de la figura 1 se desea hallar la ley de momentos flectores.*

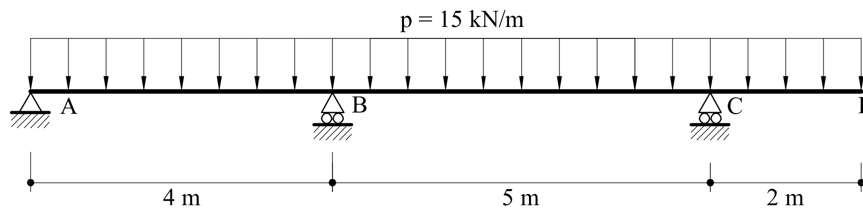


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 10.11

Solución

Se tomará como incógnita hiperestática el momento flector en el punto B. Para ello, se sustituye el voladizo CD por un momento de $30\,kN\,m$. Asimismo, se separa la viga ABC en dos vigas simples (figura 2). El valor del momento M se obtendrá de igualar los giros a izquierda y derecha de B.

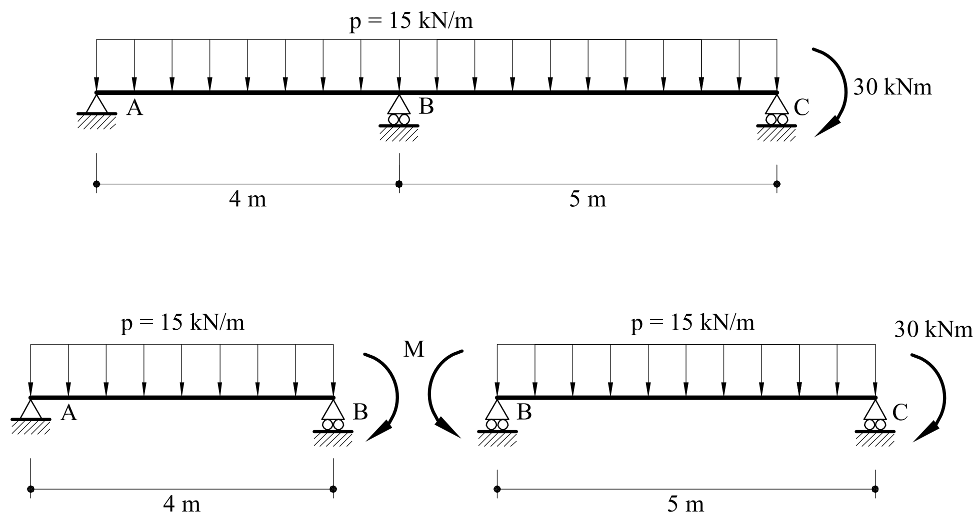


Fig. 2 Descomposición en vigas simples

$$\varphi_B^- = \frac{15 \times 4^3}{24\,EI} - \frac{4\,M}{3\,EI}$$

$$\varphi_B^+ = -\frac{15 \times 5^3}{24\,EI} + \frac{5\,M}{3} + \frac{30 \times 5}{6}$$

Igualando:

$$M = 31{,}04\,kN\,m$$

En la figura 3 puede verse representada la ley de momentos flectores

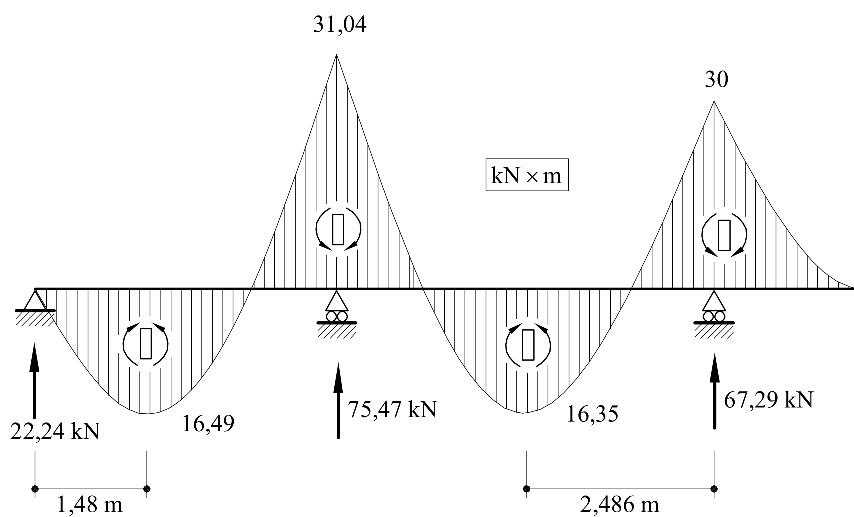


Fig. 3 Ley de momentos flectores

Problema 10.12 *En la viga continua de la figura 1, hallar las leyes de momentos flectores y de esfuerzos cortantes, así como las reacciones. Hallar asimismo la flecha del punto A.*

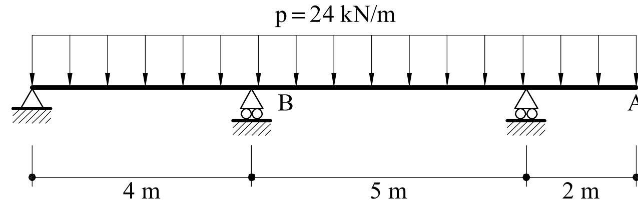


Fig. 1. Viga continua correspondiente al problema 10.12

Solución

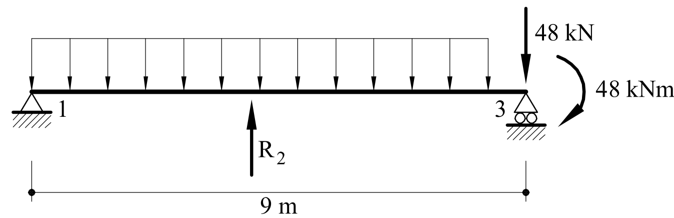


Fig. 2. Viga isostática base

Se tomará como incógnita hiperestática la reacción del apoyo 2. Para ello, se sustituye dicho apoyo por una fuerza R_2.
La flecha del punto 2 valdrá:

$$\delta_2 = \frac{48 \cdot 9}{6EI}(9-5) \cdot \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^2\right] + \frac{R_2 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 4}{6EI}\left(1 - \left(\frac{5}{9}\right)^2 - \left(\frac{4}{9}\right)^2\right) - \frac{24 \cdot 4}{24EI}\left(4^3 - 2 \cdot 9 \cdot 4^2 + 9^3\right) = 0$$

$$\frac{2\,080}{9EI} + \frac{400}{27EI} R_2 - \frac{2\,020}{EI} = 0$$

$$R_2 = 120{,}75\, kN$$

y por equilibrio:

$$R_1 + R_2 + R_3 = 24 \times 11$$

$$R_2 \cdot 4 + R_3 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 11^2 \cdot 24 = 0$$

$$R_3 = 107{,}63 \;\; kN$$

$$R_1 = 35{,}62\,kN$$

En la figura 3 puede verse representada la ley de momentos flectores y de esfuerzos cortantes.

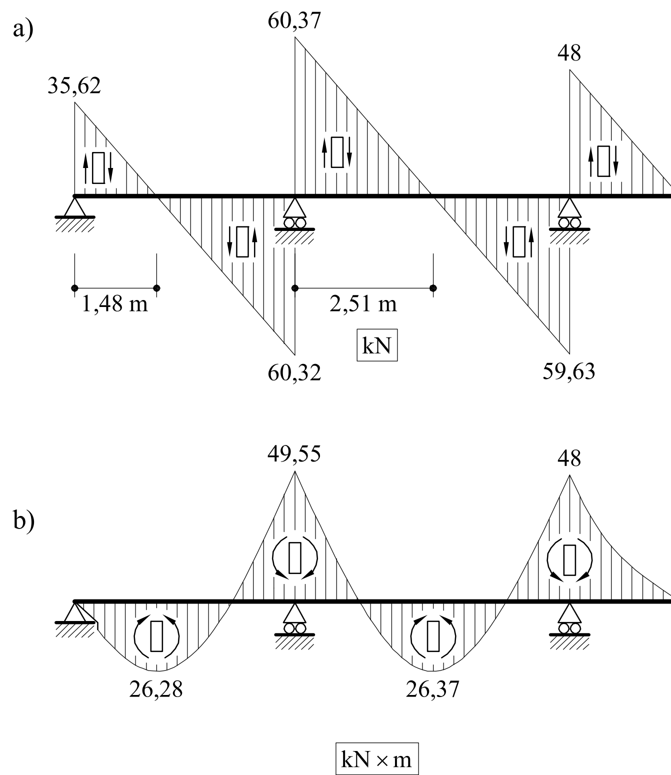


Fig.3. a) Ley de esfuerzos cortantes, b) Ley de momentos flectores.

El giro en el punto 3 valdrá (sentido horario positivo):

$$\varphi_3 = \frac{M_2 \cdot 5}{6EI} + \frac{48 \cdot 5}{3EI} - \frac{24 \cdot 5^3}{24EI} = -\frac{3{,}708}{EI}$$

El desplazamiento vertical en el punto *A* valdrá:

$$\delta_{2A} = \varphi_3 \cdot 2 + \frac{24 \cdot 2^4}{8EI} = \frac{40{,}584}{EI}$$

Problema 10.13 *Determinar las reacciones, leyes de momentos flectores y leyes de esfuerzos cortantes de la estructura que se acota en la figura 1. Hallar también el desplazamiento vertical del punto A.*

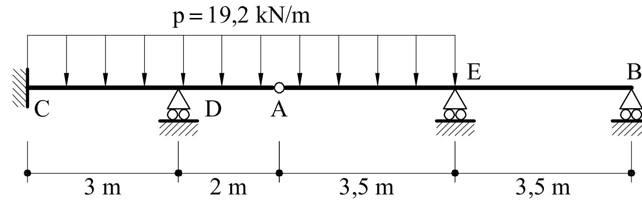


Fig. 1. Viga continua correspondiente al problema 10.13

Solución

La viga se descompone en las dos vigas simples representadas en la figura 2.

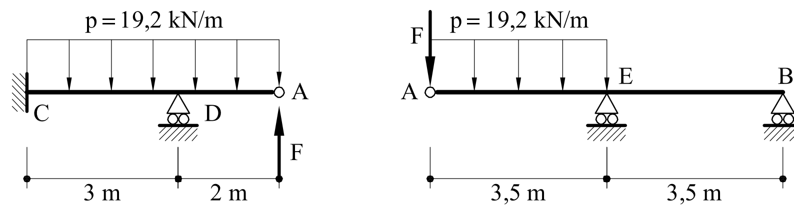


Fig. 2. Descomposición en vigas simples

El movimiento vertical de *A* de la pieza *CDA* vale:

$$v_A^- = 2\varphi_D + \frac{F\times 2^3}{3EI} - \frac{p\times 2^4}{8EI} = 2\varphi_D + 2{,}667\frac{F}{EI} - \frac{38{,}4}{EI}$$

y el giro en *D* vale:

$$\varphi_D = \frac{\left(2F - 2p\right)\times 3}{4EI} + \frac{p\times 3^3}{48EI} = 1{,}5\frac{F}{EI} - \frac{18}{EI}$$

Es decir, sustituyendo en v_A^-

$$v_A^- = 5{,}6667\frac{F}{EI} - \frac{74{,}4}{EI}$$

De forma análoga el movimiento vertical de *A* de la viga *AEB* vale:

$$v_A^+ = -\frac{F\times 3{,}5^3}{3EI} - \frac{p\times 3{,}5^4}{8EI} - 3{,}5\varphi_E = -3{,}5\varphi_E - 14{,}29\frac{F}{EI} - \frac{360{,}15}{EI}$$

El giro en *E* vale:

$$\varphi_E = \frac{\left(3{,}5F + p\dfrac{3{,}5^2}{2}\right)\times 3{,}5}{3EI} = 4{,}083\frac{F}{EI} + \frac{137{,}2}{EI}$$

con lo cual, sustituyendo:

$$v_A^+ = -28{,}58\frac{F}{EI} - \frac{840{,}35}{EI}$$

Igualando los movimientos verticales en A:

$$5{,}667\frac{F}{EI} - \frac{74{,}4}{EI} = -28{,}58\frac{F}{EI} - \frac{840{,}35}{EI}$$

O sea:

$$F = -22{,}36\,kN$$

En la figura 3 pueden verse representadas las leyes de momentos flectores y en la figura 4 las leyes de esfuerzos cortantes.

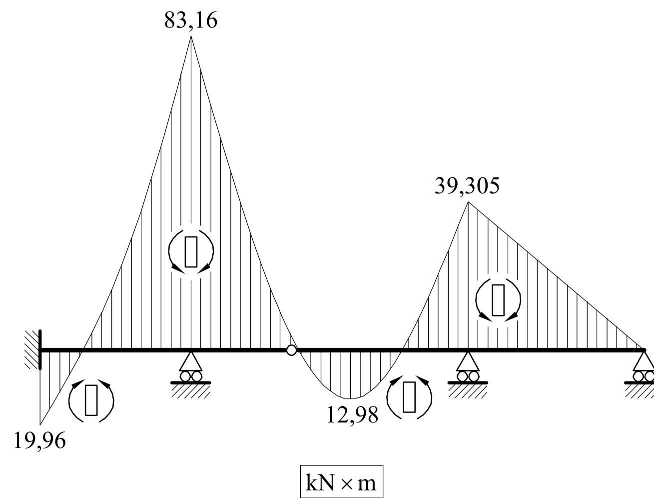


Fig. 3. Ley de momentos flectores.

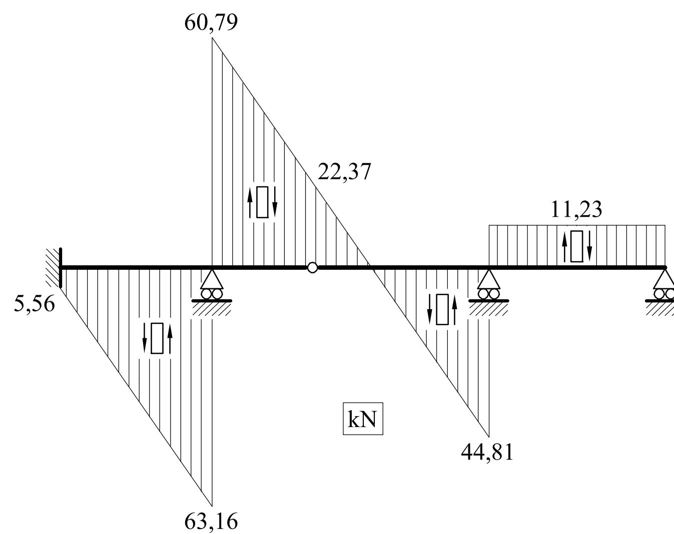


Fig. 4. Ley de esfuerzos cortantes.

El desplazamiento vertical de *A* vale:

$$v_A = -28{,}58\frac{(-22{,}36)}{EI} - \frac{840{,}35}{EI} = -\frac{201{,}3}{EI}$$

Problema 10.14 *En la viga que se representa en la figura 1, hallar y dibujar las leyes de esfuerzos, así como la flecha en el punto D*

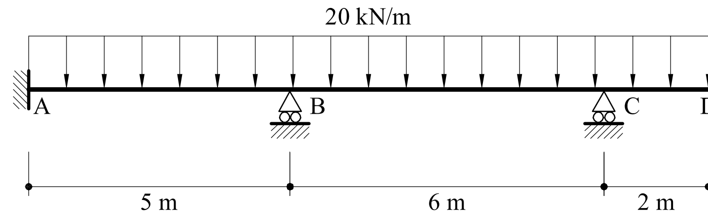


Fig.1 Estructura correspondiente al problema 10.14

Solución

La viga continua propuesta se descompondrá en vigas simples (figura 2). Los momentos M_A y M_B se obtendrán imponiendo las siguientes condiciones de compatibilidad

$$\varphi_A = 0 \qquad ; \qquad \varphi_B^{AB} = \varphi_B^{BC}$$

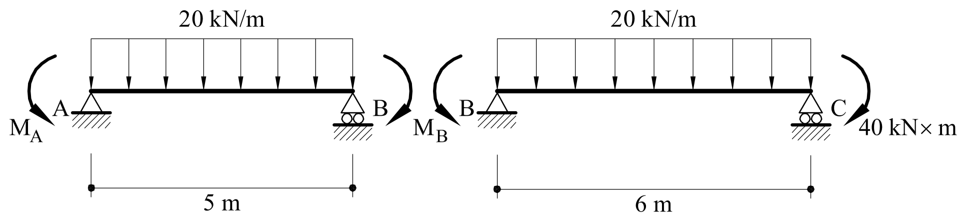


Fig.2. Descomposición en vigas simples

El giro en A vale:

$$\varphi_A = \frac{5M_A}{3EI} + \frac{5M_B}{6EI} - \frac{20\times 5^3}{24EI} = 0 \qquad (a)$$

El giro en B de las piezas AB y BC se escribe:

$$\varphi_B^{AB} = -\frac{5M_A}{6EI} - \frac{5M_B}{3EI} + \frac{20\times 5^3}{24EI}$$

$$\varphi_B^{BC} = \frac{6M_B}{3EI} + \frac{40\times 6}{6EI} - \frac{20\times 6^3}{24EI}$$

Igualando ambos giros:

$$5M_A + 22M_B = 1465 \qquad (b)$$

Las expresiones (a) y (b) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que resuelto proporciona el valor de los momentos M_A y M_B

$$M_A = 32{,}95\, kN\, m \qquad ; \qquad M_B = 59{,}1\, kN\, m$$

El giro en C vale:

$$\varphi_C = -\frac{40\times 6}{3EI} - \frac{6M_B}{6EI} + \frac{20\times 6^3}{24EI} = \frac{40{,}9}{EI}$$

Por lo que, la flecha en *D* valdrá

$$\upsilon_D = 2\varphi_C - \frac{20\times 2^4}{8EI} = 2\times\frac{40{,}9}{EI} - \frac{40}{EI} = \frac{41{,}8}{EI}$$

En la figura 3 pueden verse representadas las leyes de momentos flectores, cortantes y reacciones

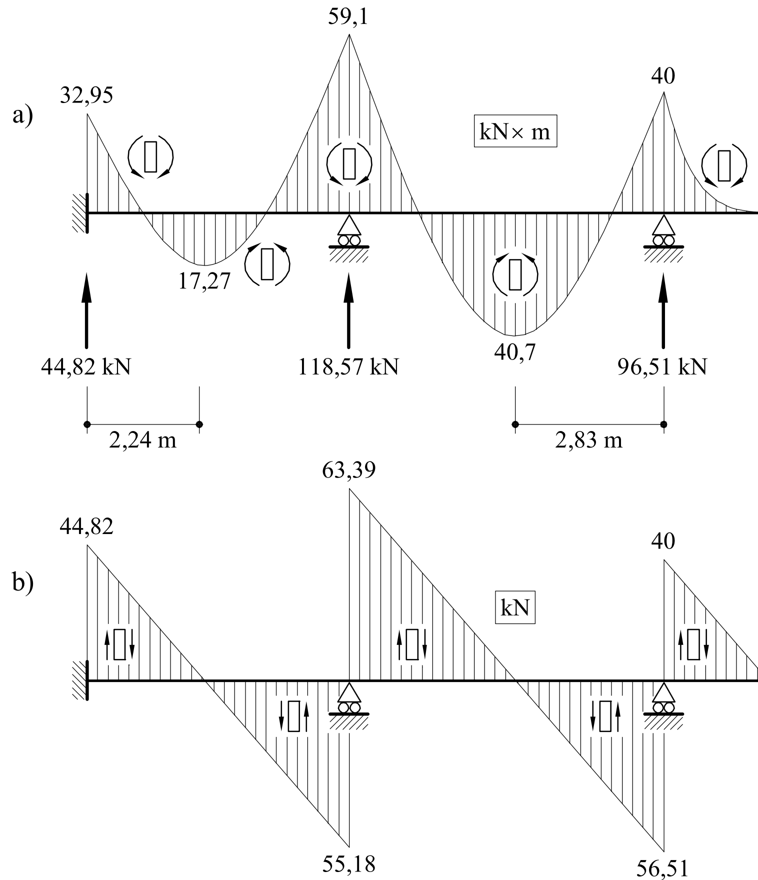


Fig.3. Ley de momentos flectores, esfuerzos cortantes y reacciones

Problema 10.15 *En la viga continua que se representa en la figura 1, hallar y dibujar:*

- *Leyes de momentos flectores*
- *Flecha del punto D*

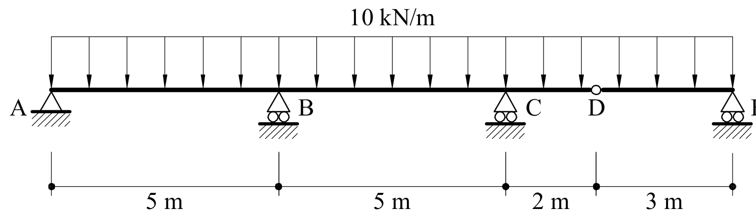


Fig.1 Viga correspondiente al problema 10.15

Solución

Al ser isostática la pieza *CDE*, se eliminará sustituyéndola por su efecto en el resto de la estructura (figura 2.a). La pieza *ABC* se descompondrá en dos vigas simples *AB* y *BC* (figura 2.b). Para hallar el valor del momento M_B se igualarán los giros en *B* de las piezas *AB* y *BC*.

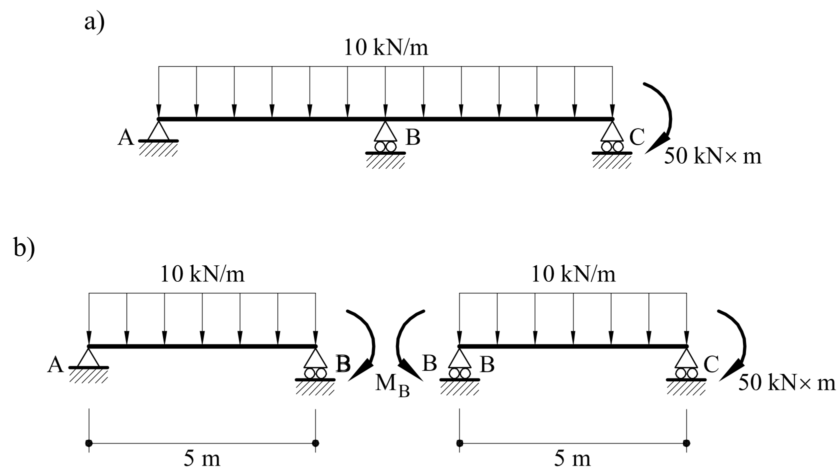


Fig.2. Descomposición en vigas simples

Los giros en B de las piezas *AB* y *BC* valen:

$$\varphi_B^{AB} = \frac{10 \times 5^3}{24EI} - \frac{5M_B}{3EI}$$

$$\varphi_B^{BC} = -\frac{10 \times 5^3}{24EI} + \frac{5M_B}{3EI} + \frac{5 \times 50}{6EI}$$

Igualando se obtiene

$$M_B = 18{,}75\,kN\,m$$

El giro en *C* vale:

$$\varphi_C = \frac{10\times 5^3}{24EI} - \frac{5M_B}{6EI} - \frac{5\times 50}{3EI} = -\frac{46,875}{EI}$$

Con lo que la flecha en *D* valdrá,

$$v_D = 2\varphi_C - \frac{10\times 2^4}{8EI} - \frac{15\times 2^3}{3EI} = -\frac{153,75}{EI}$$

La flecha en *D* tiene sentido descendente

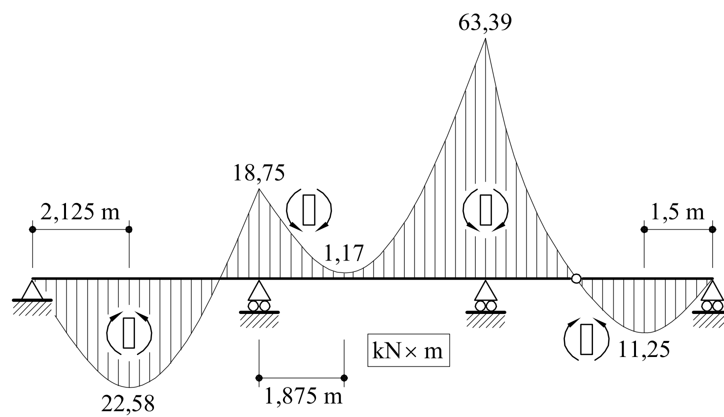


Fig.3. Ley de momentos flectores.

Problema 10.16 *Determinar la ley de momentos flectores, esfuerzos cortantes y reacciones en la viga continua representada en la figura 1*

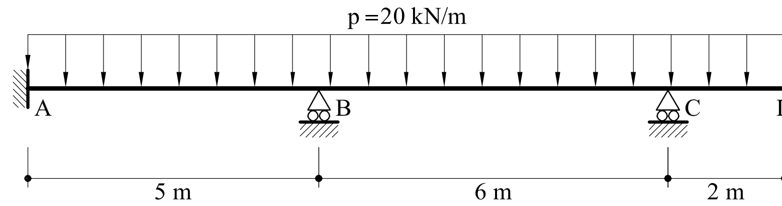


Fig.1 Viga correspondiente al problema 10.16

Solución

Para su resolución se descompone en las vigas simples representadas en la figura 2.

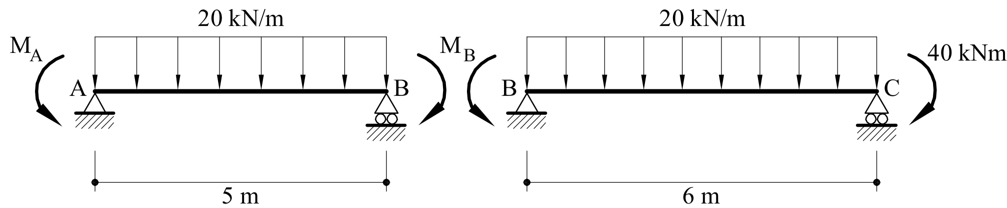


Fig.2. Descomposición en vigas simples

El giro en el punto *A* debe ser nulo:

$$\varphi_A = \frac{M_A 5}{3EI} + \frac{M_B 5}{6EI} - \frac{20 \times 5^3}{24EI} = 0$$

Por otro lado, igualando el giro en *B* en las piezas *AB* y *BC*:

$$\varphi_B^{AB} = -\frac{M_A 5}{6EI} - \frac{M_B 5}{3EI} + \frac{20 \times 5^3}{24EI}$$

$$\varphi_B^{BC} = \frac{M_B 6}{3EI} + \frac{40 \times 6}{6EI} - \frac{20 \times 6^3}{24EI}$$

De ambas condiciones se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$2M_A + M_B = 125$$
$$5M_A + 22M_B = 1465$$

Resolviendo el sistema:

$$M_A = 32{,}95 kN \qquad M_B = 59{,}1 kN$$

Co ello, se pueden dibujar las leyes de esfuerzos y las reacciones (figuras 3 y 4)

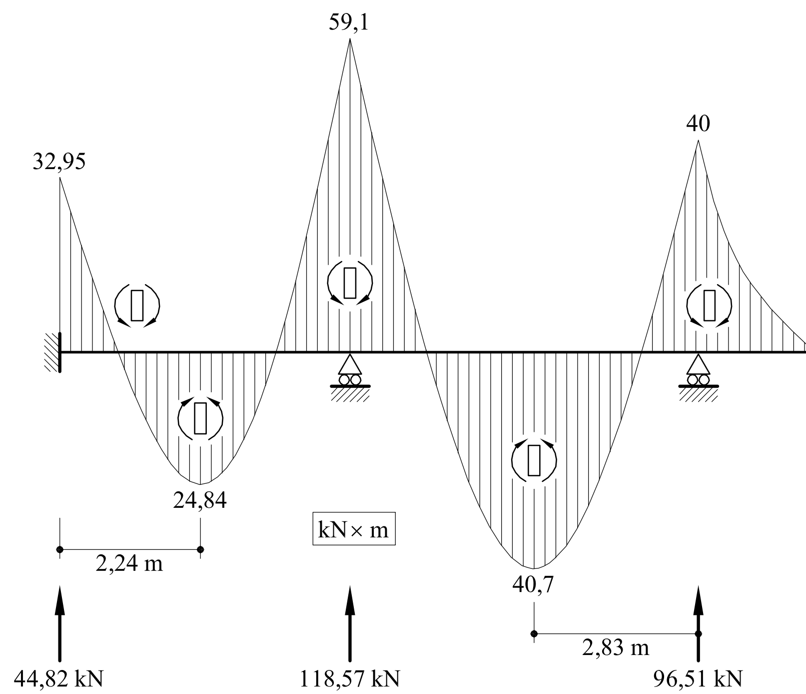


Fig.3. Ley de momentos flectores y reacciones

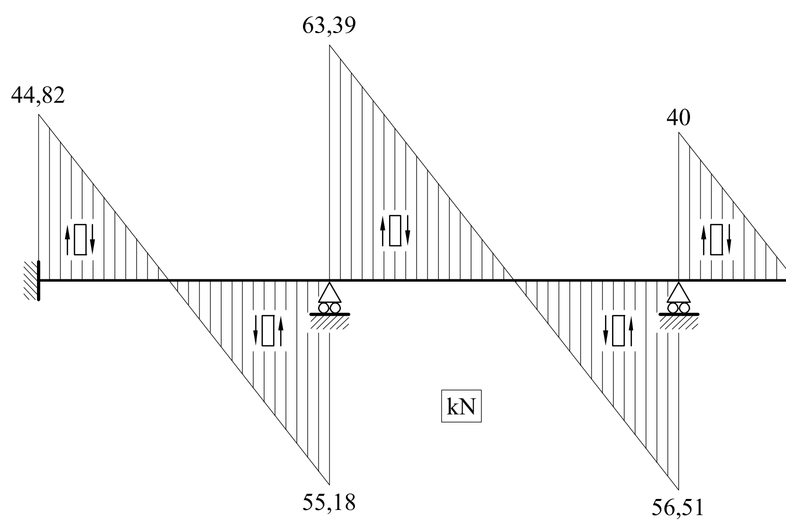


Fig.4. Ley de esfuerzos cortantes.

Problema 10.17 *Determinar las reacciones, leyes de momentos flectores y leyes de esfuerzos cortantes en la viga continua de la figura 1. Determinar asimismo la flecha en el punto A..*
El producto EI se expresa en unidades KN×m² .
El valor de k se expresa en unidades kN/m.

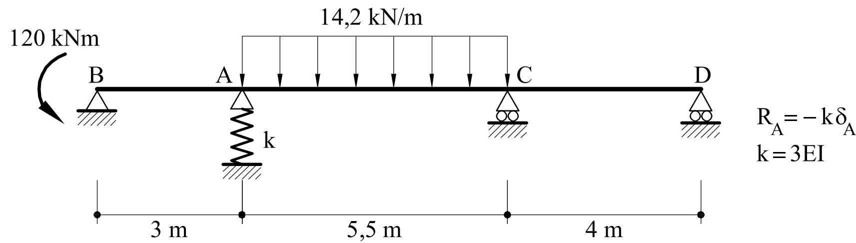


Fig.1 Viga continua correspondiente al problema 10.17

Solución

Se descompone la viga propuesta en tres vigas simples (Fig. 2)

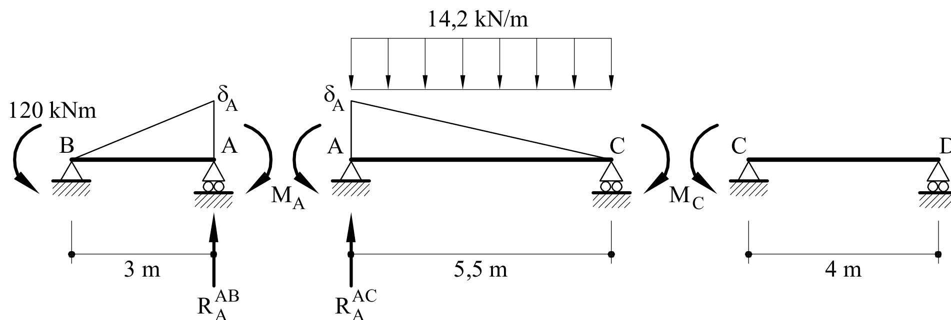


Fig. 2 Descomposición en vigas simples.

- Giro en *A*:
  - Giro en *A* de la pieza *AB*

$$\varphi_A^{AB} = -\frac{120 \times 3}{6EI} - \frac{M_A \times 3}{3EI} + \frac{\delta_A}{3}$$

  - Giro en *A* de la pieza *AC*

$$\varphi_A^{AC} = \frac{M_A \times 5{,}5}{3EI} + \frac{M_C \times 5{,}5}{6EI} - \frac{14{,}2 \times (5{,}5)^3}{24EI} - \frac{\delta_A}{5{,}5}$$

Igualando se obtendrá la primera ecuación.

$$2{,}833 M_A + 0{,}917 M_C - 0{,}515 \delta_A EI = 38{,}44$$

- Giro en *C*:
  - Giro en *C* de la pieza *AC*

$$\varphi_C^{AC} = -\frac{M_A \times 5{,}5}{6EI} - \frac{M_C \times 5{,}5}{3EI} + \frac{14{,}2 \times (5{,}5)^3}{24EI} - \frac{\delta_A}{5{,}5}$$

- Giro en *C* de la pieza *CD*

$$\varphi_C^{CD} = \frac{M_C\, 4}{3EI}$$

Igualando se obtendrá la segunda ecuación.

$$0{,}917\, M_A + 3{,}167\, M_C + 0{,}182\, \delta_A\, EI = 98{,}44$$

Para obtener la tercera de las ecuaciones, es preciso obtener previamente las reacciones R_A^{AB} y R_A^{AC}.

$$R_A^{AB} = 0{,}3333 M_A - 40$$

$$R_A^{BC} = 0{,}1818 M_A - 0{,}1818 M_C + 39{,}05$$

Sumando:

$$R_A = R_A^{AB} + R_A^{BC} = 0{,}5151 M_A - 0{,}1818 M_C - 0{,}95$$

y como

$$R_A = -k\, \delta_A = -3\, EI\, \delta_A$$

Sustituyendo se obtiene la tercera ecuación

$$0{,}5151 M_A - 0{,}1818 M_C + 3 \delta_A\, EI = 0{,}95$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$M_A = 4{,}181 kN \times m$$

$$M_C = 29{,}7918 kN \times m$$

$$EI\delta_A = 1{,}404\ kN\, m^3$$

En la figura 3 se dibujan las leyes de esfuerzos así como las reacciones.

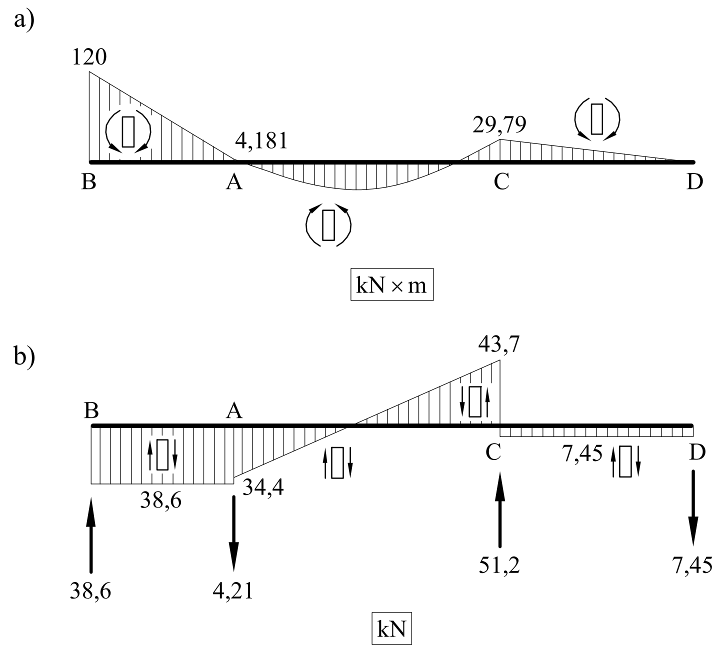


Fig. 3 a)Ley de momentos flectores
b)Ley de esfuerzos cortantes y reacciones

Problema 10.18 *La viga de la figura 1 tiene una rótula situada en el punto A. En dicho punto y a ambos lados de la rótula actúan sendos momentos iguales y de sentido contrario de valor M.*

Hallar:

a) Desplazamiento vertical de la rótula.
b) Giro relativo a ambos lados de la rótula.

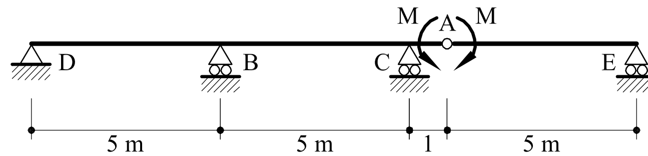


Fig. 1. Viga continua correspondiente al problema resuelto 10.18

Solución

Se tomará como incógnita hiperestática el momento flector en el punto *B*. Para determinarlo, descompondremos la viga continua en dos vigas simples:

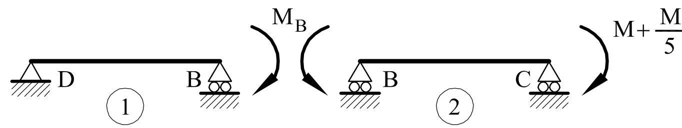


Fig. 2. Descomposición en vigas simples.

Giro en el punto *B* de la pieza 1 (sentido horario positivo):

$$\varphi_B = -\frac{M_B \times 5}{3EI}$$

Giro en el punto *B* de la pieza 2:

$$\varphi_B = \frac{M_B \times 5}{3EI} + \frac{\frac{6}{5}M \times 5}{6EI}$$

De donde se obtiene:

$$\frac{10M_B}{3EI} + \frac{M}{EI} = 0 \quad \rightarrow \quad M_B = -\frac{3M}{10}$$

Giro del punto *C* (sentido antihorario positivo):

$$\varphi_C = -\frac{M_B \times 5}{6EI} - \frac{\frac{6}{5} \times 5M}{3EI} = -\frac{7M}{4EI}$$

Desplazamiento vertical del punto *A*:

$$v_{2A} = \varphi_C \times 1 - \frac{M \times 1^2}{2EI} - \frac{(\frac{M}{5}) \times 1^3}{3EI} = -\frac{7M}{4EI} - \frac{M}{2EI} - \frac{M}{15EI} = -\frac{139}{60}\frac{M}{EI}$$

Giro relativo a ambos lados de la rótula:

$$\varphi_A^{\,-} = \varphi_C - \frac{(\frac{M}{5}) \times 1^2}{2EI} - \frac{M \times 1}{EI} = -2{,}85\frac{M}{EI}$$

$$\varphi_A^{\,+} = -\frac{v_{2A}}{5} + \frac{M \times 5}{3EI} = 2{,}13\frac{M}{EI}$$

Problema 10.19 *En la viga continua de la figura 1, el apoyo 2 es elástico con un valor de la constante k igual a* $5\,kN/m$*. La inercia de todas las piezas es la misma e igual a* $10^6\,cm^4$*, siendo el módulo de elasticidad* $E = 210\ GPa$*. Hallar las leyes de esfuerzos así como el movimiento del punto E.*

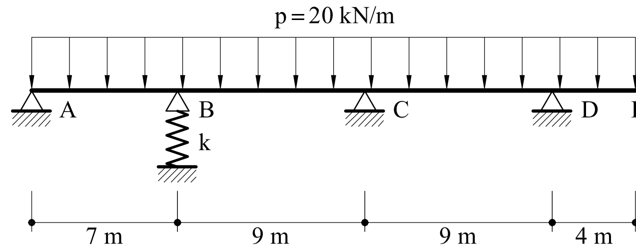


Fig. 1. Viga continua correspondiente al problema resuelto 10.19

Solución

Se tomarán como incógnitas hiperestáticas los momentos flectores en los apoyos *B* y *C*, M_{fB} y M_{fC} respectivamente. El producto *EI* vale

$$EI = 210\ GPa \times 10^6\,cm^4 = 21 \times 10^5\ kNm^2$$

La viga se descompone en las tres vigas simples de la figura 2.

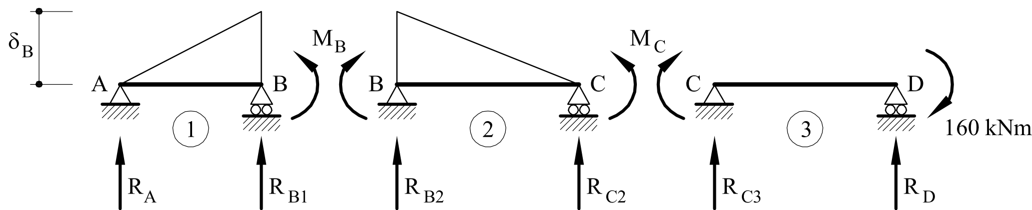


Fig. 2. Descomposición en vigas simples.

El giro en *B* de la pieza 1 vale:

$$\varphi_B^1 = \frac{M_B \times 7}{3EI} + \frac{\delta_B}{7} + \frac{20 \times 7^3}{24EI}$$

El giro en *B* de la pieza 2 vale:

$$\varphi_B^2 = -\frac{M_B \times 9}{3EI} - \frac{M_C \times 9}{6EI} - \frac{20 \times 9^3}{24EI} - \frac{\delta_B}{9}$$

Igualando se obtiene la primera ecuación:

$$5{,}3333\,M_B + 1{,}5\,M_C + 0{,}254\,EI\,\delta_B + 893{,}33 = 0$$

Igualmente para el punto *C*:

$$\varphi_C^2 = \frac{M_C \times 9}{3EI} + \frac{M_B \times 9}{6EI} + \frac{20\times 9^3}{24EI} - \frac{\delta_B}{9}$$

$$\varphi_C^3 = -\frac{M_C \times 9}{3EI} - \frac{20\times 9^3}{24EI} + \frac{160\times 9}{6EI}$$

Igualando se obtiene la segunda ecuación:

$$1{,}5 M_B + 6 M_C - 0{,}1111 EI\,\delta_B + 975 = 0$$

Para la tercera ecuación, es preciso en primer lugar hallar la reacción R_B:

$$R_B = R_{B1} + R_{B2}$$

$$R_{B1} = \frac{20\times 7}{2} - \frac{M_B}{7}$$

$$R_{B2} = \frac{20\times 9}{2} - \frac{M_B - M_C}{9}$$

Sustituyendo en R_B:

$$R_B = 160 - 0{,}254 M_B + 0{,}1111 M_C$$

y como

$$R_B = -k\,\delta_B = -5\delta_B$$

Igualando se obtiene la tercera ecuación:

$$0{,}254 M_B - 0{,}1111 M_C - 5\delta_B - 160 = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$M_B = 431{,}4 \ kN\,m$$

$$M_C = -453{,}6 \ kN\,m$$

$$\delta_B = -0{,}004713 \ m$$

Para hallar el movimiento de E es preciso en primer lugar hallar el giro de D:

$$\varphi_D = \frac{M_C \times 9}{6EI} - \frac{160\times 9}{3EI} + \frac{20\times 9^3}{24EI} = -\frac{552{,}9}{EI} = -2{,}633\times 10^{-4}\,rdn$$

El movimiento vertical de E (positivo si descendente) valdrá:

$$v_E = -\varphi_D \times 4 + \frac{20 \times 4^4}{8EI} = 0{,}00136\,m = 0{,}136\,cm$$

Problema 10.20 *La viga continua de dos vanos iguales de luz L, tiene una sección transversal rectangular constante de rigidez EI. Esta viga se encuentra simplemente apoyada en sus extremos en soportes fijos y en la sección central en un soporte elástico de rigidez k.*

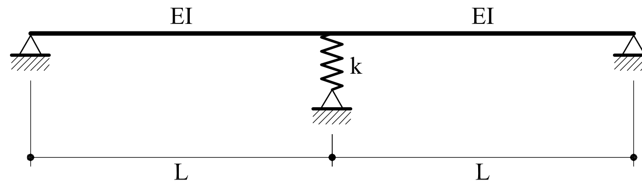


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 10.20

Se pide:

a) *Dimensionar la rigidez k del soporte intermedio de forma que bajo la actuación de una carga p uniformemente distribuida por unidad de longitud de la viga, vertical descendente, la ley de momentos flectores que resulte sea la más favorable, es decir, produzca tensiones de tracción y compresión de valor absoluto mínimo en la viga.*

b) *Calcular el movimiento vertical del apoyo central, considerando el valor anterior de la rigidez k.*

c) *Deducir, suponiendo para el soporte la rigidez k calculada en a), los valores de los momentos flectores máximo y mínimo que actúan en la viga, así como las posiciones de las secciones en las que el momento flector es nulo.*

Solución

a) La ley de momentos flectores de la estructura tendrá la forma que se dibuja en la figura 2. Lógicamente, los valores de M_1 y M_B dependerán de la rigidez k

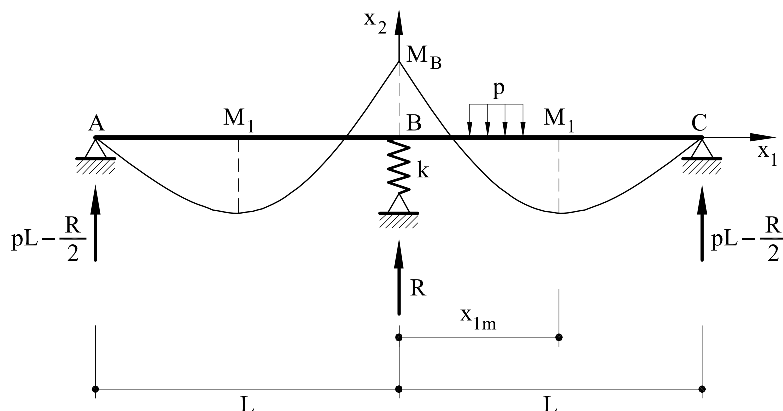


Fig. 2 Ley de momentos flectores "a estima"

La ley de momentos flectores más favorable se conseguirá cuando $|M_1| = |M_B| = M$
La ley de momentos flectores entre *B* y *C* se escribe

$$M_f\Big|_B^C = \left(p\,L - \frac{R}{2}\right)(L - x_1) - p\frac{(L - x_1)^2}{2}$$

La coordenada x_{1m} en donde el momento flector es máximo se obtendrá a partir de

$$\frac{\partial M_f\Big|_B^C}{\partial x_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1m} = \frac{R}{2p}$$

con lo cual,

$$M_1 = \left(pL - \frac{R}{2}\right)\left(L - \frac{R}{2p}\right) - \frac{p(L - R/2p)^2}{2} = \frac{pL^2}{2} - \frac{RL}{2} + \frac{R^2}{8p}$$

Por otro lado,

$$M_B = \left(pL - \frac{R}{2}\right)L - \frac{pL^2}{2} = \frac{pL^2}{2} - \frac{R\,L}{2}$$

Imponiendo la condición de que $M_1 = -M_B$ se obtiene el valor de R

$$R = 1{,}1716\,pL$$

Por otra parte, el descenso del punto *B* valdrá

$$\upsilon_B = \frac{5p(2L)^4}{384\,EI} - \frac{R(2L)^3}{48\,EI} = \frac{5pL^4}{24\,EI} - \frac{RL^3}{6\,EI}$$

y como $\upsilon_B = R/k$ resulta

$$\frac{5\,pL^4}{24\,EI} - \frac{RL^3}{6\,EI} = \frac{R}{k}$$

y sustituyendo *R* por el valor obtenido previamente,

$$k = 89{,}66\frac{EI}{L^3}$$

b) El movimiento del punto *B* valdrá

$$\upsilon_B = \frac{R}{k} = \frac{1{,}1716\,pL}{89{,}66\,EI/L^3} = 0{,}01307\frac{pL^4}{EI}$$

c) Sustituyendo en M_B o en M_1 el valor de R

$$M = 0{,}0858\, pL^2$$

El punto x_{10} en que el momento flector es nulo se obtendrá a partir de $M_f\big|_B^C = 0$, o sea

$$x_{10} = 0{,}1716\, L$$

Problema 10.21 *Determinar el momento en el empotramiento elástico A y el desplazamiento del apoyo elástico C de rigideces respectivas k_a* y k_c de la viga continua de la figura 1.

Datos:

$$EI = 5\times 10^5\,kNm^2 \;;\; k_c = 1\,000\,kN/m \;;\; k_a = 10^5\,kNm \;;\; L = 10\,m \;;\; P\ en\ kN$$

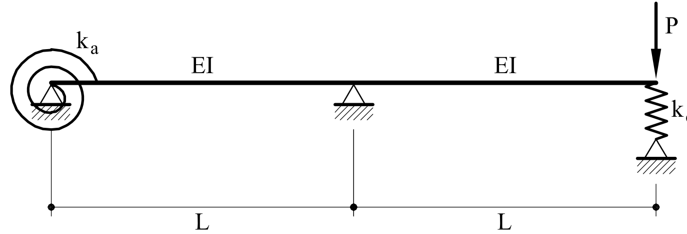


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 10.21

Solución

En la figura 2 se dibuja *a estima* la deformada del conjunto.

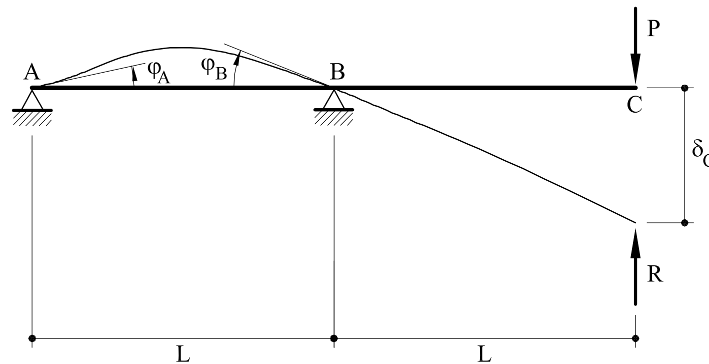


Fig .2 Deformada "a estima"

El giro del punto *A* se escribe

$$\varphi_A = -\frac{M_A\,L}{3EI} + \frac{(P-R)L^2}{6EI}$$

y como $\varphi_A = M_A/k_a$,sustituyendo se obtiene la primera ecuación

$$M_A + 2R = 2P$$

El desplazamiento en *C* valdrá

$$\delta_c = \varphi_B L + \frac{(P-R)L^3}{3EI} = \frac{(P-R)L^3}{3EI} - \frac{M_A L^2}{6EI} + \frac{(P-R)L^3}{3EI}$$

y dado que $\delta_c = R/k_c$ sustituyendo se obtiene la segunda ecuación

$$0{,}5M_A + 35R = 20P$$

Resolviendo el sistema

$$M_A = \frac{30}{34}P \qquad\qquad R = \frac{19}{34}P$$

y por tanto

$$\delta_c = \frac{R}{k_c} = \frac{19}{34000}P = 0{,}000558823\,P$$

Problema 10.22 *La pieza de la figura 1 está sometida a una variación térmica de valor t en su cara superior y –t en su cara inferior. Determinar el valor de x (posición de la rótula) para que en ningún punto de la pieza existan momentos flectores ni esfuerzos cortantes.*

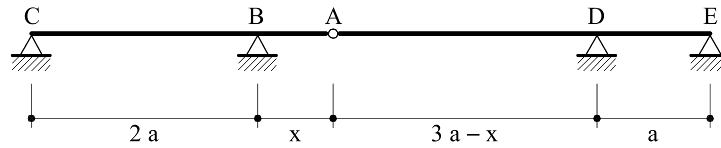


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 10.22

Solución

Para una sección rectangular de canto h, la curvatura producida por un gradiente térmico de valor $2t/h$ vale

$$\chi^{nt} = -\frac{2\alpha t}{h}$$

Siendo α el coeficiente de dilatación lineal.

La viga propuesta es una vez hiperestática. Si se toma como incógnita hiperestática el cortante en la rótula, es evidente que si dicho cortante es nulo también lo serán las leyes de momentos flectores y de esfuerzos cortantes en todos los puntos de la estructura. Evidentemente, para que dicho cortante sea nulo, es preciso que si se corta la pieza por la rótula el movimiento en ambos labios debido únicamente a los efectos térmicos sea el mismo (figura 2)

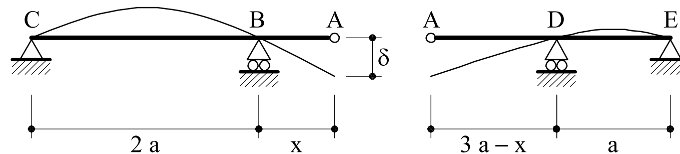


Fig. 2 Movimiento vertical de ambos labios de la rótula

Para calcular el valor de δ en la viga ABC se aplican los teoremas de Mohr:

$$\delta = -\varphi_A\left(2a + x\right) - \int_0^{2a+x} \chi^{nt}\left(2a + x - x_1\right)dx_1 = -\varphi_A\left(2a + x\right) - \chi^{nt}\,\frac{\left(2a + x\right)^2}{2}$$

$$v_{2B} = 0 = -\varphi_A\,2a - \int_0^{2a} \chi^{nt}\left(2a - x_1\right)dx_1 = -\varphi_A \cdot 2a - \chi^{nt}\,2a^2$$

o sea:

$$\varphi_A = -a\,\chi^{nt}$$

$$\delta = -\chi \frac{x(2a + x)}{2}$$

Análogamente para la viga *ADC*:

$$\delta = -\chi \frac{(3a - x)(4a - x)}{2}$$

Igualando y resolviendo en *x:*

$$x = \frac{4}{3}a$$

Problema 10.23 *En la pieza de la figura 1, el empotramiento E, desciende 1 cm y gira en sentido antihorario* 2×10^{-3} *radianes. Hallar la ley de momentos flectores si el producto* EI *vale*

$$EI = 10^4\ kN\times m^2$$

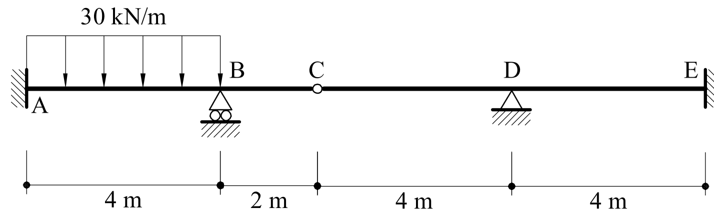


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 10.23

Solución

Se corta la pieza en *C* separándola en dos partes y colocando el valor del cortante *Q* (figura 2)

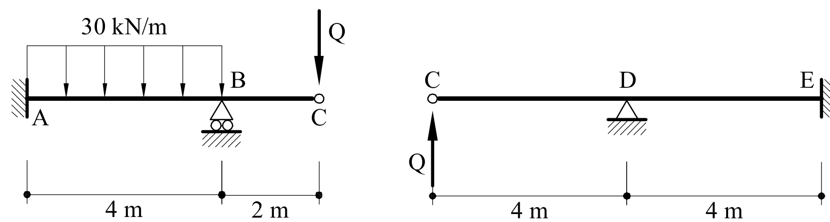


Fig. 2 Separación en dos piezas

Para determinar el valor de *Q* se igualan flechas en *C*

-Flecha en *C* de la pieza *ABC* (positiva si descendente)

$$v_{2C} = -\varphi_B \times 2 + \frac{Q\,2^3}{3EI}$$

$$\varphi_B = \frac{30\times 4^3}{48EI} - \frac{2Q\times 4}{4EI} = \frac{1}{EI}\left(40 - 2Q\right)$$

Sustituyendo:

$$v_{2C} = \frac{1}{EI}\left(-80 + 6{,}667Q\right) = -80\times 10^{-4} + 6{,}667\times 10^{-4}\,Q$$

-Flecha en *C* de la pieza *CDE* (positivo si descendente):

- Flecha debida al cortante Q

$$v_{2C}^{Q}=\varphi_D\times 4-\frac{Q\,4^3}{3EI}=\frac{1}{EI}\left(-\frac{4Q\times 4}{4EI}\right)\times 4-\frac{Q\,4^3}{3EI}=-37{,}33\frac{Q}{EI}$$

- Flecha debida al movimiento de 0,01 metros del apoyo E (figura 3)

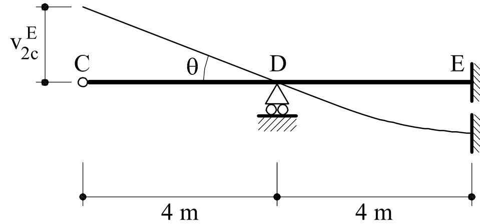


Fig. 3 Flecha en C debida a un desplazamiento vertical de E

$$v_{2C}^{E}=-4\theta=-4\times 1{,}5\frac{0{,}01}{4}=-0{,}015\ metros$$

- Flecha debida a un giro en E de 2×10^{-3} radianes (figura 4)

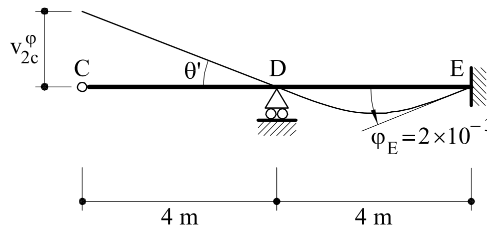


Fig. 4 Flecha en C debida a un giro en E

$$v_{2C}^{\varphi}=-4\theta'=-4\frac{\varphi_E}{2}=-4\times 10^{-3}\ metros$$

Sumando

$$v_{2C}=v_{2C}^{Q}+v_{2C}^{E}+v_{2C}^{\varphi}=-37{,}33\frac{Q}{EI}-0{,}015-4\times 10^{-3}=-37{,}33\times 10^{-4}Q-0{,}019$$

Igualando las flechas en C:

$$-80\times 10^{-4}+6{,}667\,Q\times 10^{-4}=-37{,}33\times 10^{-4}Q-0{,}019$$

Es decir

$$Q=-2{,}5\,kN$$

Las leyes de momentos flectores pueden verse representadas en la figura 5

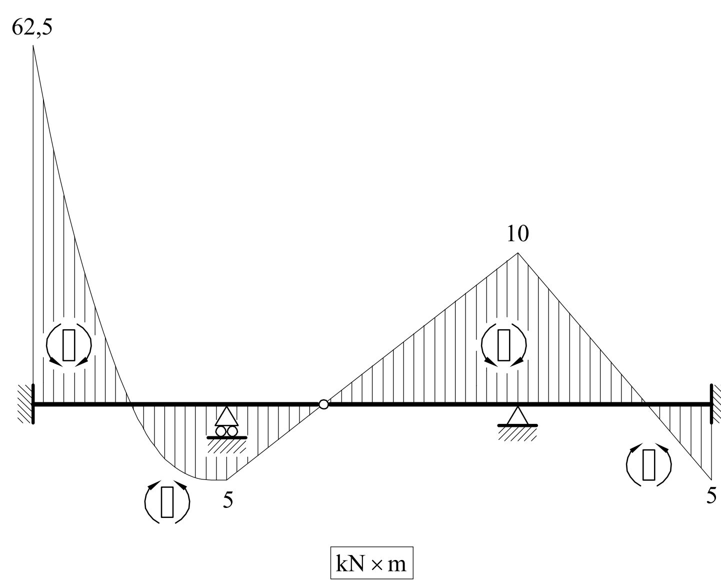


Fig. 5 Ley de momentos flectores.

Problema 10.24 *En la viga de la figura 1, por un fallo en los cimientos, el empotramiento A ha sufrido un descenso de* $40/EI$ *metros, y un giro de* $20/EI$ *rad y un ascenso el punto C de* $20/EI$ *m. El apoyo D es elástico siendo su constante* $k = 1\,000\,kN/m$. *Hallar las reacciones en los apoyos. El producto* EI *vale* $EI = 80\,000\,kN \times m^2$

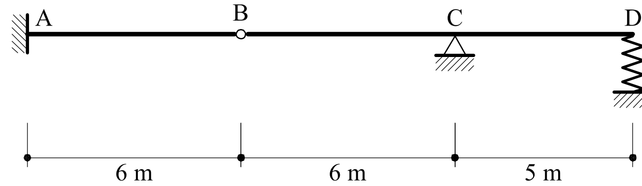


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 10.24

Solución

Se tomará como incógnita hiperestática el cortante en *B*. Para obtener su valor se igualarán los movimientos verticales a la izquierda y a la derecha de *B*.

- Flecha en *B* (ver figura 2) de la pieza *AB* (positiva si descendente)

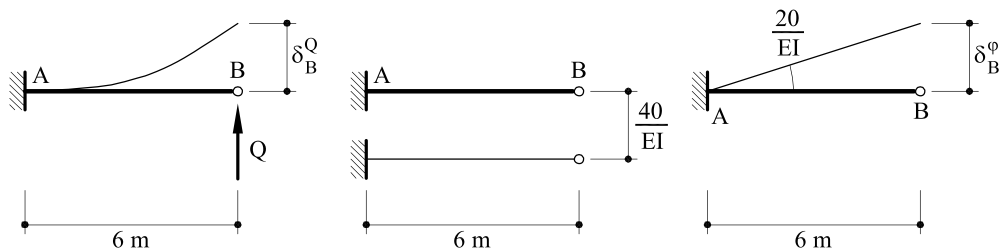


Fig. 2 Flecha en B de la pieza AB: a) Flecha debida a Q. b) Flecha debida al descenso del apoyo A. c) Flecha debida al giro de A

La flecha total valdrá

$$\delta_B = -\delta_B^Q + \frac{40}{EI} - \delta_B^{\varphi} = -\frac{Q6^3}{3EI} + \frac{40}{EI} - \frac{20 \times 6}{EI} = -\frac{80}{EI} - \frac{72Q}{EI}$$

- Flecha en *B* de la pieza *BCD* (figura 3)

La flecha total valdrá

$$\delta_B = \delta_B^Q - \delta_B^C + \delta_B^D$$

siendo

$$\delta_B^Q = \frac{Q6^3}{3EI} + \varphi_C \times 6 = 132\frac{Q}{EI}$$

$$\delta_B^C = \frac{6+5}{5}\frac{20}{EI} = \frac{44}{EI}$$

$$\delta_B^D = \frac{6}{5}\delta_D = \frac{6}{5}\frac{R_D}{k} = \frac{6}{5}\frac{(6/5)Q}{k} = 1{,}44\times 10^{-3}Q$$

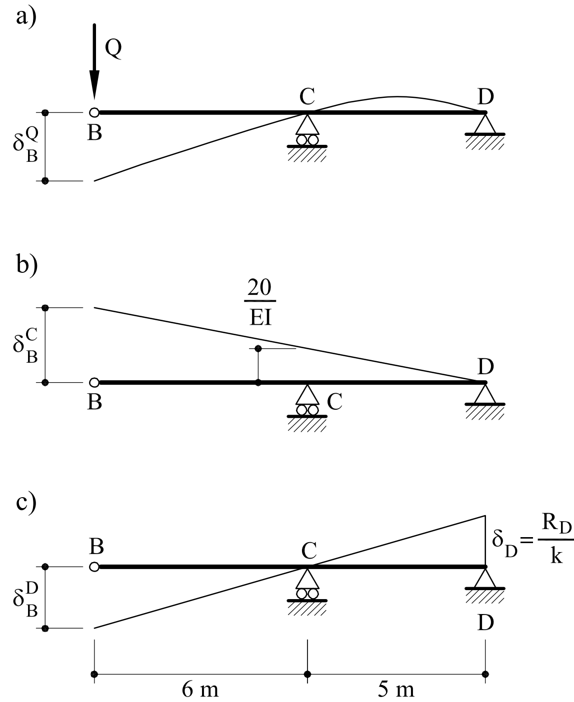


Fig. 3 Flecha en B de la pieza BCD: a) Flecha debida al cortante. b) Flecha debida al movimiento de B. c)Flecha debida al apoyo elástico.

Es decir

$$\delta_B = 132\frac{Q}{EI} - \frac{44}{EI} + 1{,}44\times 10^{-3}Q$$

Igualando las flechas en *B* se obtiene el valor de *Q*

$$Q = -\frac{25}{141{,}67 + EI/1\,000} = -0{,}113\ \ kN$$

A la misma conclusión se llega si se toma como incógnita hiperestática la reacción en *D*. Liberando esta coacción y dando los movimientos indicados se obtiene la flecha en *D* (figura 4).

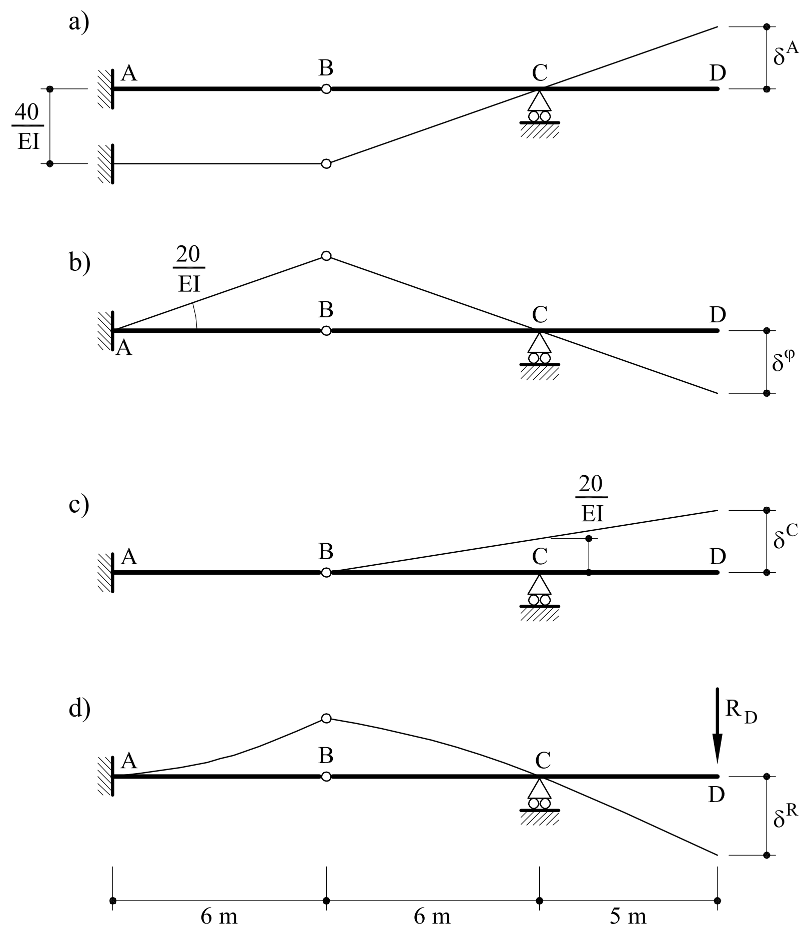


Fig. 4 Flecha en D: a) Debido al descenso de apoyo en A. b)Debido al giro en A. c)Debido al movimiento de apoyo en C. d)Debido a la reacción R_D

El movimiento vertical de *D* valdrá:

$$\delta_D = \delta^A - \delta^\varphi + \delta^C - \delta^R$$

y como

$$\delta^A = \frac{5}{6} \times \frac{40}{EI} = \frac{33{,}333}{EI}$$

$$\delta^\varphi = -\frac{20}{EI} \times 5 = -\frac{100}{EI}$$

$$\delta^C = \frac{20}{EI} \frac{5+6}{5} = \frac{36{,}667}{EI}$$

$$\delta^R = -\frac{141{,}67\, R_D}{EI}$$

Es decir:

$$\delta_D = \frac{33{,}333 - 100 + 36{,}6667 - 141{,}67\, R_D}{EI} = -\frac{30 + 141{,}67\, R_D}{EI}$$

y como también

$$\delta_D = \frac{R_D}{1\,000}$$

Igualando:

$$R_D = -\frac{30}{141{,}67 + EI/1\,000} = -0{,}135\, kN$$

Resultado que puede comprobarse que coincide con el anteriormente obtenido ya que $R_D = \frac{6}{5}Q$

Problema 10.25 *En la viga continua de la figura 1, todos los tramos tienen el mismo producto* EI *. El punto A sufre un descenso de apoyo de valor* δ *. Sabiendo que* $EI\,\delta = 1\,000\,kN\times m^3$*, hallar las leyes de esfuerzos en todas las barras.*

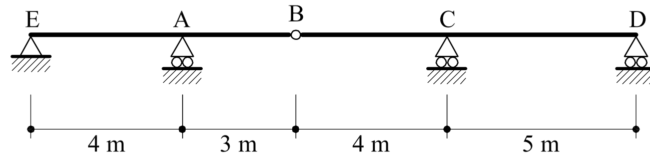


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 10.25

Solución

La viga es una vez hiperestática. Se tomará como incógnita hiperestática el esfuerzo cortante en *B*. Su valor se obtendrá de igualar la flecha en ambos labios de la rótula (figura 2)

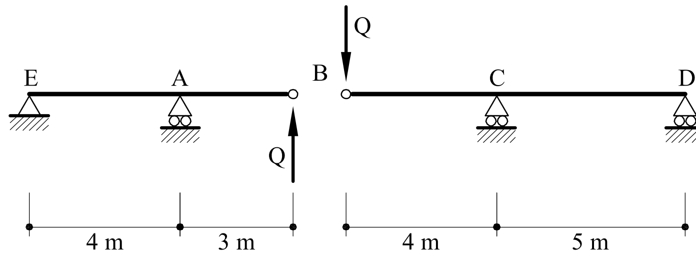


Fig. 2 Descomposición en vigas simples

- Flecha en *B* de la pieza *EAB* (positiva si ascendente)

  - Flecha debida a Q

$$\upsilon_B^Q = \varphi_A \times 3 + \frac{Q\times 3^3}{3EI} = 21\frac{Q}{EI}$$

  - Flecha debida a δ

$$\upsilon_B^\delta = -\frac{4+3}{4}\delta = -1{,}75\,\delta$$

- Flecha en *B* de la pieza *BCD*

$$\upsilon_B = -\varphi_C \times 4 - \frac{Q\times 4^3}{3EI} = -48\frac{Q}{EI}$$

Igualando flechas

$$21\frac{Q}{EI}-1{,}75\,\delta=-48\frac{Q}{EI}$$

es decir:

$$Q=25{,}36\,kN$$

En la figura 3 pueden verse dibujadas las leyes de esfuerzos.

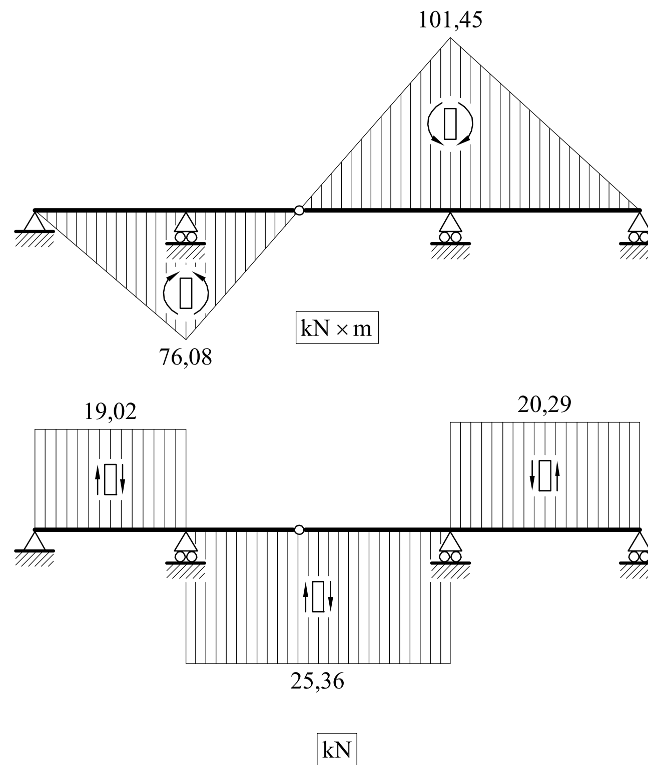


Fig. .3 Leyes de esfuerzos.

Problema 10.26 *En la viga continua de la figura 1 se sabe que la rigidez* EI *en cada vano es constante y que en el AB vale k* $kN \times m^2$. *Las leyes de momentos flectores son las dibujadas. Se pide:*

A) Rigideces de los tramos BC y *CD.*
B) Cargas que producen la ley de momentos flectores indicadas.

Datos: $k = 2 \times 10^5 kN \times m^2$

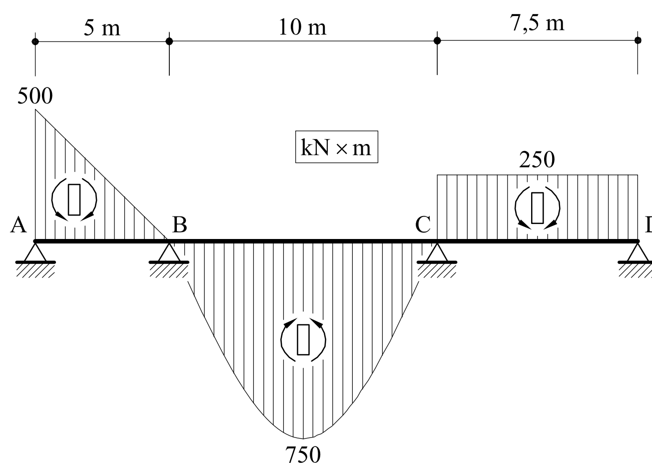


Fig. 1 Viga correspondiente al problema 10.26

Solución

Se descompone la pieza en vigas simples (figura 2)

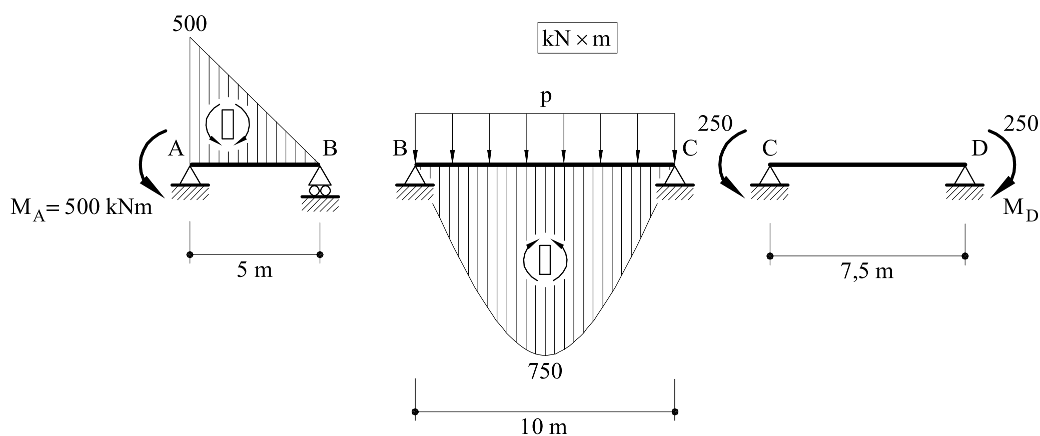


Fig. 2 Descomposición en vigas simples.

A partir de la figura 10.19.2 se observa que en *A* hay aplicado un momento exterior de valor $M_A = 500\ kNm$. En *BC* actúa una carga uniformemente distribuida por unidad de longitud tal que

$$\frac{p \times (10)^2}{8} = 750$$

es decir, $p = 60\,kN/m$. Asimismo en el nudo C hay aplicado un momento externo de valor $M_C = 250\,kN\,m$. También en D hay aplicado un momento externo de valor $M_D = -250\,kN\,m$. Todo ello, puede verse representado en la figura 3.

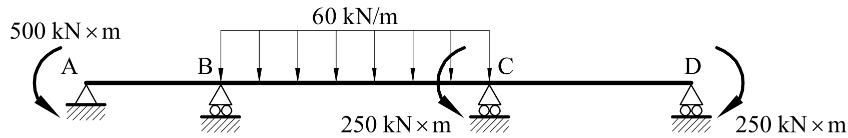


Fig. 3 Cargas aplicadas

Para determinar las rigideces de *BC* y de *CD* se igualan giros en *B* y en *C*. Para ello:

$$\varphi_B^{AB} = -\frac{500 \times 5}{6k}$$

$$\varphi_B^{BC} = -\frac{60 \times 10^3}{24\,k_{BC}}$$

Igualando, resulta que

$$k_{BC} = 6\,k = 12 \times 10^5\ kN\,m^2$$

Análogamente para el nudo *C*:

$$\varphi_C^{BC} = \frac{60 \times 10^3}{24\,k_{BC}}$$

$$\varphi_C^{CD} = \frac{250 \times 7{,}5}{2\,k_{CD}}$$

Igualando resulta

$$k_{CD} = 2{,}25\,k = 4{,}5 \times 10^5\,kN\,m^2$$

Problema 10.27 *La viga continua de la figura 1 tiene una sección rectangular de ancho 1 y canto h. Dicha pieza sufre una variación térmica de valor t en su cara superior y –t en su cara inferior. Teniendo en cuenta la deformación por momento flector y por esfuerzo cortante, y tomando como incógnita hiperestática el momento flector en el apoyo intermedio, determinar y dibujar las leyes de esfuerzos.*

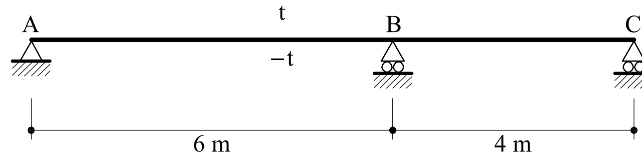


Fig. 1. Viga continua correspondiente al problema resuelto 10.27

Solución

La viga de la figura 1 está sometida a la variación de temperatura indicada. Dado que $\Delta t_1 = t$ y $\Delta t_2 = -t$, la curvatura debido a la variación térmica vale:

$$\chi^{nt} = -\frac{2\alpha t}{h}$$

Se tomará como incógnita hiperestática el momento flector en el apoyo *B*. Para determinarlo se descompone la viga continua en dos vigas simples:

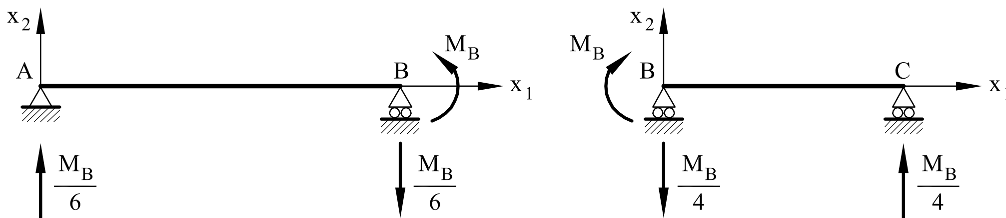


Fig. 2. Descomposición en vigas simples.

- Pieza *AB*

  El giro en *B* debido a la temperatura vale:

$$\varphi_B^{nt} = \int_0^3 \chi^{nt} \cdot ds = \frac{-2\alpha t}{h} \cdot 3 = \frac{-6\alpha t}{h}$$

  Las leyes de esfuerzos en la viga *AB* serán:

$$M_f = \frac{M_B}{6} x_1$$

$$Q = -\frac{M_B}{6}$$

La energía elástica, por unidad de longitud, de *AB* vale:

$$W_{AB}=\frac{1}{2}\frac{M_f^2}{EI}+\frac{1}{2}\frac{Q^2}{kGA}=\frac{1}{2}\left(\frac{M_B}{6}\right)^2\frac{x_1^2}{EI}+\frac{1}{2}\left(\frac{M_B}{6}\right)^2\frac{1}{kGA}=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{M_B^2}{36}\cdot\frac{x_1^2}{EI}+\frac{1}{2}\frac{M_B^2}{36}\cdot\frac{1}{kGA}$$

El giro en *B* debido a los esfuerzos vale:

$$\varphi_B=\int_0^6\frac{\partial W_{AB}}{\partial M_B}dx_1=\int_0^6\left[\frac{M_B}{36}\cdot\frac{x_1^2}{EI}+\frac{M_B}{36}\cdot\frac{1}{kGA}\right]dx_1=\frac{2M_B}{EI}+\frac{M_B}{6kGA}$$

El giro total en *B* vale:

$$\varphi_B^t=\frac{2M_B}{EI}+\frac{M_B}{6kGA}-\frac{6\alpha t}{h}$$

- Pieza *BC*

El giro en *B* debido a la temperatura vale:

$$\varphi_B^{nt}=\int_0^2\chi^{nt}\cdot ds=\frac{2\alpha t}{h}\cdot 2=\frac{4\alpha t}{h}$$

$$M_f=M_B-\frac{M_B}{4}x_1$$

$$Q=\frac{M_B}{4}$$

$$W_{BC}=\frac{1}{2}\left(M_B-\frac{M_B}{4}x_1\right)^2\frac{1}{EI}+\frac{1}{2}\left(\frac{M_B}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{kGA}$$

El giro en *B* debido a los esfuerzos vale:

$$\varphi_B=-\int_0^4\frac{\partial W_{BC}}{\partial M_B}dx_1=-\int_0^4\left[M_B\left(1-\frac{1}{4}x_1\right)^2\cdot\frac{1}{EI}+\frac{M_B}{16}\cdot\frac{1}{kGA}\right]dx_1=$$
$$=-\left[\frac{4}{3}\frac{M_B}{EI}+\frac{M_B}{4kGA}\right]$$

El giro total en *B* vale:

$$\varphi_B^t = -\left[\frac{4}{3}\frac{M_B}{EI} + \frac{M_B}{4kGA}\right] + \frac{4\alpha t}{h}$$

Igualando los giros en el apoyo *B*:

$$\frac{10M_B}{3EI} + \frac{5M_B}{12kGA} = \frac{10\alpha t}{h}$$

Como la sección es rectangular,

$$k = \frac{5}{6}$$

Sustituyendo

$$\frac{10M_B}{3EI} + 0{,}5\frac{M_B}{GA} = \frac{10\alpha t}{h}$$

Es decir:

$$M_B = \frac{10\alpha t}{h\left(3{,}33/EI + 0{,}5/G\,h\right)}$$

En la figura 3 pueden verse representadas las leyes de esfuerzos:

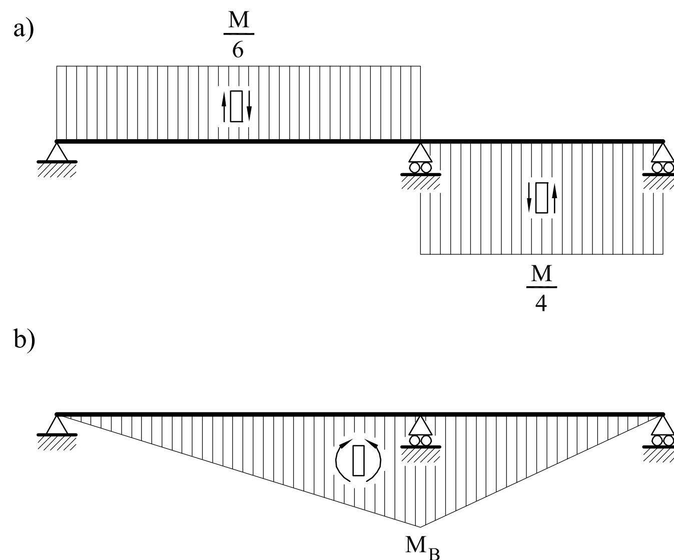


Fig. 3. Leyes de esfuerzos: a)Ley de esfuerzos cortantes, b)Ley de momentos flectores.

Problema 10.28 *La viga continua de la figura 1 está sometida a un incremento de temperatura de 30º en su cara superior y a un decremento de 10º en su cara inferior.*

Hallar las leyes de esfuerzos. (E = 30 000 MPa; canto = 60 cm; ancho = 30 cm; α = 10^{-5} ºC^{-1})

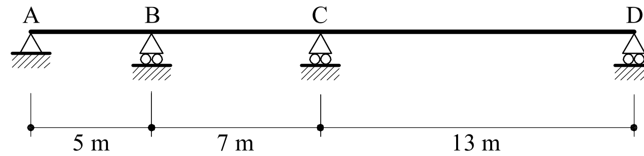


Fig.1 Viga correspondiente al problema 10.28

Solución

El producto *EI* vale

$$EI = 162\ 000\ kN \times m^2$$

La variación térmica propuesta puede descomponerse en suma de dos:

- Variación uniforme de temperatura de valor

$$\frac{30-10}{2} = 10º$$

  Esta variación térmica no produce esfuerzos.

- Incremento térmico de 20º en la cara superior y -20º en la cara inferior. Debido a que la variación térmica se supone lineal dentro de la sección, la curvatura térmica vale

$$\chi^{nt} = -\frac{2\alpha\, 20}{h} = -\frac{2\times 10^{-5}\times 20}{0{,}6} = -66{,}67\times 10^{-5}\ m^{-1}$$

  Se descompone la estructura en vigas simples colocando los momentos hiperestáticos en los apoyos (figura 2).

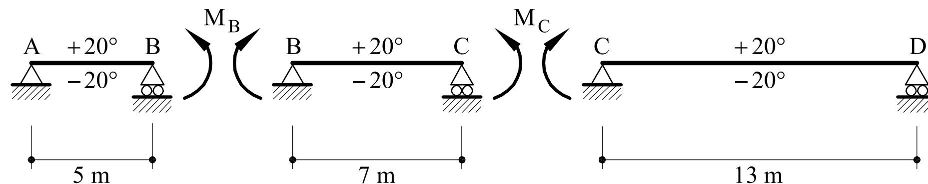


Fig. 2 Descomposición en vigas simples

  Seguidamente se calculan los giros en *B* y *C*

- Giro en *B* de la pieza *AB*

$$\varphi_B = \frac{5}{2}\chi^{nt} + \frac{5M_B}{3EI} = -166{,}67\times 10^{-5} + 1{,}03\times 10^{-5}\, M_B$$

- Giro en *B* de la pieza *BC*

$$\varphi_B = -\frac{7}{2}\chi^{nt} - \frac{7M_B}{3EI} - \frac{7M_C}{6EI} = 233{,}333\times 10^{-5} - 1{,}44\times 10^{-5}\, M_B - 0{,}72\times 10^{-5}\, M_C$$

Igualando giros se obtiene la primera ecuación

$$2{,}47\,M_B + 0{,}72\,M_C = 400$$

Análogamente para el nudo *C*

- Giro en *C* de la pieza *BC*

$$\varphi_C = \frac{7}{2}\chi^{nt} + \frac{7M_B}{6EI} + \frac{7M_C}{3EI} = -233{,}33\times 10^{-5} + 0{,}72\times 10^{-5} M_B + 1{,}44\times 10^{-5} M_C$$

- Giro en *C* de la pieza *CD*

$$\varphi_C = -\frac{13}{2}\chi^{nt} - \frac{13M_C}{3EI} = 433{,}33\times 10^{-5} - 2{,}67\times 10^{-5} M_C$$

Igualando giros se obtiene la segunda ecuación

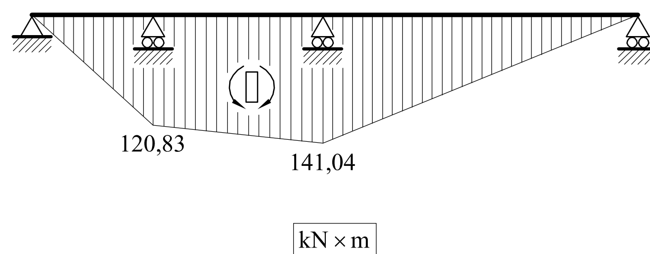
$$0{,}72\,M_B + 4{,}11\,M_C = 666{,}66$$

Resolviendo el sistema:

$$M_B = 120{,}83\ kN\,m$$

$$M_C = 141{,}04\ kN\,m$$

En la figura 3 puede verse representada la ley de momentos flectores.



kN × m

Fig. 3 Ley de momentos flectores

♣**Problema 10.29** *La estructura de la figura 1 está sometida a la carga uniformemente repartida que en ella se indica. Las rectas BG y GD representan dos tirantes de módulo de elasticidad el mismo que el resto de la estructura y de 6 cm*^{2} *de sección recta. Las restantes piezas de la estructura están formadas por una IPE 450. Determinar las leyes de esfuerzos en todos los puntos de la estructura.*

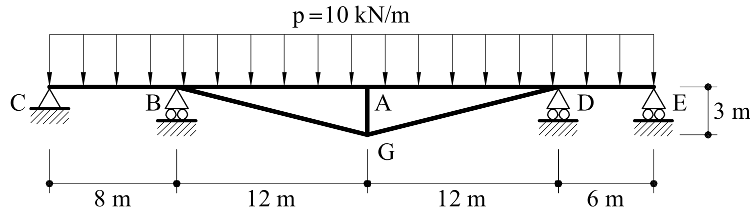


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 10.29

Solución

Para resolver la estructura se eliminan los tirantes y se colocan los efectos T_1 y T_2 que éstos ejercen sobre la estructura (figura 2).

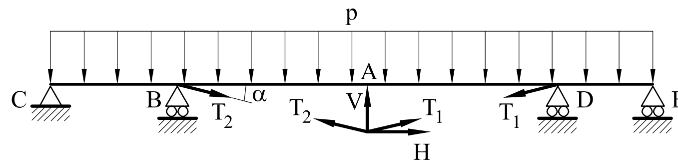


Fig. 2 Sustitución de los tirantes por sus efectos

Si H y V representan la proyección horizontal y vertical, respectivamente, de la suma vectorial de T_1 y T_2, se tendrá:

$$H = (T_1 - T_2)\cos\alpha = 0{,}9701(T_1 - T_2)$$

$$V = (T_1 + T_2)\sin\alpha = 0{,}2425(T_1 + T_2)$$

Las fuerzas H y V se trasladan al punto A (figura 3) y seguidamente se resuelve la viga continua descomponiéndola en vigas simples (figura 4).

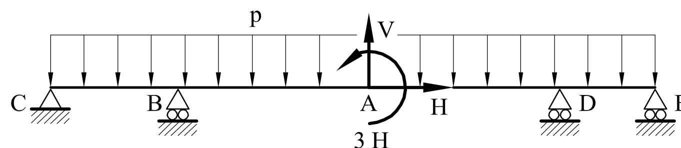


Fig. 3 Viga continua con las cargas V y H desconocidas

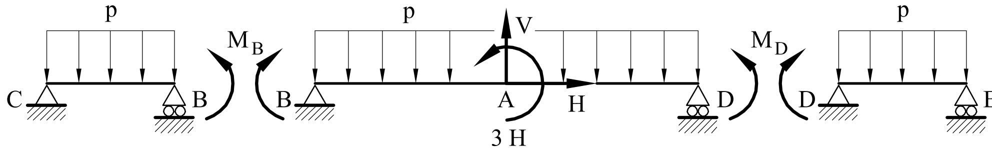


Fig. 4 Descomposición en vigas simples

Se hallan los giros en B de las vigas BC y BD

$$\varphi_B^{BC} = \frac{p \times 8^3}{24\,EI} + \frac{M_B\,8}{3\,EI} = 21{,}3333\,\frac{p}{EI} + 2{,}6667\,\frac{M_B}{EI}$$

$$\varphi_B^{BD} = -\frac{p \times 24^3}{24\,EI} - \frac{M_B\,24}{3\,EI} - \frac{M_D\,24}{6\,EI} + \frac{V\,24^2}{16\,EI} - \frac{3H\,24}{24\,EI}$$

Igualando se obtiene la primera ecuación

$$597{,}3333\frac{p}{EI} + 10{,}6667\frac{M_B}{EI} + 4\frac{M_D}{EI} - 36\frac{V}{EI} + 3\frac{H}{EI} = 0$$

De la misma forma, se hallan los giros en D de las piezas BD y DE

$$\varphi_D^{BD} = 576\frac{p}{EI} + 4\frac{M_B}{EI} + 8\frac{M_D}{EI} - 36\frac{V}{EI} - 3\frac{H}{EI}$$

$$\varphi_D^{DE} = -2\frac{M_B}{EI} - 9\frac{p}{EI}$$

Igualando se obtiene la segunda ecuación

$$585\frac{p}{EI} + 4\frac{M_B}{EI} + 10\frac{M_D}{EI} - 36\frac{V}{EI} - 3\frac{H}{EI}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$M_B = -40{,}07\,p + 2{,}382\,V - 0{,}1985\,H$$

$$M_D = -42{,}47\,p + 2{,}6476\,V - 0{,}2206\,H$$

El desplazamiento vertical del punto A vale:

$$v_A = \frac{5\,p\,(24)^4}{384\,EI} + \frac{M_B\,(24)^2}{16\,EI} + \frac{M_D\,(24)^2}{16\,EI} - \frac{V\,(24)^3}{48\,EI} = 1\,348{,}56\,\frac{p}{EI} -$$

$$-106{,}9344\frac{V}{EI} - 15{,}088\frac{H}{EI}$$

El giro del punto *A* vale

$$\varphi_A = \frac{M_B\,24}{24EI} - \frac{M_D\,24}{24EI} + \frac{H\,24}{4EI} = 2{,}4\frac{p}{EI} - 0{,}2656\frac{V}{EI} + 6{,}0221\frac{H}{EI}$$

Se calculan seguidamente el desplazamiento vertical y horizontal del punto *G* en función de *p*, T_1 y T_2.

$$v_G = 1\,348{,}56\frac{p}{EI} - \frac{106{,}9344(T_1+T_2)0{,}2425}{EI} - \frac{15{,}088(T_1-T_2)0{,}9701}{EI} =$$
$$= 1\,348{,}56\frac{p}{EI} - 39{,}84\frac{T_1}{EI} - 10{,}5675\frac{T_2}{EI} \qquad \text{(a)}$$

$$u_G = 3\varphi_A + \frac{H\times 3^3}{3EI} = 3\times 2{,}4\frac{p}{EI} - \frac{3\times 0{,}2656(T_1+T_2)0{,}2425}{EI} +$$
$$+ \frac{3\times 6{,}0221(T_1-T_2)0{,}9701}{EI} + \frac{27\times(T_1-T_2)\times 0{,}9701}{3EI} = 7{,}2\frac{p}{EI} + 26{,}0638\frac{T_1}{EI} -$$
$$-26{,}4523\frac{T_2}{EI} \qquad \text{(b)}$$

Por otra parte, los alargamientos δ_{GD} y δ_{BG} de los tirantes *DG* y *BG* pueden obtenerse en función de v_G y u_G (figura 5).

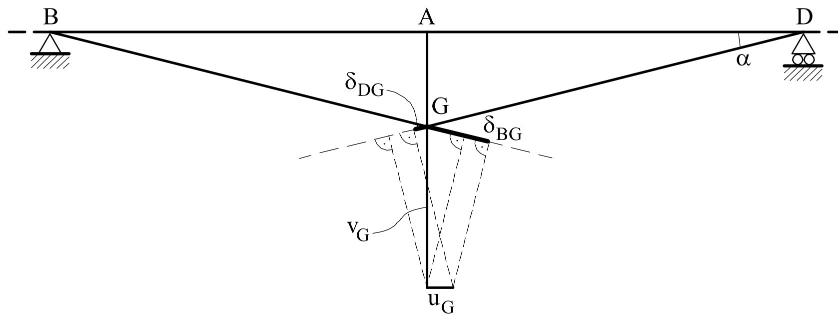


Fig. 5 Compatibilidad de movimientos en G

Se puede escribir:

$$\delta_{GD} = v_G \sin\alpha - u_G \cos\alpha \qquad \text{(c)}$$

$$\delta_{BG} = v_G \sin\alpha + u_G \cos\alpha \qquad \text{(d)}$$

y dado que

$$\delta_{GD} = \frac{T_1 \times \overline{GD}}{EA} \tag{e}$$

$$\delta_{BG} = \frac{T_2 \times \overline{BG}}{EA} \tag{f}$$

siendo *A* la sección de cada uno de los tirantes.

Introduciendo (a), (b), (e) y (f) en (c) y (d) se obtiene el sistema de ecuaciones

$$320{,}05\frac{p}{EI} - 34{,}9258\frac{T_1}{EI} + 23{,}0788\frac{T_2}{EI} = \frac{T_1 \times 12{,}34}{EA}$$

$$334{,}01\frac{p}{EI} + 15{,}6034\frac{T_1}{EI} - 28{,}204\frac{T_2}{EI} = \frac{T_2\, 12{,}34}{EA}$$

y sustituyendo

$$p = 10\, kN/m \quad ; \qquad A = 6\, cm^2 \quad ; \qquad I = 33\,740\ cm^4$$

se obtienen los valores de T_1 y T_2

$$T_1 = 170{,}6\ kN$$

$$T_2 = 170{,}8\ kN$$

En la figura 6 pueden verse dibujadas las leyes de esfuerzos

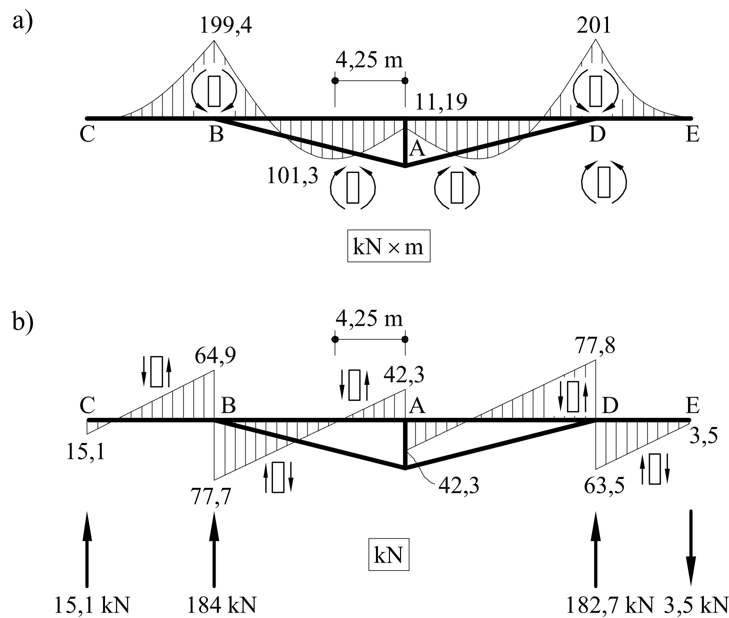


Fig. 6 a) Ley de momentos flectores.
b) Ley de esfuerzos cortantes y reacciones.

Problema 10.30 *En la estructura de la figura 1, la pieza E'D'ADE es una pieza metálica formada por un IPE 450. Asimismo, las piezas C'D', CD y AB están formadas por el mismo material y la misma sección. Las piezas E'C', C'B, BC y CE son tirantes de 2 cm² de sección.*

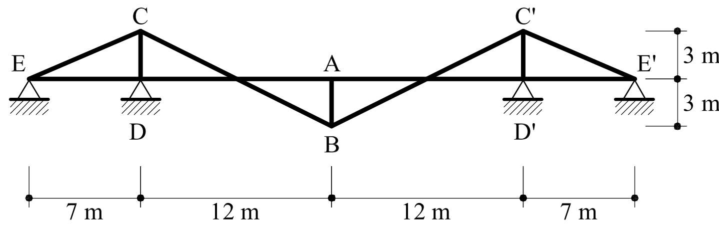


Fig. 1. Viga continua correspondiente al problema resuelto 10.30

Sobre la pieza recta horizontal actúa una carga uniformemente repartida vertical descendente de valor $p = 3\ kN/m$. *Determinar las leyes de esfuerzos en todas las piezas.*

-Módulo de Elasticidad del acero $E = 210\ GPa$.

Solución

La estructura es simétrica y por lo tanto para su resolución se trabajará únicamente con la mitad de ella (figura 2).

Sean:

δ_C : Movimiento horizontal del punto *C*.

ΔL_{CE} : Variación de longitud del tirante *CE*.

ΔL_{CB} : Variación de longitud del tirante *CB* (nótese que en la figura 2 $\Delta L_{CB} = B_1B_2$)

δ_A : Movimiento vertical tanto del punto *A* como del punto *B* (en la figura 2, $\delta_A = BB_3$)

T_{CE} : Esfuerzo en el tirante *CE*.

T_{BC} : Esfuerzo en el tirante *CB*.

F : Suma vectorial de los esfuerzos T_{CB} y $T_{C'B}$

En la figura 2 puede verse la composición de movimientos.

Las ecuaciones de compatibilidad se obtendrán al igualar en los tirantes y en la viga los movimientos en *C* y en *B*. Por lo tanto, en primer lugar se obtendrán los valores de δ_C y de δ_A en función de T_{CE} y de T_{CB}.

- *Nudo C. Valor de* δ_C *en función de* T_{CE} *y* T_{CB} *:*

  Es fácil ver que

$$\Delta L_{CE} = \delta_C \sin\alpha$$

es decir:

$$\frac{T_{CE}\ L_{CE}}{E\,\omega}=\delta_C \sin\alpha$$

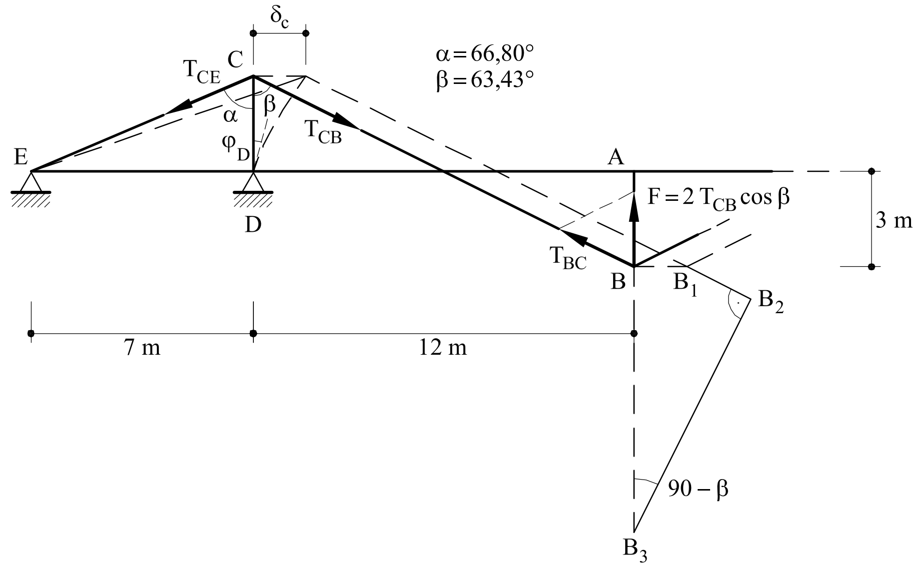


Fig. 2. Movimientos

O sea:

$$\delta_C=\frac{T_{CE}\ L_{CE}}{\sin\alpha\ E\,\omega}$$

y como $E\,\omega=42\ 000\,kN$

$$\delta_C=1{,}973\times 10^{-4}\,T_{CE}$$

- *Nudo B. Valor de δ_A en función de T_{CE} y T_{CB}:*

A partir de la composición de movimientos del punto *B*:

$$\overline{BB_3}\cos\beta=BB_1\sin\beta+B_1B_2$$

es decir:

$$\delta_A=\delta_C\tan\beta+\frac{\Delta L_{CB}}{\cos\beta}$$

Sustituyendo δ_C por el valor hallado antes, y teniendo presente que $\Delta L_{CB}=T_{CB}\ L_{CB}/E\,\omega$, se obtiene

$$\delta_A=3{,}946\times 10^{-4}\,T_{CE}+7{,}143\times 10^{-4}\,T_{CB}$$

- *Movimiento de los puntos B y C de la estructura reticular.*

Dado que

$$\delta_C = 3\varphi_D + \frac{\left(T_{CB}\sin\beta - T_{CE}\sin\alpha\right)\times 3^3}{3EI}$$

es preciso conocer φ_D. Para ello se estudia la viga *ED AD'E'* (figura 3) sometida a las cargas que se indican:

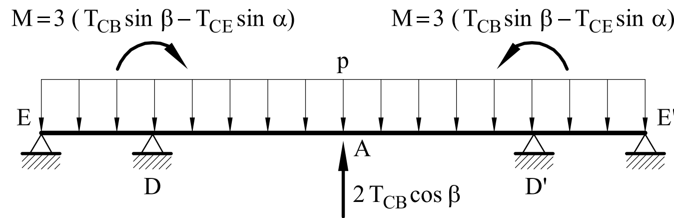


Fig. 3. Viga continua

Para resolver la viga de la figura 3, se descompone en vigas simples (figura 4).

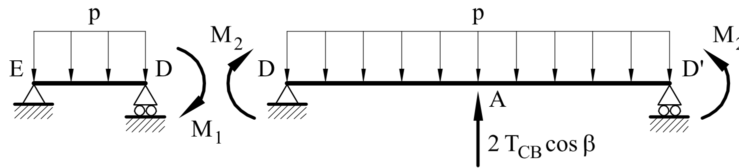


Fig. 4. Descomposición en vigas simples.

El giro en *D* del a pieza *ED* vale (positivo si horario):

$$\varphi_D^{ED} = \frac{M_1\times 7}{3\,EI} + \frac{p\times(7)^3}{24EI}$$

El giro en *D* de la pieza *DD'* vale (positivo si horario):

$$\varphi_D^{DD'} = \frac{M_2\times 24}{2EI} + \frac{p\times(24)^3}{24EI} - \frac{2T_{BC}\cos\beta\times(24)^2}{16EI}$$

Igualando y teniendo presente que $M_1 + M_2 = M = 3\left(T_{CB}\sin\beta - T_{CE}\sin\alpha\right)$ se obtiene:

$$M_1 = -2{,}31T_{CE} + 123{,}55$$

$$M_2 = 2{,}683T_{BC} - 0{,}45T_{CE} - 123{,}55$$

A partir de estos valores, se obtiene:

$$\varphi_D = \frac{(-2{,}31 T_{CE} + 123{,}55) \times 7}{3EI} - \frac{3 \times 7^3}{24 EI}$$

y teniendo en cuenta que $EI = 70\,854\, kN\, m^2$ resulta

$$\varphi_D = -0{,}76 \times 10^{-4} T_{CE} + 34{,}63 \times 10^{-4}$$

y por tanto:

$$\delta_C = 3\varphi_D + \frac{(T_{BC} \sin\beta - T_{CE} \sin\alpha) \times 3^3}{3EI} = 1{,}136 \times 10^{-4} T_{BC} -$$
$$- 3{,}45 \times 10^{-4} T_{CE} + 103{,}9 \times 10^{-4}$$

Igualando este valor al obtenido previamente se obtiene la primera ecuación:

$$1{,}136 \times 10^{-4} T_{BC} - 5{,}423 \times 10^{-4} T_{CE} + 103{,}9 \times 10^{-4} = 0$$

Por otra parte, la flecha en *A* de la viga continua vale:

$$\delta_A = \frac{M_2 \times 24^2}{8EI} + \frac{5}{384} \times \frac{3 \times (24)^4}{EI} - \frac{2 T_{BC} \cos\beta \times 24^3}{48 EI} =$$
$$= -9{,}09 \times 10^{-4} T_{BC} - 4{,}57 \times 10^{-4} T_{CE} + 573{,}6 \times 10^{-4}$$

Igualando este movimiento al obtenido previamente se obtiene:

$$10^{-4}(16{,}233 T_{BC} + 8{,}516 T_{CE} - 573{,}6) = 0$$

lo cual constituye la segunda ecuación.

Resolviendo el sistema:

$$T_{BC} = 22{,}78\, kN$$

$$T_{CE} = 23{,}144\, kN$$

En la figura 5 pueden verse representadas las leyes de momentos flectores.

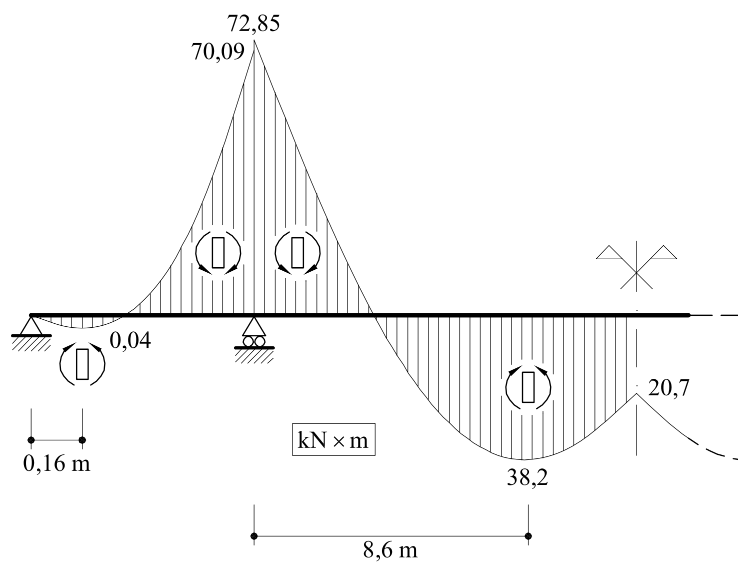


Fig. 5. Ley de momentos flectores

Capítulo 11:
Estructuras reticuladas

Problema 11.1 *Dado el pórtico de la figura 1, hallar:*

1. *Reacciones.*
2. *Ley de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles.*

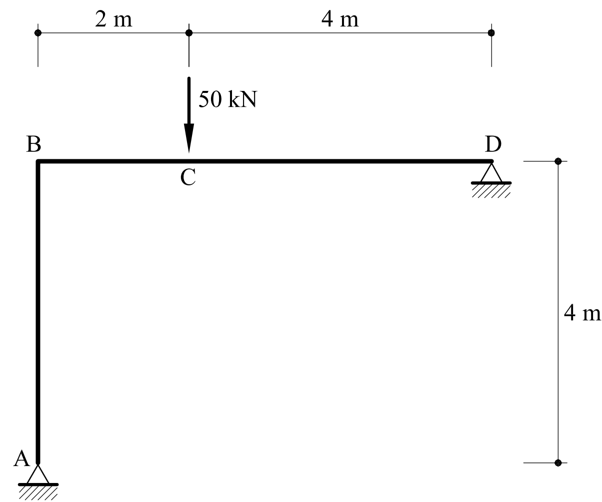


Fig. 1 Pórtico correspondiente al problema 11.1

Solución

La estructura es intraslacional y por lo tanto puede descomponerse en dos vigas simples con los apoyos fijos (figura 2). El valor del momento hiperestático en *B* se obtendrá estableciendo la igualdad de giros

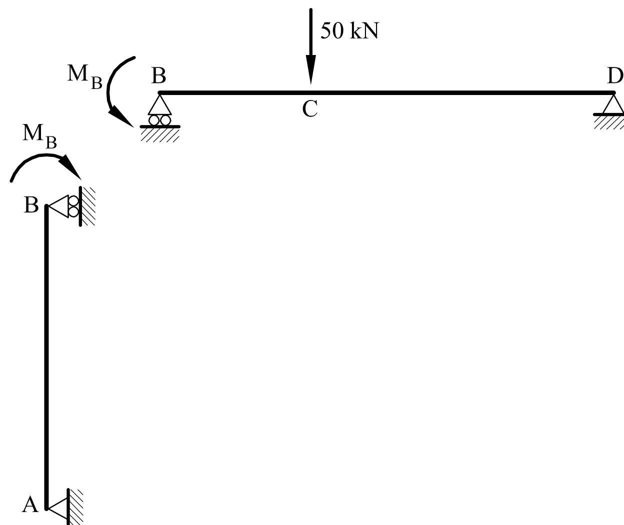


Fig. 2 Descomposición en vigas simples

$$\varphi_B^{AB} = -\frac{M_B \times 4}{3EI}$$

$$\varphi_B^{BD} = \frac{M_B \times 6}{3EI} - \frac{111{,}11}{EI}$$

Igualando

$$M_B = 33{,}33\, kN\, m$$

En la figura 3 pueden verse representadas las leyes de esfuerzos y las reacciones.

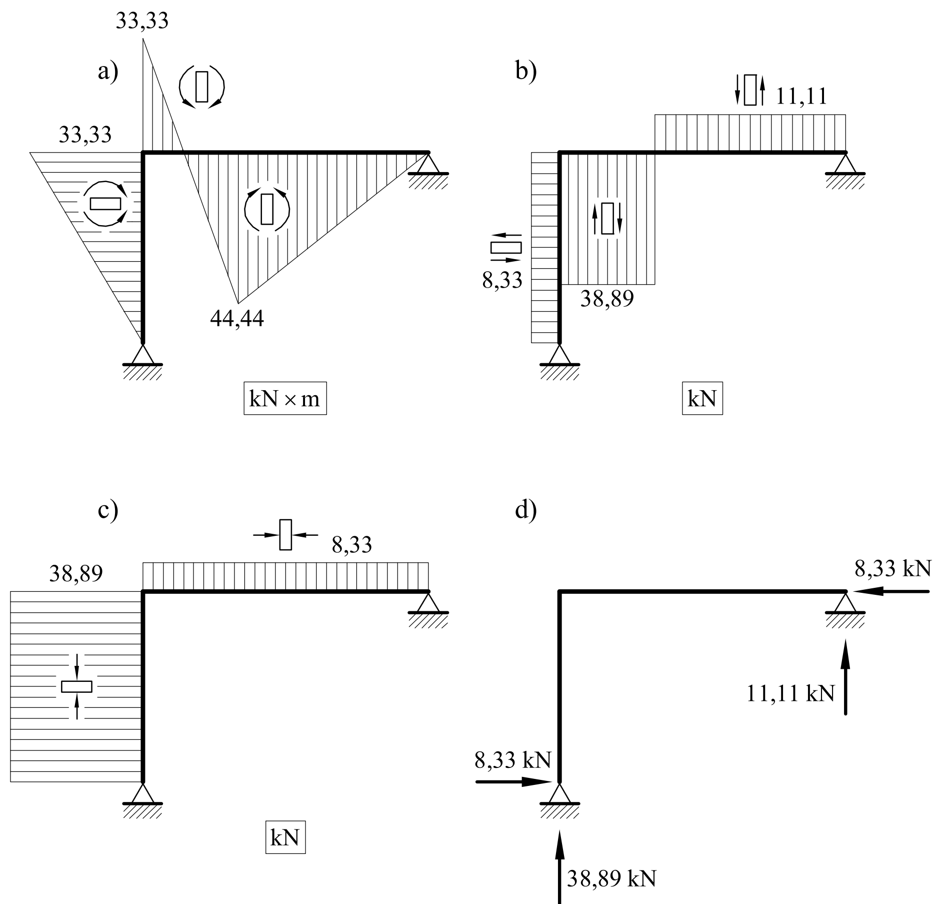


Fig. 3 Leyes de esfuerzos y reacciones

Problema 11.2 *Determinar la ley de momentos flectores en el marco triangular equilátero sometido a la carga vertical que se indica en la figura 1. Sólo se considera la deformación de flexión. Todas las barras tienen una rigidez* EI .

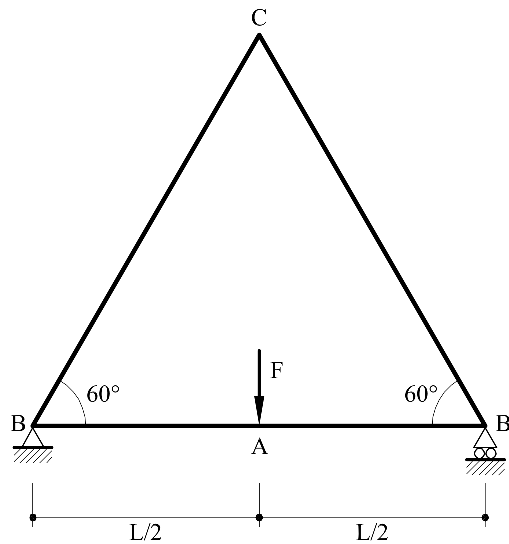


Fig. 1 Pórtico correspondiente al problema 11.2

Solución

Al ser la estructura intraslacional, puede descomponerse en vigas simples de apoyos fijos. Además, dado que hay simetría, el giro en el nudo superior es nulo. La única incógnita hiperestática es por tanto el giro en *B* y su valor se obtendrá igualando el giro en *B* en las piezas *CB* y *BB'* (figura 2).

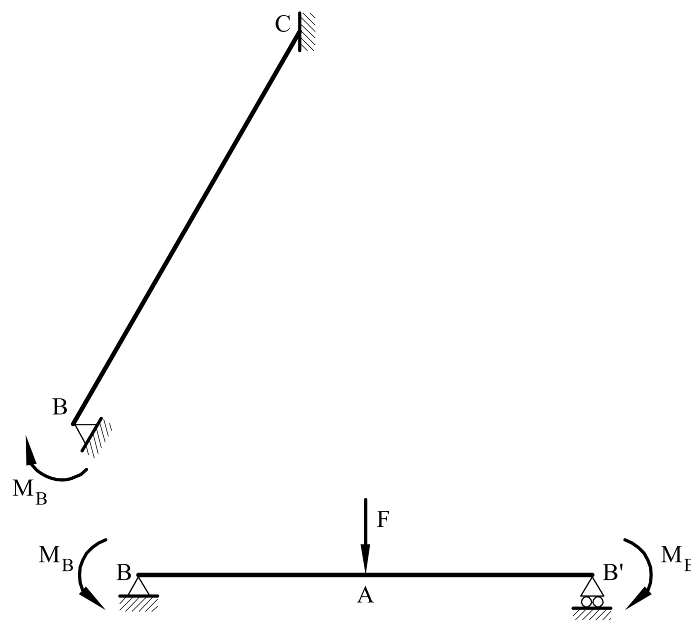


Fig. 2 Descomposición en vigas simples

$$\varphi_B^{BC} = -\frac{M_B\,L}{4\,EI}$$

$$\varphi_B^{BB'} = \frac{M_B\,L}{2\,EI} - \frac{F\,L^2}{16\,EI}$$

Igualando:

$$M_B = \frac{F\,L}{12} = 0{,}08333\,F\,L$$

En la figura 3 pueden verse representadas las leyes de momentos flectores.

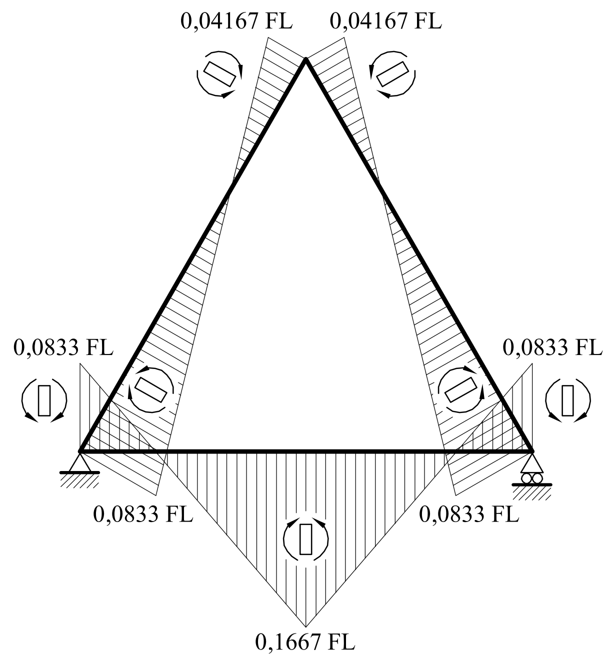


Fig. 3 Ley de momentos flectores

Problema 11.3 *Hallar la ley de momentos flectores y la deformada del pórtico de la figura 1. No se consideran deformaciones axiles. Todas las barras tienen una rigidez* EI .

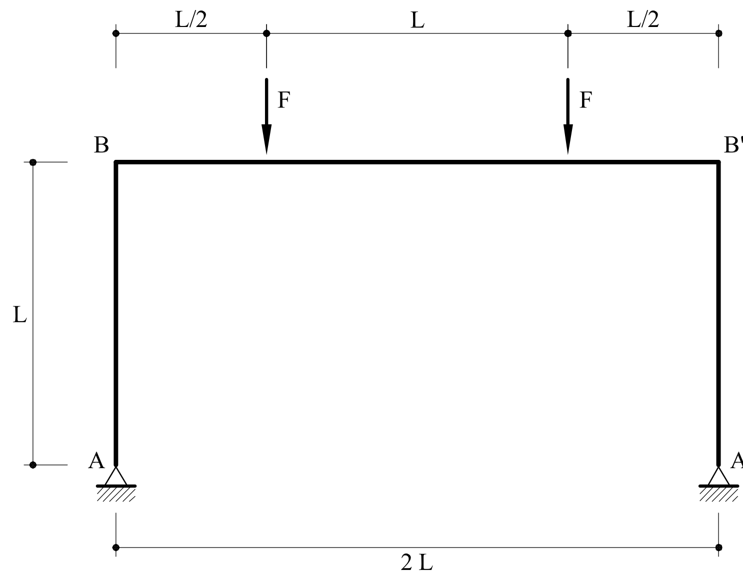


Fig. 1 Pórtico correspondiente al problema 11.3

Solución

Al ser el pórtico intraslacional puede descomponerse en vigas simples con apoyos fijos. Además, al ser simétrico los giros y los momentos en *B* y *B'* serán iguales y de sentido contrario. El momento hiperestático M_B se obtendrá de imponer la igualdad de giros en *B* (figura 2).

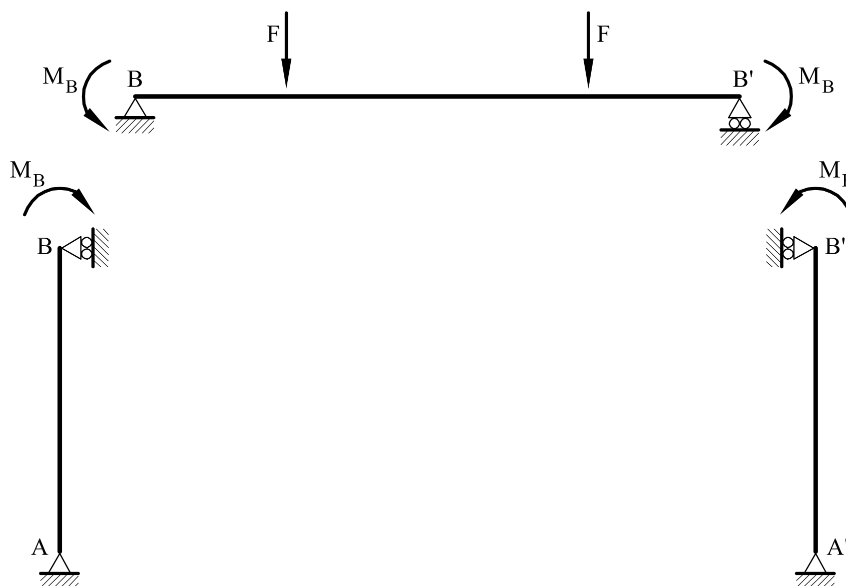


Fig. 2 Descomposición en vigas simples

$$\varphi_B^{AB} = -\frac{M_B L}{3EI}$$

$$\varphi_B^{BB'} = \frac{M_B \times 2L}{2EI} - \frac{3FL^2}{8EI}$$

Igualando:

$$M_B = \frac{9}{32} FL = 0{,}28125\, FL$$

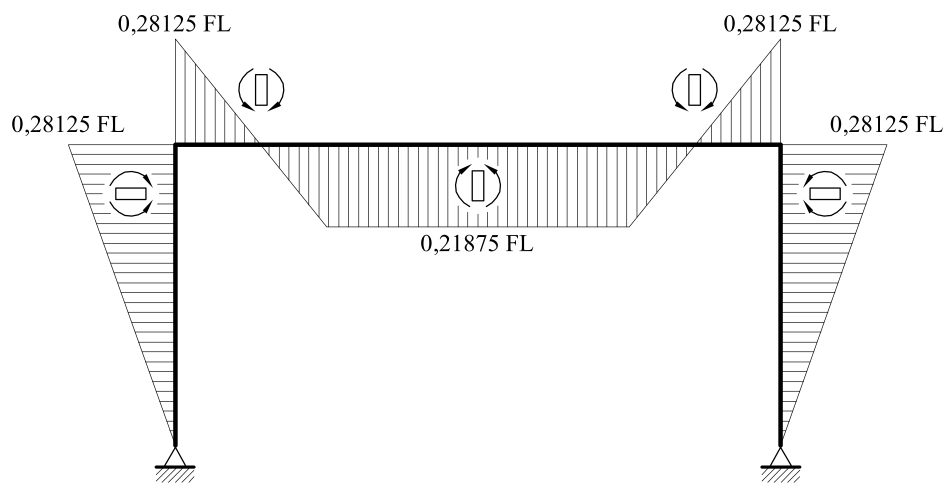


Fig. 3 Ley de momentos flectores

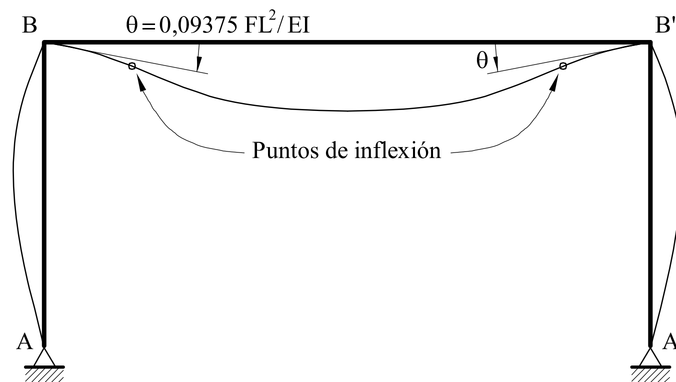


Fig. 4 Deformada

Problema 11.4 *Un marco rectangular de rigidez constante a lo largo del mismo* $EI = 10^4 \, kN \, m^2$*, está sometido a las fuerzas que se indican en la figura 1.*

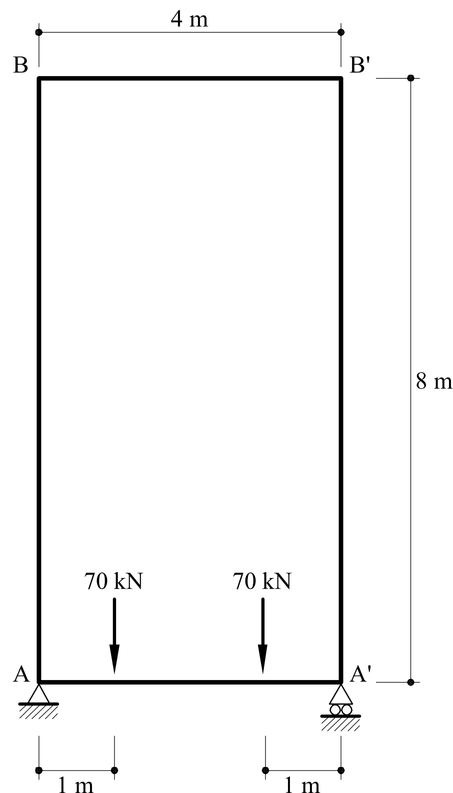


Fig.1 Marco correspondiente al problema 11.4

SE PIDE:

1. *Calcular la ley de momentos flectores.*
2. *Calcular los corrimientos de los puntos centrales de los dinteles superior y inferior.*
3. *Dibujar la deformada del marco.*

Solución:

La estructura es intraslacional y por lo tanto puede descomponerse en vigas simples con apoyos fijos. Además, es simétrica. Los momentos en A y B se obtendrán de la igualación de giros (figura 2).

- El giro en A de las dos barras que concurren al nudo vale

$$\varphi_A^{AA'} = \frac{M_A \times 4}{2EI} - \frac{105}{EI}$$

$$\varphi_A^{AB} = -\frac{M_A \times 8}{3EI} + \frac{M_B \times 8}{6EI}$$

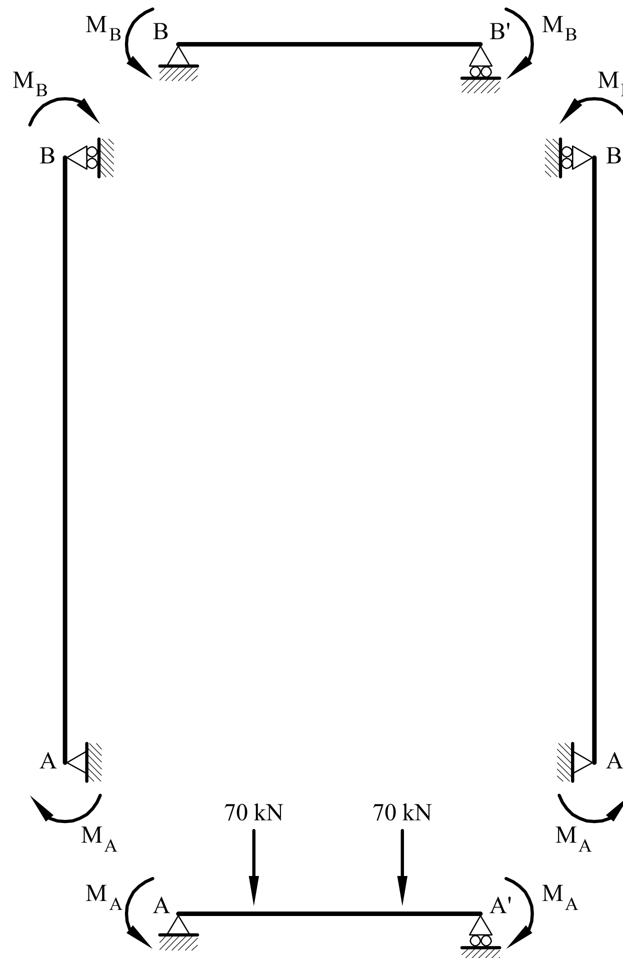


Fig. 2 Descomposición en vigas simples.

Igualando:

$$4{,}667\,M_A - 1{,}333\,M_B = 105$$

- El giro en *B* de las dos barras que concurren en el nudo vale

$$\varphi_B^{AB} = -\frac{M_B \times 8}{3\,EI} + \frac{M_A \times 8}{6EI}$$

$$\varphi_B^{BB'} = \frac{M_B \times 4}{2EI}$$

Igualando:

$$1{,}333\,M_A - 4{,}667\,M_B = 0$$

Resolviendo el sistema

$M_A = 24{,}5\,kN\,m$ $\qquad\qquad$ $M_B = 7\,kN\,m$

En la figura 3 pueden verse representadas las leyes de momentos flectores

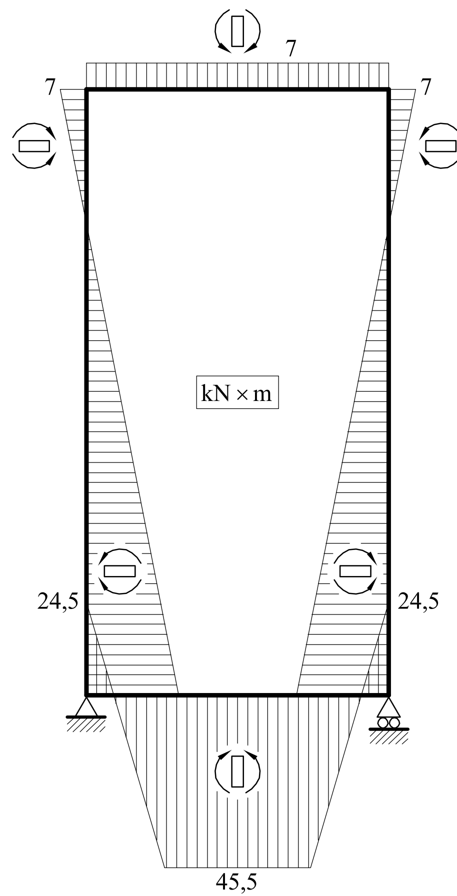


Fig.3 Ley de momentos flectores

- Flecha máxima en *BB'* y en *AA'*

$$\upsilon_{\max}^{BB'} = 0{,}14\,cm$$

$$\upsilon_{\max}^{AA'} = 0{,}79\,cm$$

En la figura 4 puede verse representada la deformada

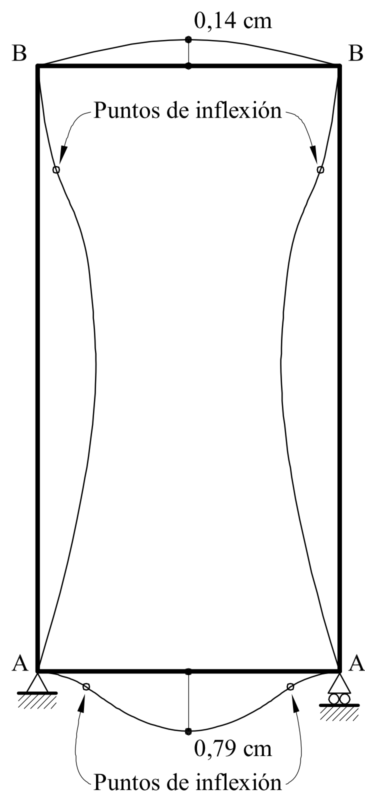


Fig.4 Deformada

Problema 11.5 *En la estructura de la figura 1, el producto* EI *vale* $EI = 2\,000\,kN \times m^2$. *Hallar:*

- *Momento en B*
- *Giro en B*
- *Reacción horizontal en A*
- *Reacción vertical en A*

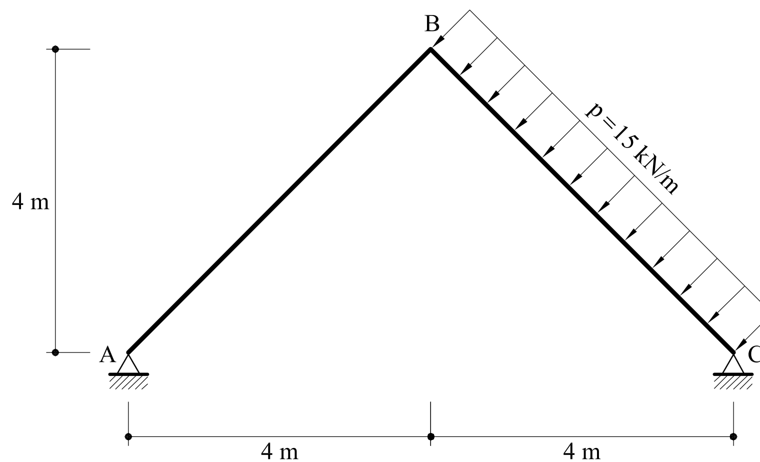


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 11.5

Solución

Al ser la estructura intraslacional se descompone en vigas simples sobre apoyos fijos (fig. 2)

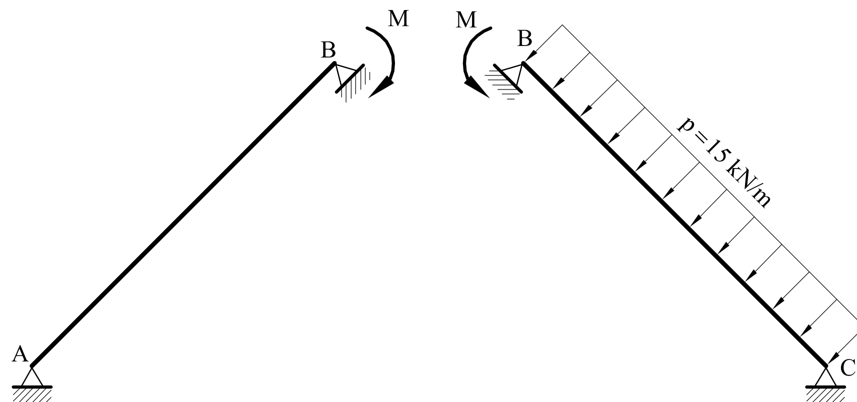


Fig. 2 Descomposición en vigas simples

Los giros en B de las piezas AB y BC valen

$$\varphi_B^{AB} = -\frac{M\,4\sqrt{2}}{3\,EI}$$

$$\varphi_B^{BC} = -\frac{15\left(4\sqrt{2}\right)^3}{24\,EI} + \frac{M\,4\sqrt{2}}{3\,EI}$$

Igualando se obtiene

$$M = 30\,kN\,m$$

Sustituyendo en los giros

$$\varphi_B = -\frac{30 \times 4\sqrt{2}}{3 \times 2\,000} = -0{,}0283\ rdn$$

Las reacciones en *A* valen

$$V_A = 30\,kN$$

$$H_A = 37{,}5\,kN$$

Problema 11.6 *Determinar y dibujar los momentos flectores en la estructura de la figura 1.*

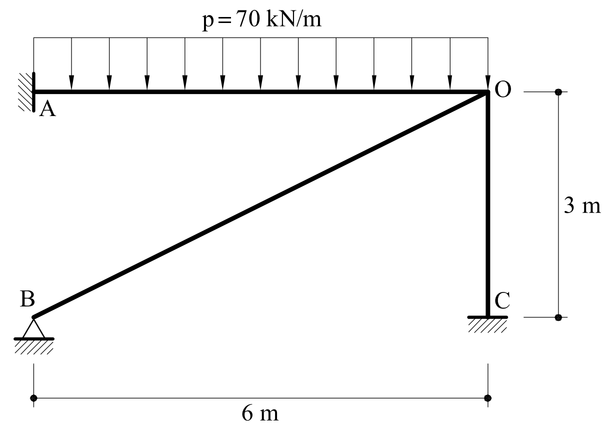


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 11.6

Solución

Se igualarán los giros en O de las distintas barras que concurren al nudo.

$$\varphi_{OA} = \frac{M_{OA} 6}{4EI} + \frac{70 \times 6^3}{48EI}$$

$$\varphi_{OB} = \frac{M_{OB} \times 6{,}71}{3EI}$$

$$\varphi_{OC} = \frac{M_{OC} \times 3}{4EI}$$

$$1{,}5 M_{OA} + 315 = 2{,}24 M_{OB} = 0{,}75 M_{OC}$$

Además

$$M_{OA} + M_{OB} + M_{OC} = 0$$

y resolviendo

$$M_{OA} = -152{,}6 \ kN\,m \quad ; \qquad M_{OB} = 38{,}35 \ kN\,m \quad ; \qquad M_{OC} = 114{,}3 \ kN\,m$$

En la figura 2 pueden verse representadas las leyes de momentos

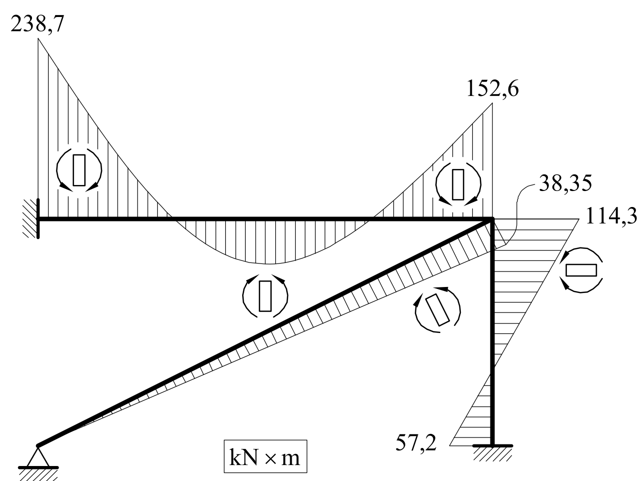


Fig. 2 Ley de momentos flectores

Problema 11.7 *En el pórtico de la figura 1, todas las piezas tienen la misma inercia. Mediante la descomposición en vigas simples hallar:*

- *Ley de momentos flectores en el soporte izquierdo.*
- *Ley de esfuerzos cortantes en el soporte derecho.*

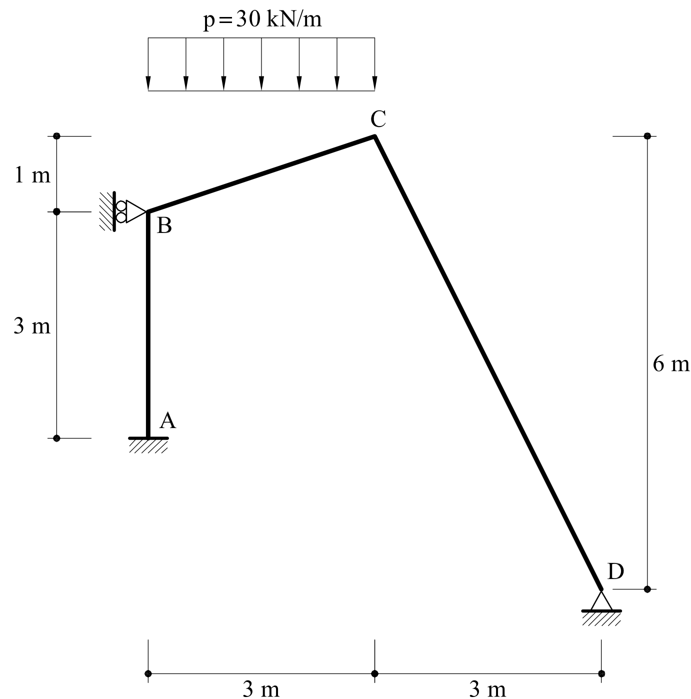


Fig 1 Pórtico correspondiente al problema 11.7

Solución

El pórtico es intraslacional y tres veces hiperestático. Se descompondrá en vigas simples sobre apoyos fijos (figura 2) tomándose como incógnitas hiperestáticas los momentos en *B* y *C*.

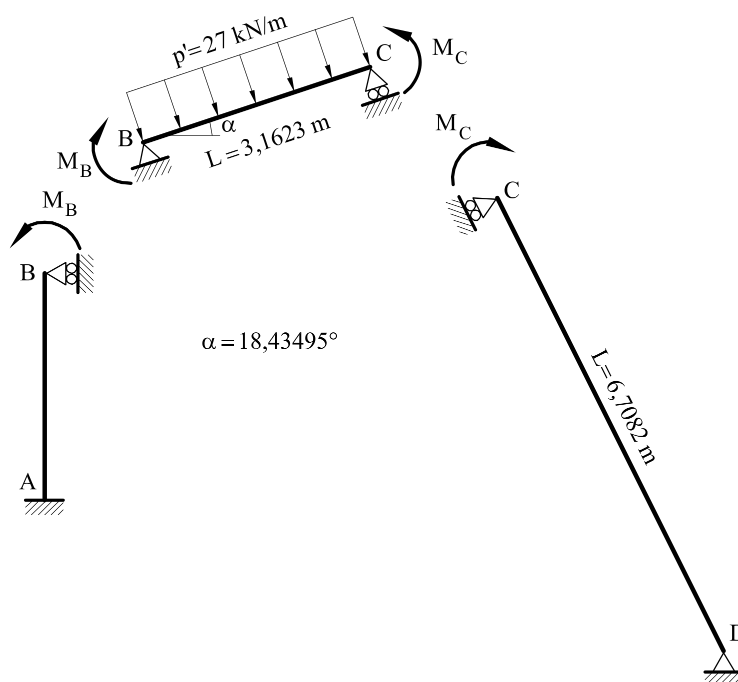


Fig .2 Descomposición en vigas simples

La carga $p = 30\ kN/m$ se descompone en su componente normal a la barra BC y en su componente tangencial (no dibujada en la figura 2). La componente normal p' vale

$$p' = p\ \cos^2 \alpha = 27\,kN/m$$

Los giros en B valen:

$$\varphi_B^{AB} = \frac{3M_B}{4EI} = 0{,}75\frac{M_B}{EI}$$

$$\varphi_B^{BC} = -\left(\frac{M_B \cdot 3{,}1623}{3EI} + \frac{M_C \cdot 3{,}1623}{6EI} + \frac{27 \times (3{,}1623)^3}{24EI}\right) = -1{,}0541\frac{M_B}{EI} - 0{,}52705\frac{M_C}{EI} - 35{,}5759\frac{1}{EI}$$

Igualando:

$$1{,}8041M_B + 0{,}52705M_C = -35{,}5759$$

Los giros en C valen

$$\varphi_C^{BC} = \frac{M_C \cdot 3{,}1623}{3EI} + \frac{27 \times (3{,}1623)^3}{24EI} = 1{,}0541\frac{M_C}{EI} + 0{,}52705\frac{M_B}{EI} + 35{,}5759$$

$$\varphi_C^{DC} = -\frac{M_C \cdot 6{,}7082}{3EI} = -2{,}2361\frac{M_C}{EI}$$

Igualando:

$$0{,}52705M_B + 3{,}2902M_C = -35{,}5759$$

Con lo cual el sistema de ecuaciones queda:

$$1{,}8041M_B + 0{,}52705M_C = -35{,}5759$$

$$0{,}52705M_B + 3{,}2902M_C = -35{,}5759$$

Resolviendo

$$M_B = -17{,}3736\,kN \times m$$

$$M_C = -8{,}02971\,kN \times m$$

En la figura 3 puede verse representada la ley de momentos flectores y cortantes.

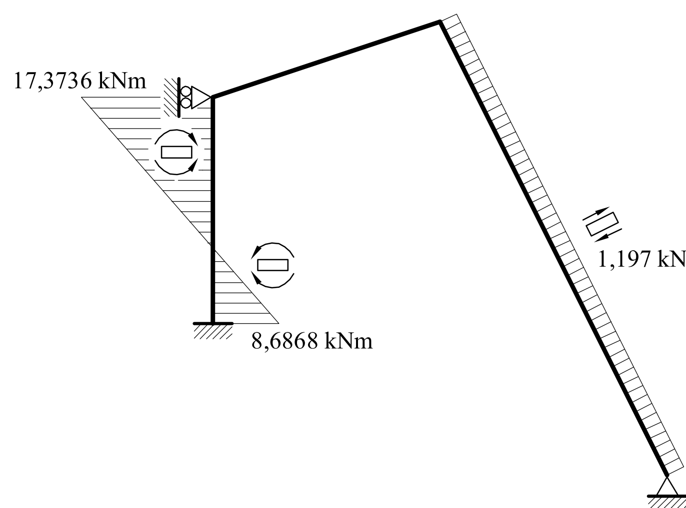


Fig. 3 Flectores en AB y cortantes en CD

Problema 11.8 *Dada la estructura de la figura 1, hallar:*

1. *Reacciones*
2. *Ley de momentos flectores*

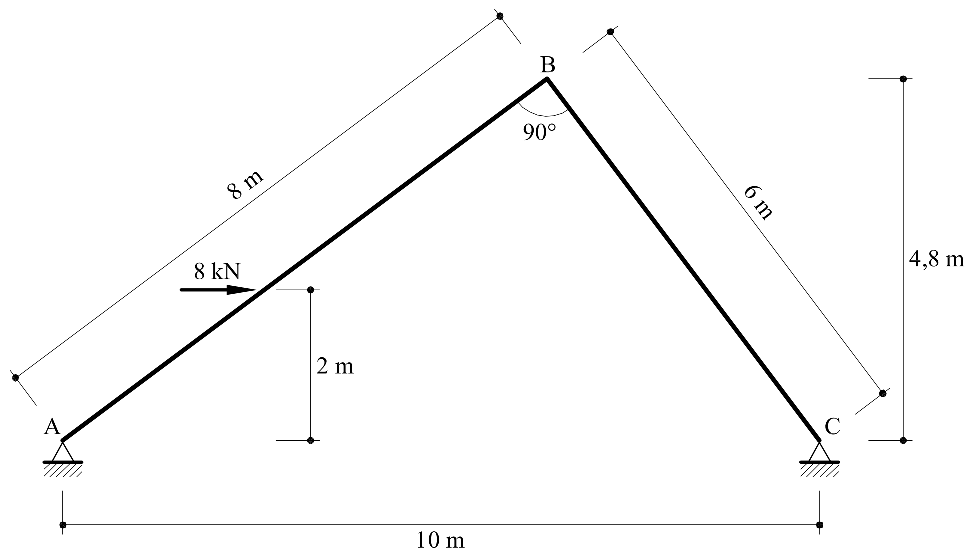


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 11.8

Solución

Al ser la estructura intraslacional se descompone en vigas simples de apoyos fijos. Se tomará como incógnita hiperestática el valor del momento en *B* (figura 2)

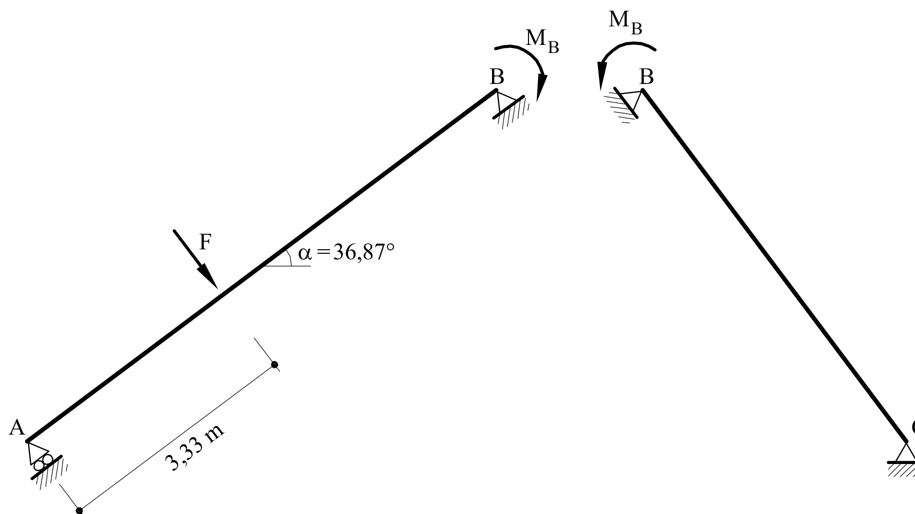


Fig. 2 Descomposición en vigas simples

La fuerza de $8\ kN$ se descompone en su componente normal *F* y en su componente tangencial (no dibujada en la figura 2).

$$F = 8 \sin \alpha = 4{,}8\, kN$$

Los giros en *B* valdrán

$$\varphi_B^{AB} = \frac{17{,}63}{EI} - \frac{8\,M_B}{3\,EI}$$

$$\varphi_B^{BC} = \frac{6\,M_B}{3\,EI}$$

Igualando giros:

$$M_B = 3{,}78 \;\; kN\,m$$

La reacción vertical en *A* se obtiene tomando momentos en *C*:

$$-2 \times 8 + 10\,V_A = 0$$

$$V_A = 1{,}6\,kN$$

La reacción horizontal en *A* se obtiene tomando momentos en *B* para toda la pieza *AB*:

$$-M_B + 8 \times (4{,}8 - 2) + V_A \times 8\cos\alpha - H_A \times 4{,}8 = 0$$

Es decir:

$$H_A = 6{,}013 \;\; kN$$

En la figura 3 pueden verse representadas las leyes de esfuerzos y las reacciones.

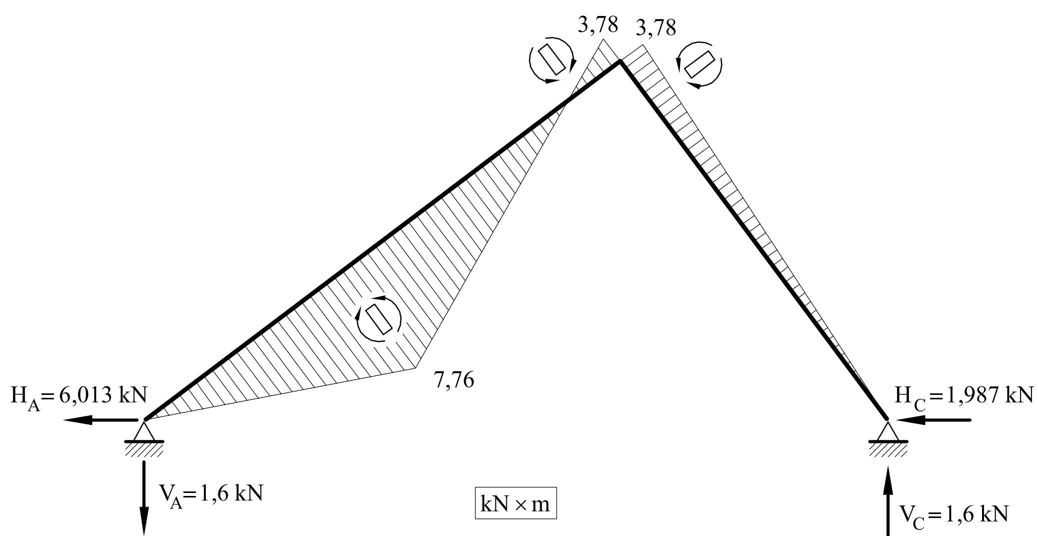


Fig. 3 Leyes de esfuerzos y reacciones

Problema 11.9 *En la estructura de la figura 1, determinar las leyes de esfuerzos utilizando el teorema de Castigliano.*

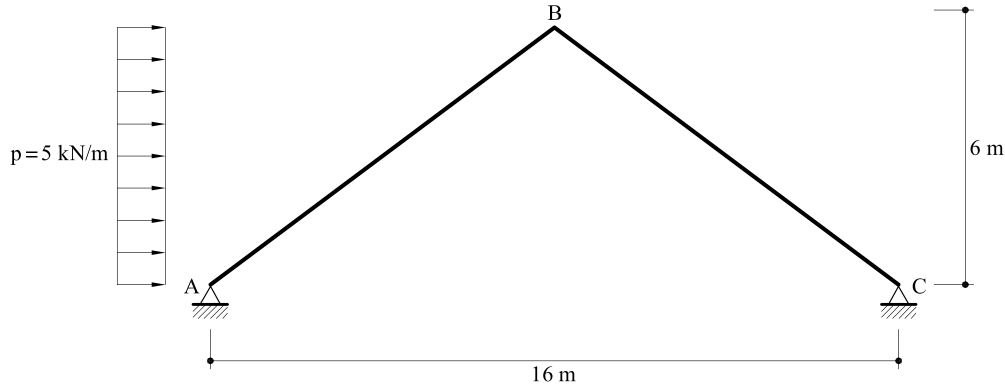


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 11.9

Solución

Se tomará como incógnita hiperestática la reacción horizontal en *B*. Con el criterio de ejes representado en la figura 2 las leyes de momentos flectores se escriben:

$$M_f\Big|_A^B = (16 - s\cos\beta)\,V - H\,s\sin\beta - \frac{p(6 - s\sin\beta)^2}{2}$$

$$M_f\Big|_B^C = (8 - s\cos\beta)V - (6 - s\sin\beta)H$$

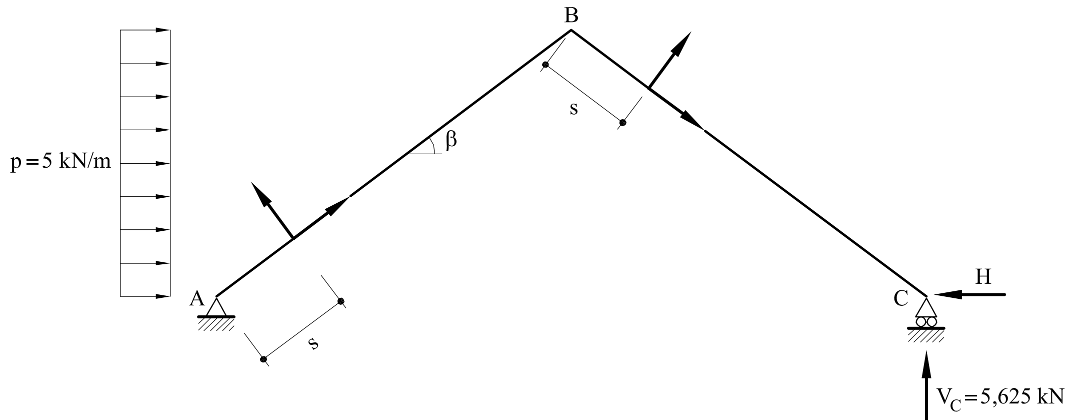


Fig. 2 Ejes locales

$$\frac{\partial M_f\Big|_A^B}{\partial H} = -s\sin\beta$$

$$\frac{\partial M_f\Big|_B^C}{\partial H} = -(6 - s\sin\beta)$$

El movimiento horizontal de *C* es cero:

$$u_C = \int_A^B M_f\Big|_A^B \frac{\partial M_f\Big|_A^B}{\partial H} ds + \int_B^C M_f\Big|_B^C \frac{\partial M_f\Big|_B^C}{\partial H} ds = 0$$

Sustituyendo en las integrales los valores de los momentos flectores y de sus derivadas se obtiene

$$H = 9{,}375\ kN$$

La ley de momentos flectores puede verse representada en la figura 3

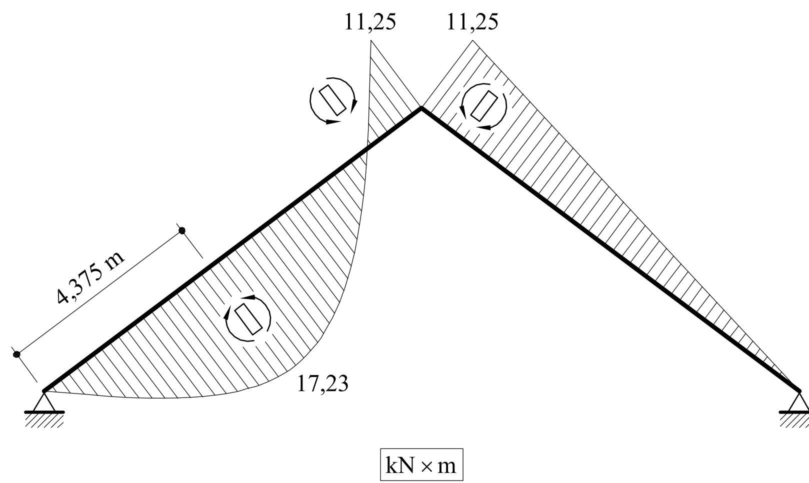


Fig. 3 Ley de momentos flectores

Problema 11.10 *Hallar la ley de momentos flectores cortantes y axiles en la estructura que se representa en la figura 1*

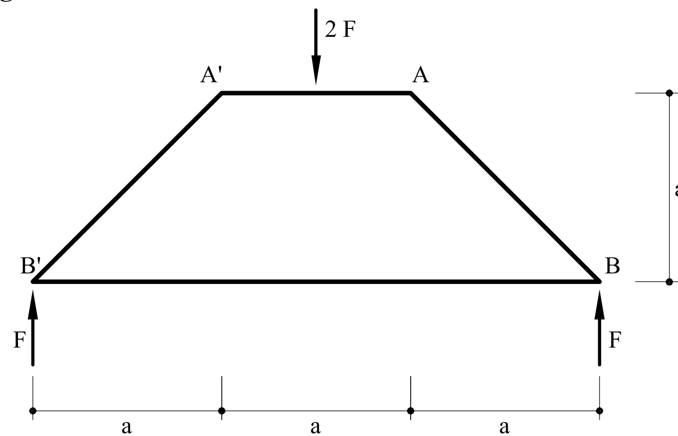


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 11.10

Solución

La estructura es intraslacional y puede descomponerse en vigas simples (figura 2)

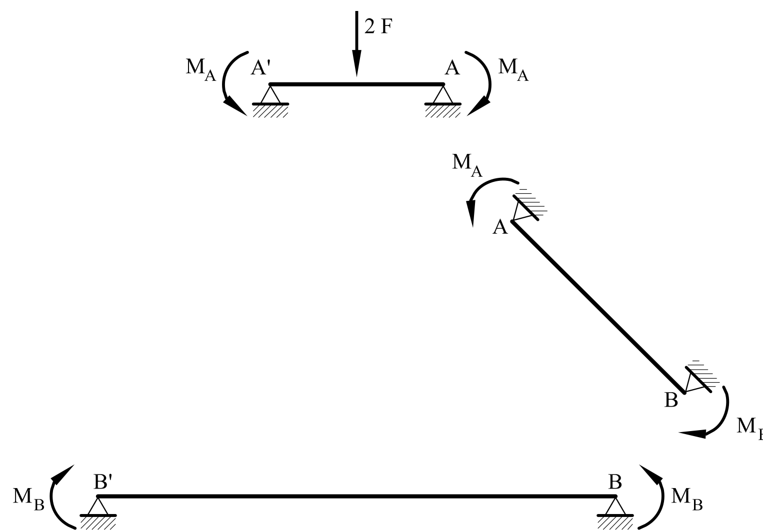


Fig. 2 descomposición en vigas simples

El giro en *A* vale

$$\left.\begin{aligned} \varphi_A^{AA'} &= \frac{2Fa^2}{16EI} - \frac{M_A a}{2EI} \\ \varphi_A^{AB} &= \frac{M_A a\sqrt{2}}{3EI} + \frac{M_B a\sqrt{2}}{6EI} \end{aligned}\right\} Son\ iguales$$

El giro en *B* vale:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_B^{AB} &= -\frac{M_A a\sqrt{2}}{6EI} - \frac{M_B a\sqrt{2}}{3EI} \\ \varphi_B^{BB'} &= \frac{M_B\, 3a}{2EI} \end{aligned}\right\} Son\ iguales$$

Igualando giros se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 0{,}9714\,M_A + 0{,}2357\,M_B = 0{,}125\,F\,a \\ 0{,}2357\,M_A + 1{,}9714\,M_B = 0 \end{array}\right\}$$

$$M_A = 0{,}1325\,F\,a$$

$$M_B = -0{,}0158\,F\,a$$

En la figura 3 puede verse representada la ley de momentos flectores.

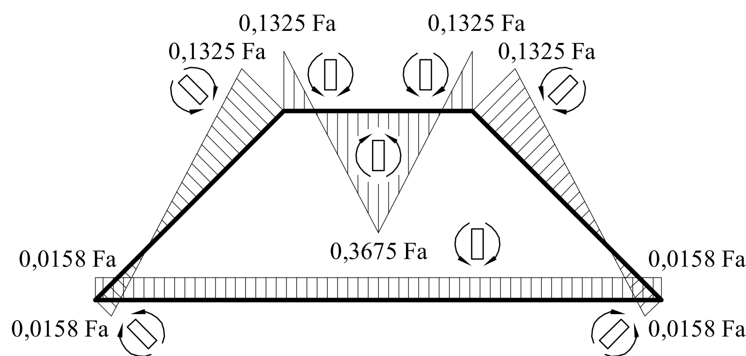


Fig. 3 Ley de momentos flectores

En la figura 4 se representa la ley de cortantes.

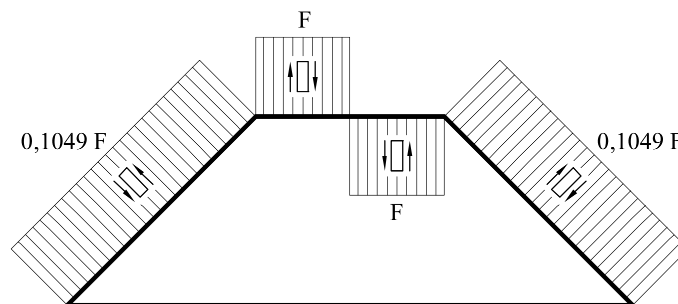


Fig. 4 Ley de cortantes

Del equilibrio del nudo *A* (fig. 5) se obtienen los axiles en *AA'* y *AB*

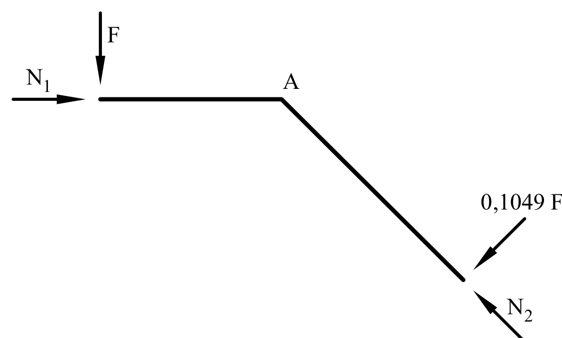


Fig. 5 Equilibrio del nudo A

Equilibrio del nudo *A*

$$N_1 = 1{,}1484\,F$$

$$N_2 = 1{,}5191\,F$$

En la figura 6 se representa la ley de esfuerzos axiles.

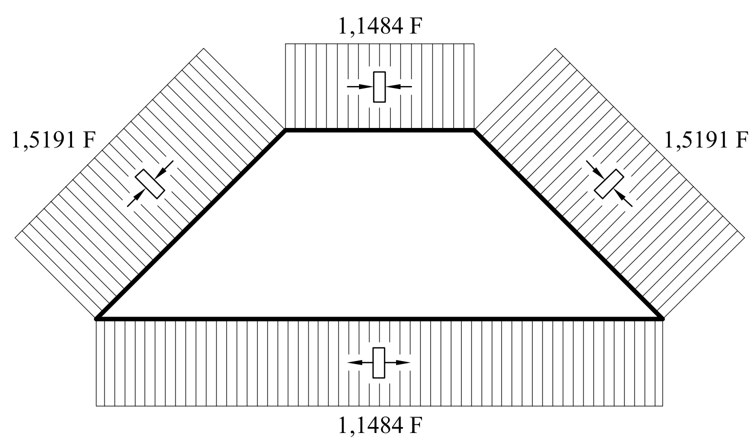


Fig. 6 Ley de esfuerzos axiles

Problema 11.11 *Utilizando la descomposición en vigas simples, determinar las leyes de esfuerzos en la estructura de la figura 1.*

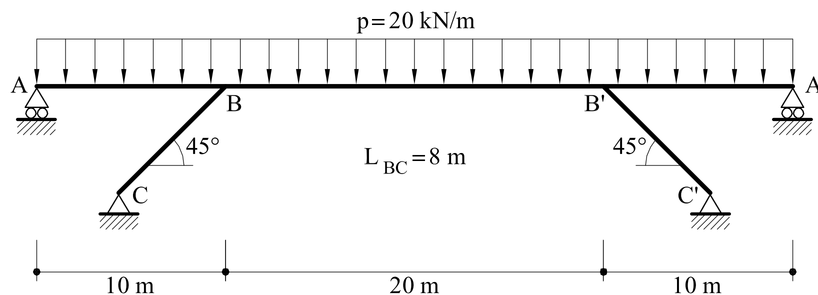


Fig.1 Pórtico correspondiente al problema 11.11

Solución

Dado que la estructura es simétrica, bastará con igualar giros en el punto *B*

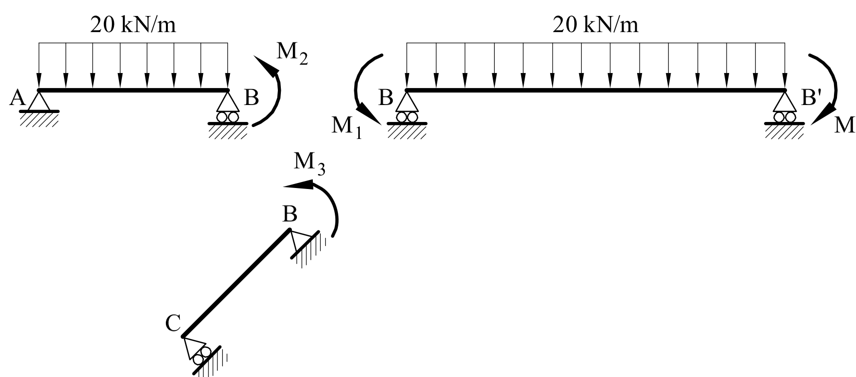


Fig.2 Descomposición en vigas simples.

Los giros en el punto *B* de cada barra valen:

$$\varphi_B^{AB} = \frac{20 \times 10^3}{24EI} + \frac{10M_2}{3EI}$$

$$\varphi_B^{BB'} = -\frac{20 \times 20^3}{24EI} + \frac{M_1 \times 20}{2EI}$$

$$\varphi_B^{BC} = \frac{M_3 \times 8}{3EI}$$

Igualando se obtiene:

$$2500 + 10M_2 = -20000 + 30M_1 = 8M_3$$

que juntamente con $M_1 + M_2 + M_3 = 0$, permite obtener los valores de los momentos en *B*

$M_1 = 612{,}9\,kNm$ $\qquad M_2 = -411{,}29\,kNm$ $\qquad M_3 = -201{,}61\,kNm$

Los esfuerzos cortantes se obtendrán a partir del equilibrio de cada una de las barras (figura 3)

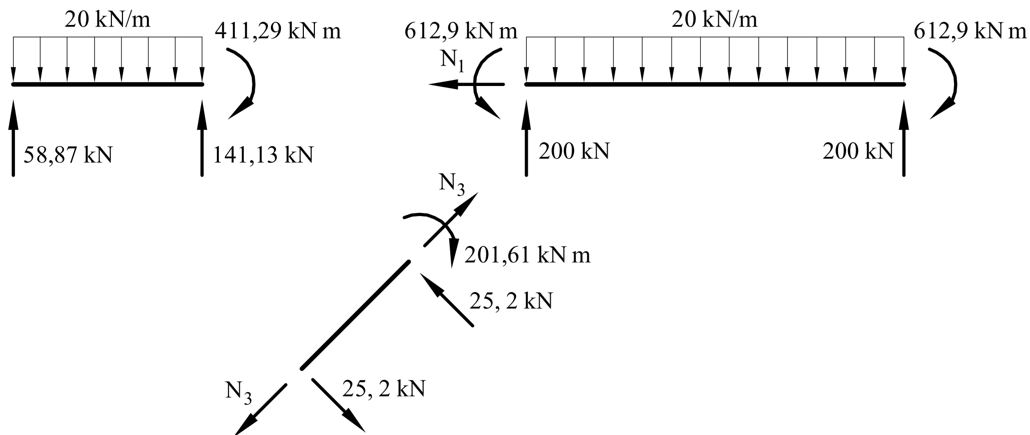


Fig.3 Esfuerzos cortantes en barras

Para obtener los esfuerzos axiles, se realiza el equilibrio de fuerzas en el nudo *B* (figura 4):

- Suma de fuerzas horizontales igual a cero:

$$N_1 - N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} + 25{,}2\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

- Suma de fuerzas verticales igual a cero

$$N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} + 141{,}13 + 200 + 25{,}2\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Resolviendo se obtiene

$N_1 = -376{,}71\,kN$ $\qquad N_3 = -507{,}55\,kN$

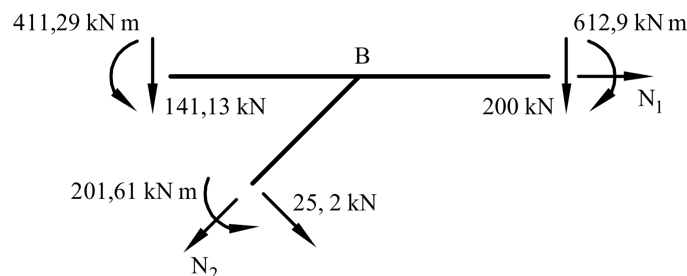


Fig.4 Equilibrio de fuerzas en el nudo B

Con los valores anteriores se pueden dibujar las leyes de esfuerzos (figuras 5,6 y 7)

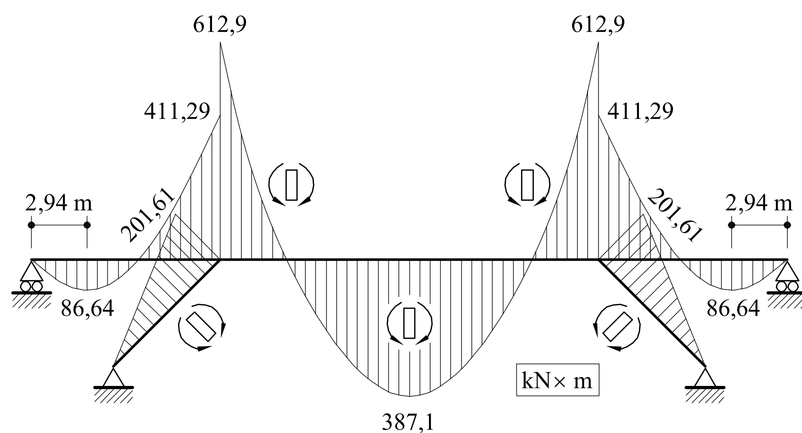


Fig.5 Ley de momentos flectores

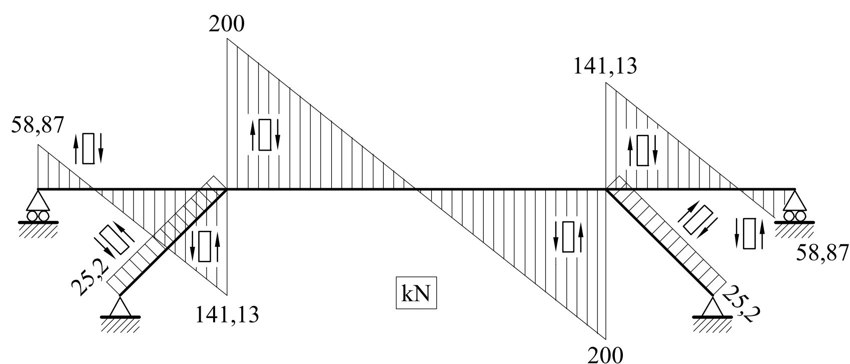


Fig.6 Ley de esfuerzos cortantes

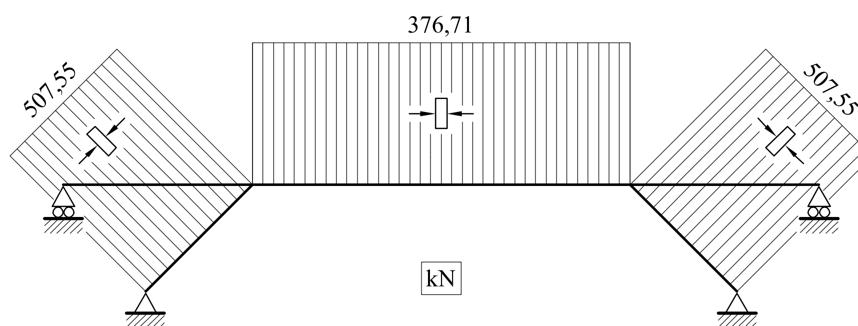


Fig.7 Ley de esfuerzos axiles

Problema 11.12 *Mediante la descomposición en vigas simples, determinar las leyes de esfuerzos de la estructura de la figura 1. Todas las piezas tienen la misma inercia.*

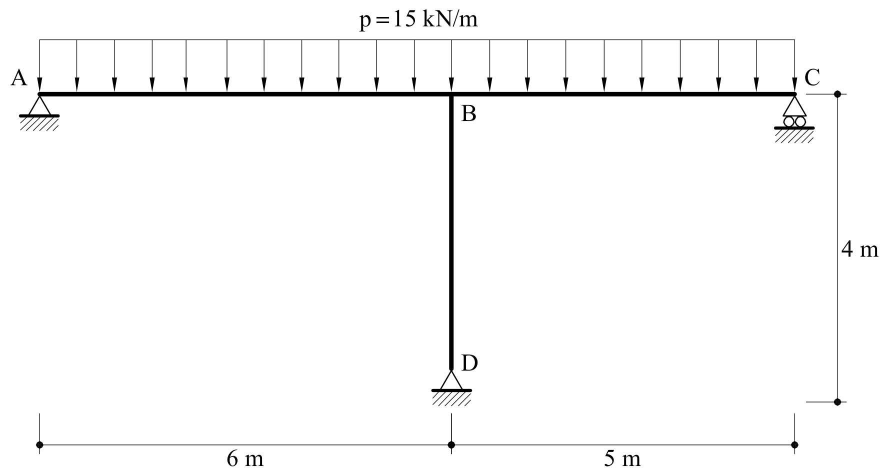


Fig.1 Estructura correspondiente al problema 11.12

Solución

En la figura 2 puede verse la descomposición en vigas simples.

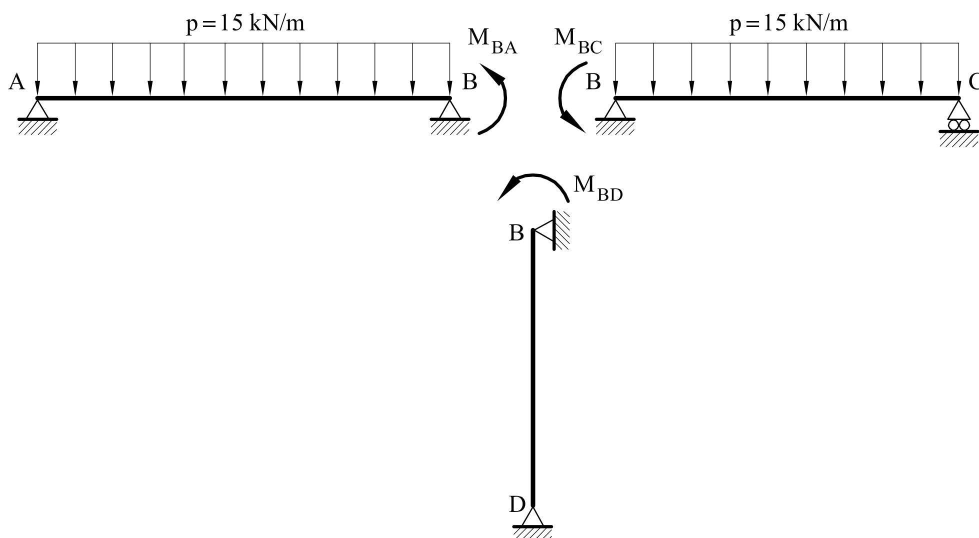


Fig.2 Descomposición en vigas simples

El giro en B para cada una de las piezas vale:

$$\varphi_B^{AB} = \frac{6\,M_{BA}}{3\,E\,I} + \frac{15 \times 6^3}{24\,E\,I}$$

$$\varphi_B^{BC} = \frac{5\,M_{BC}}{3\,E\,I} - \frac{15 \times 5^3}{24\,E\,I}$$

$$\varphi_B^{BD} = \frac{4M_{BD}}{3EI}$$

Igualando giros:

$$M_{BA} = -61{,}92\,kNm$$
$$M_{BC} = 53{,}56\,kNm$$
$$M_{BD} = 8{,}36\,kNm$$

A partir de los valores anteriores, se dibujan las leyes de esfuerzos (figura 3)

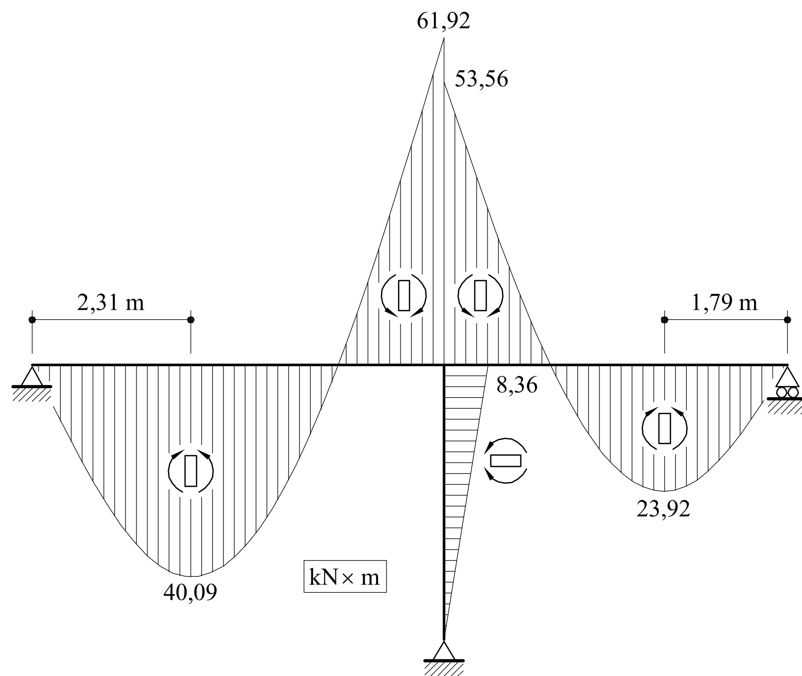


Fig.3 Ley de momentos flectores

Problema 11.13 *La estructura de la figura está sometida a un incremento de temperatura t. El módulo de elasticidad, la inercia y el coeficiente de dilatación lineal son las mismas en todas las barras. Hallar las leyes de esfuerzos.*

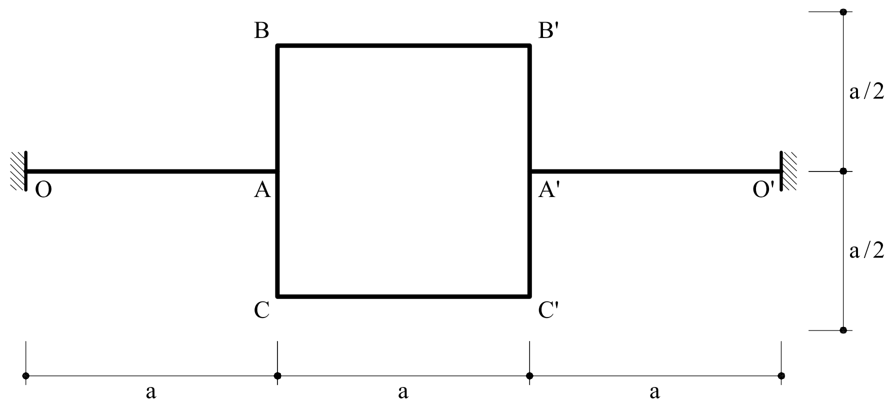


Fig.1 Estructura correspondiente al problema 11.13

Solución

Debido a la variación térmica el punto A se desplazará hacia la derecha una cantidad

$$u_A = a\,\alpha\,t$$

Separando el cuadrado de las piezas OA y $O'A'$, se obtiene la deformada que se representa en la figura 2

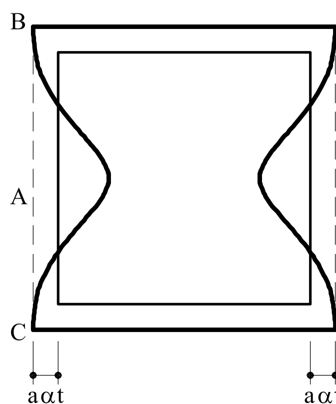


Fig.2. Deformada debido a la variación térmica

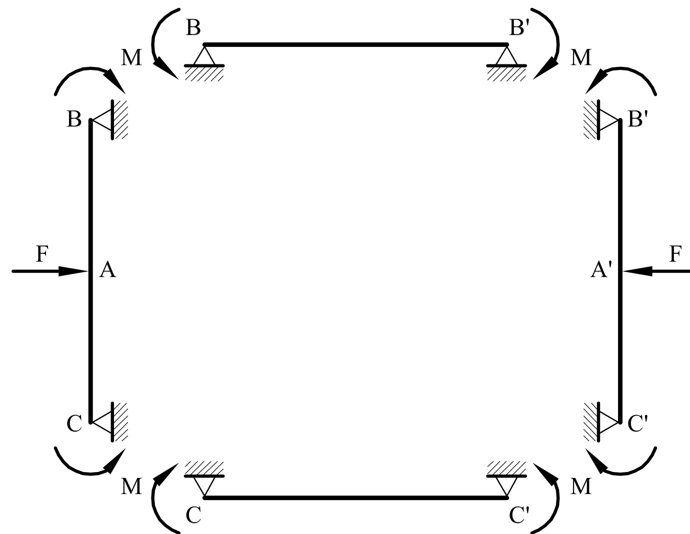


Fig.3. Descomposición en vigas simples

Descomponiendo el cuadrado en vigas simples (figura 3) e igualando giros:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_B^{BC} &= \frac{F\,a^2}{16\,E\,I} - \frac{M\,a}{2\,E\,I} \\ \varphi_B^{BB'} &= \frac{M\,a}{2\,E\,I} \end{aligned}\right\} \textit{Igualando}: \quad M = \frac{F\,a}{16}$$

La flecha en *A* vale:

$$\delta = \frac{F\,a^3}{48\,E\,I} - \frac{M\,a^2}{8\,E\,I} = \frac{5\,F\,a^3}{384\,E\,I}$$

y como $\delta = \frac{3}{2} a\,\alpha\,t$, resulta:

$$F = \frac{576}{5}\frac{E\,I\,\alpha\,t}{a^2} = 115{,}2\frac{E\,I\,\alpha\,t}{a^2}$$

$$M = 7{,}2\frac{E\,I\,\alpha\,t}{a}$$

La ley de momentos flectores puede verse representada en la figura 4

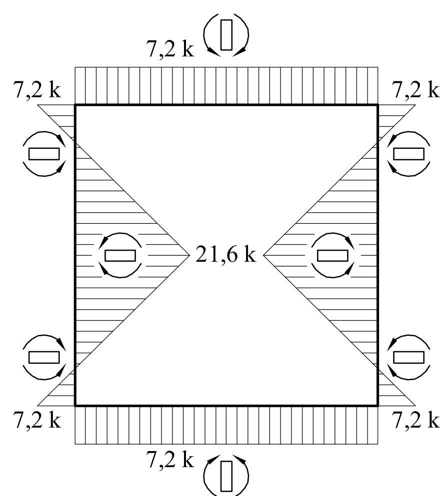


Fig.4.Ley de momentos flectores

Problema 11.14 *En la estructura de la figura 1, la barra BC tiene inercia infinita. La inercia de las barras AB y CD vale* $0{,}008\,m^4$*, siendo su módulo de elasticidad* $E = 30\,GPa$*. En el punto B actúa una fuerza horizontal* F *de valor desconocido. Experimentalmente se ha podido medir el movimiento horizontal del punto B, siendo su valor* $u_B = 2\,mm$*.*

Hallar:

- *Leyes de esfuerzos en las barras BA y CD*
- *Reacciones*
- *Valor de la fuerza* F
- *Giro en los puntos B y C*

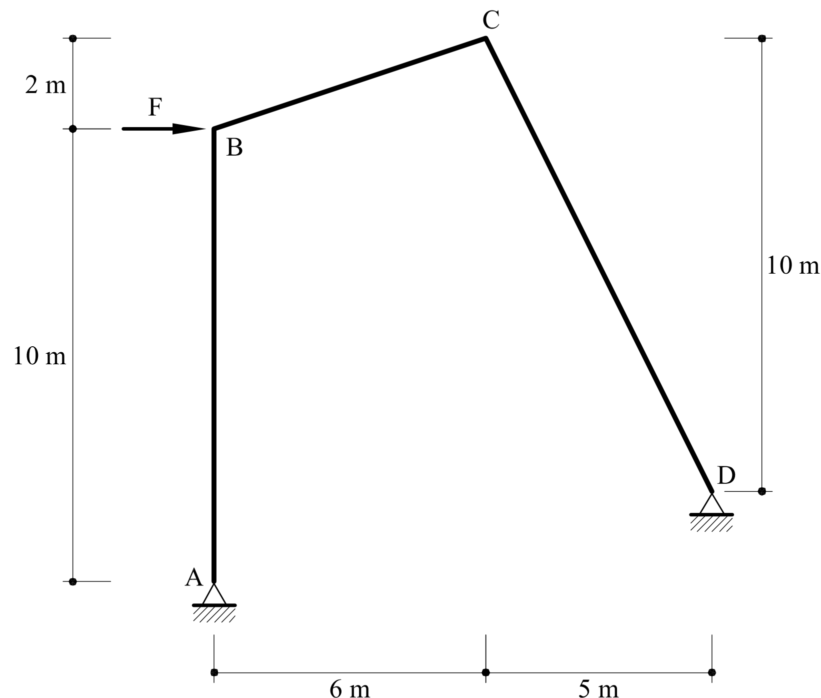


Fig.1 Pórtico correspondiente al problema resuelto 11.14

Solución

El producto $E\,I$ vale

$$E\,I = 30\,G\,Pa \times 0{,}008\,m^4 = 240.000\,kN \times m^2$$

El centro de giro de la barra BC será el punto O (figura 2)

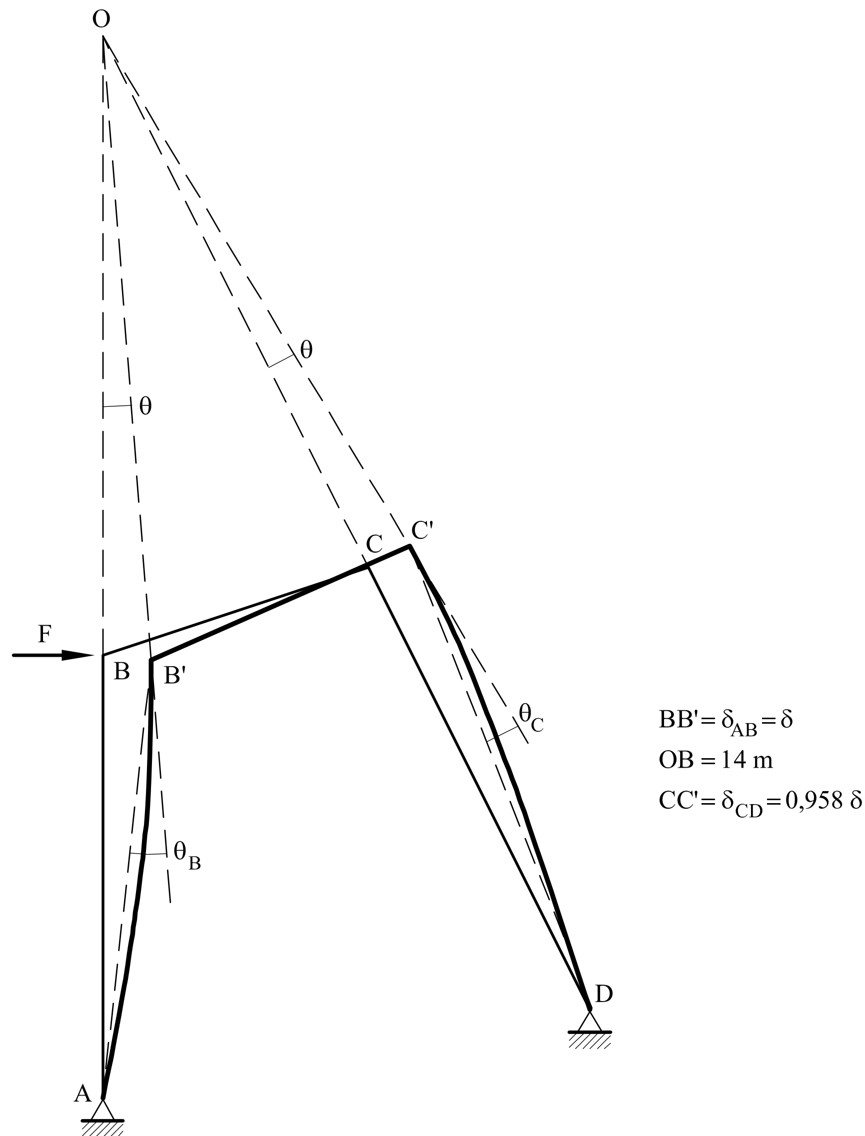


Fig.2 Deformada de la estructura

De acuerdo con la figura 2 y recordando que la pieza BC es infinitamente rígida, los giros φ_B y φ_C de los nudos B y C serán iguales y valdrán:

$$\varphi_B = \varphi_C = \theta = \frac{\delta}{OB} = \frac{\delta}{14}$$

Asimismo:

$$\theta_B = \varphi_B + \frac{\delta_{AB}}{L_{AB}} = \frac{\delta}{14} + \frac{\delta}{10} = 0{,}1714\,\delta = 0{,}1714 \times 2 \times 10^{-3} = 0{,}3429 \times 10^{-3}$$

$$\theta_C = \varphi_C + \frac{\delta_{CD}}{L_{CD}} = \frac{\delta}{14} + \frac{0{,}958\,\delta}{11{,}18} = 0{,}1571\,\delta = 0{,}1571 \times 2 \times 10^{-3} = 0{,}3143 \times 10^{-3}$$

Por otro lado, el giro de una viga biapoyada de longitud L con un momento en un extremo vale

$$\theta = \frac{M\,L}{3\,E\,I}$$

Es decir,

$$M = \frac{3\,E\,I}{L}\theta$$

Por lo tanto

$$M_{BA} = \frac{3\,E\,I}{L_{AB}} \cdot \theta_B = \frac{3 \times 240000}{10} \times 0{,}3429 \times 10^{-3} = 24{,}7\,kN\,m$$
$$M_{CD} = \frac{3\,E\,I}{L_{CD}} \cdot \theta_C = \frac{3 \times 240000}{11{,}18} \times 0{,}3143 \times 10^{-3} = 19{,}18\,kN\,m$$

Los cortantes en las piezas AB y CD valdrán

$$Q_{AB} = \frac{M_{AB}}{L_{AB}} = \frac{24{,}7}{10} = 2{,}47\,kN$$
$$Q_{CD} = \frac{M_{CD}}{L_{CD}} = \frac{19{,}18}{11{,}18} = 1{,}72\,kN$$

Para obtener el valor de F se toma momentos de toda la estructura respecto al punto O:

$$\overline{OB} \times F = Q_{AB} \times \overline{OA} + Q_{CD} \times \overline{OD}$$
$$14\,F = 2{,}47 \times 24 + 1{,}72 \times 24{,}6$$

Es decir:

$$F = 7{,}26\,kN$$

Los giros en los puntos B y C valdrán

$$\varphi_B = \varphi_C = \theta = \frac{\delta}{14} = \frac{0{,}002}{14} = 0{,}1429 \times 10^{-3}\ rdn$$

En las figuras 3, 4 y 5 pueden verse representadas las reacciones y las leyes de esfuerzos

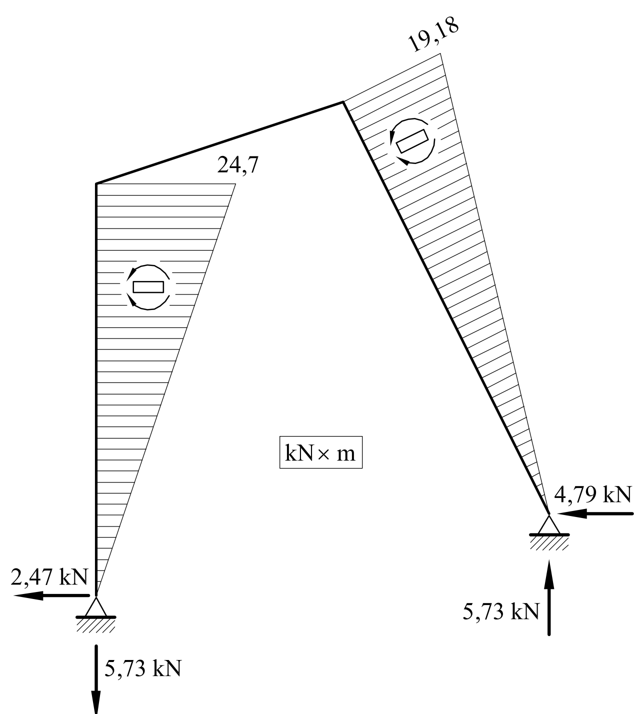


Fig.3 Ley de momentos flectores y reacciones

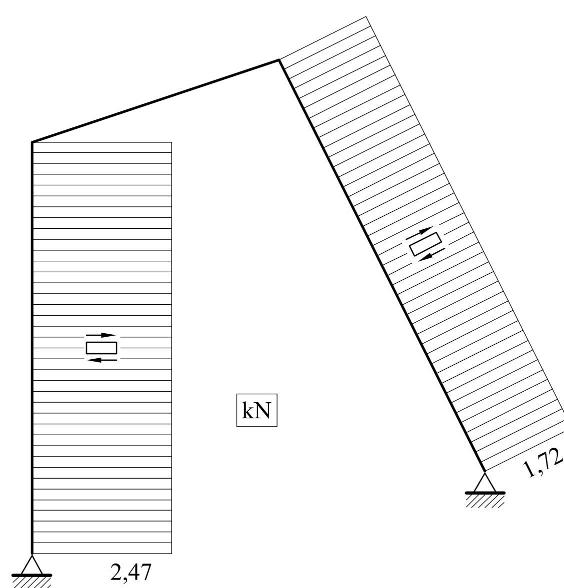


Fig.4 Ley de esfuerzos cortantes

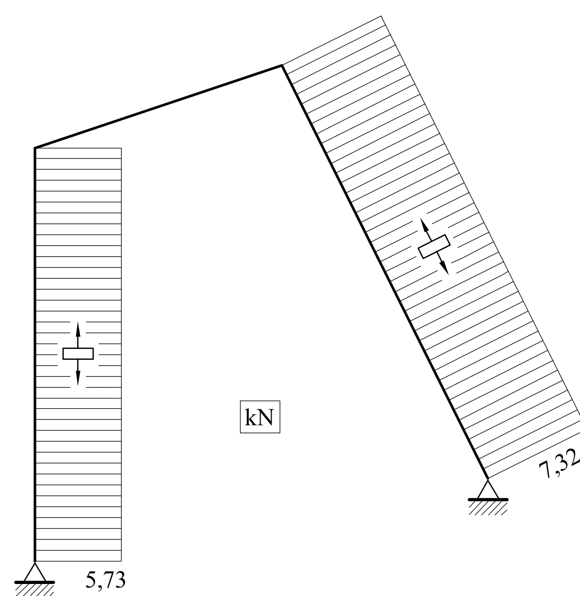


Fig.5 Ley de esfuerzos axiles

Problema 11.15 *En la estructura de la figura 1 se produce un descenso de 2 cm. en su extremo B sin giro.*

Se pide:

1. *Ley de momentos flectores.*
2. *Ley de esfuerzos cortantes.*
3. *Ley de esfuerzos axiles.*
4. *Movimientos del punto C.*

Se tomará $EI = 2\times10^4\, kN\cdot m^2$.

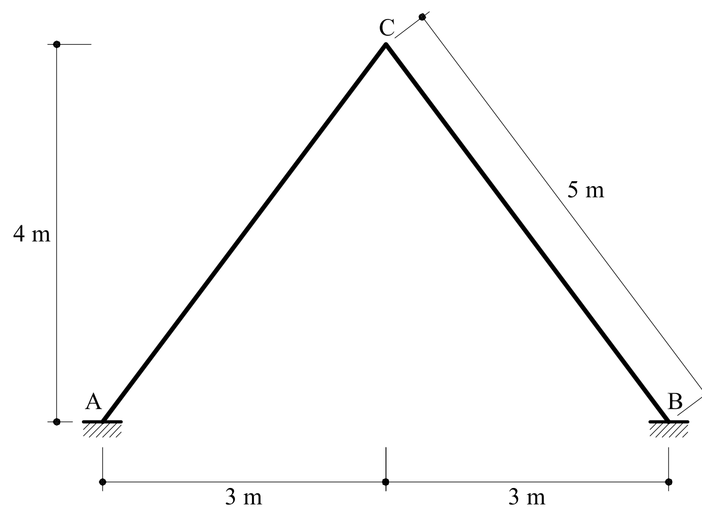


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 11.15

Solución

Un descenso de 2 cm en el apoyo *B* puede descomponerse en :

a) Un descenso de 1 cm. en ambos apoyos *A* y *B*.
b) Un levantamiento de 1 cm. en *A* y un descenso en *B*.

El caso a) es simétrico y óbviamente no produce ningún esfuerzo. El caso b) es antimétrico y puede modelizarse como se indica en la figura 2 con un descenso de 1 cm. en el punto *C*. El movimiento en dirección perpendicular a *AC* vale

$$\delta = \frac{1\, cm}{\cos\alpha} = 1{,}667\, cm$$

Este movimiento está producido por una fuerza *F* de valor

$$F = R\cos\alpha = 0{,}6\, R$$

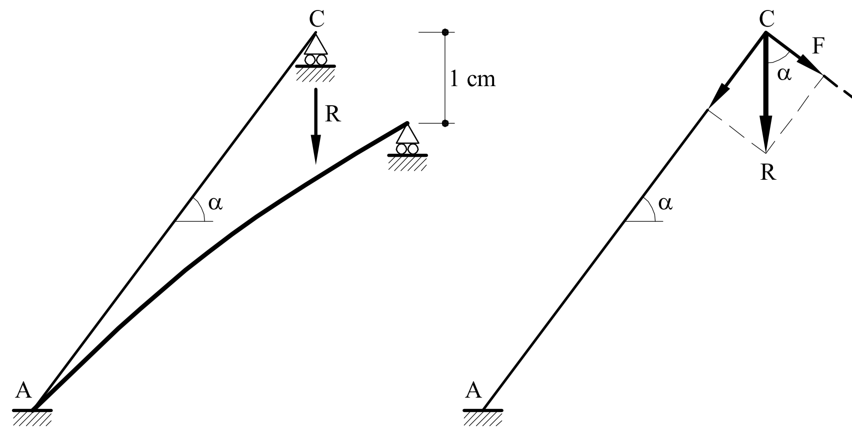


Fig. 2 Movimientos y fuerzas en C

Dado que

$$\delta = \frac{F\left(\overline{AC}\right)^3}{3\,EI} = \frac{125\,F}{3\times 2\times 10^4} = 1{,}667\,cm = 1{,}667\times 10^{-2}\,m$$

Despejando *F*

$$F = 8\;\;kN$$

En la figura 3 puede verse representada la ley de momentos flectores, cortantes y axiles.

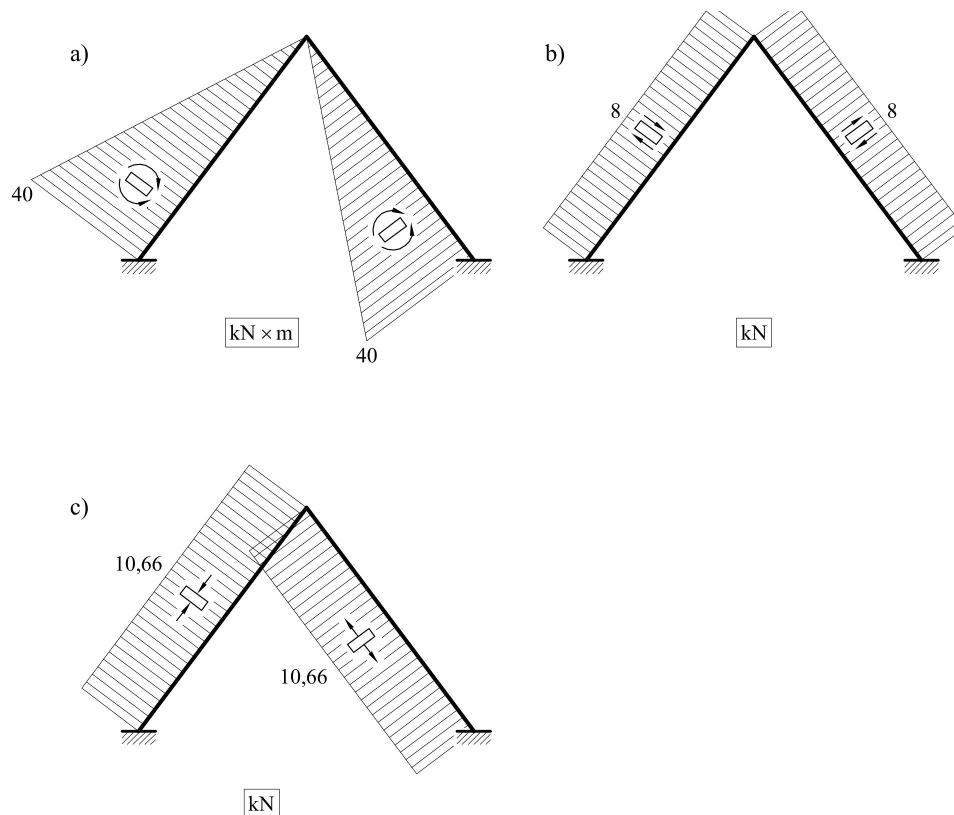


Fig. 3 Leyes de esfuerzos. a) Momentos flectores. b) Esfuerzos cortantes. c) Esfuerzos axiles.

Por lo que respecta a los movimientos del punto C, es claro que el movimiento vertical es descendente y vale *1 cm.* Por l oque respecta al giro, puede obtenerse a partir del a figura 2:

$$\varphi_C = -\frac{F\left(\overline{AC}\right)^2}{2EI} = -\frac{8\times 25}{2\times 2\times 10^4} = -0{,}005 \; rdn$$

Problema 11.16 *Determinar la ley de momentos flectores en el marco triangular sometido al momento M_o que se representa en la figura 1. No se consideran las deformaciones de cortante ni de axil. Todas las barras tienen una rigidez EI .*

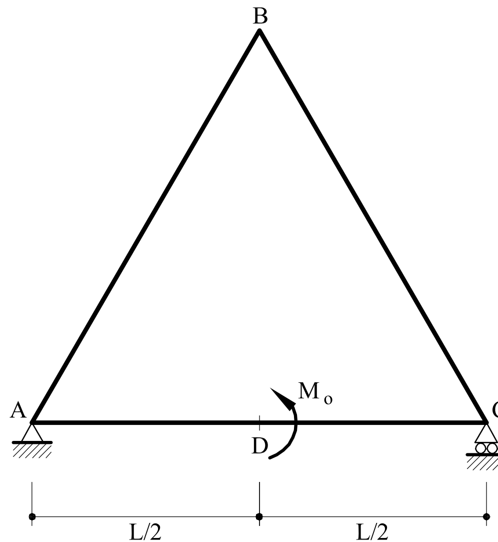


Fig. 1 Marco triangular correspondiente al problema 11.16

Solución

La estructura es intraslacional por lo cual puede descomponerse en vigas simples con apoyos fijos. Además, por antimetría, el momento en *B* es nulo y el momento en el punto medio de *AC* vale $M_o/2$. Igualando los giros en *A* (figura 2) se obtendrá el valor del momento hiperestático M_A.

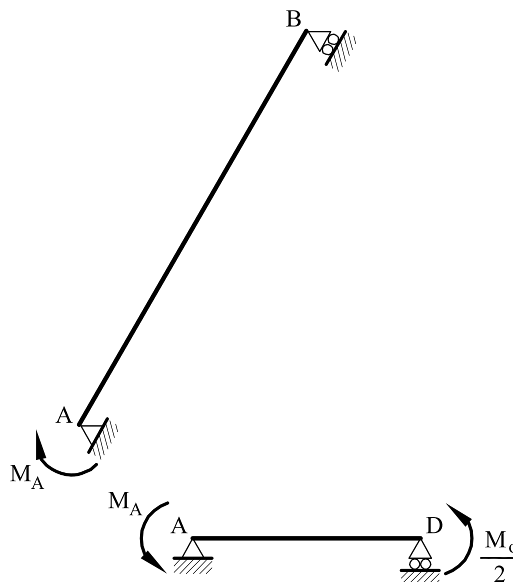


Fig. 2 Descomposición en vigas simples

El giro en *A* de *AB* y *AD* vale

$$\varphi_A^{AB} = -\frac{M_A L}{3EI}$$

$$\varphi_A^{AD} = \frac{M_A (L/2)}{3EI} - \frac{(M_o/2)(L/2)}{6EI}$$

Igualando se obtiene

$$M_A = \frac{M_o}{12}$$

En la figura 3 pueden verse representadas las leyes de momentos flectores y la deformada.

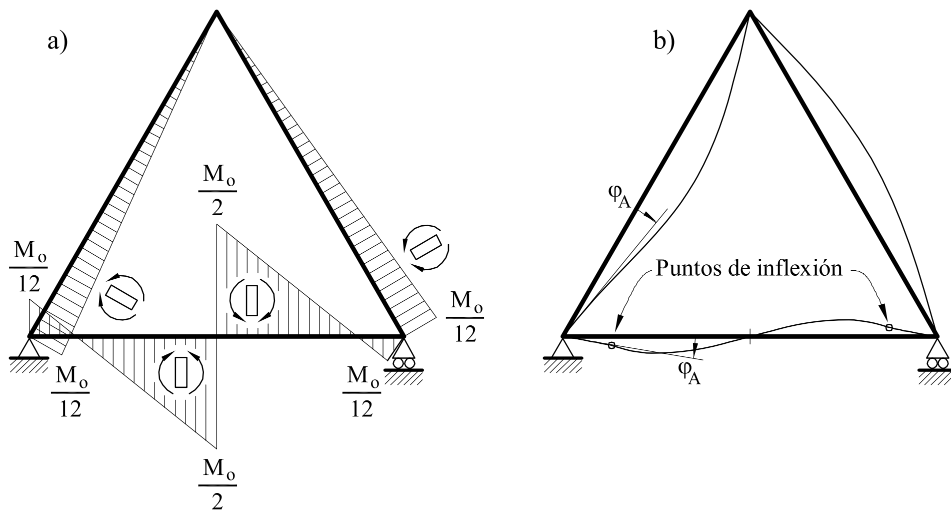


Fig. 3 a) Ley de momentos flectores. b) Deformada

Problema 11.17 *En la estructura, cuya forma, dimensiones y cargas se indican en la figura 1 y en la que el producto EI de las barras horizontales vale $10^5\, kN \cdot m^2$ y el EI de las barras verticales $2 \times 10^5\, kN \cdot m^2$.*

Se pide:

1. *Ley de momentos flectores.*
2. *Giro relativo entre las secciones en contacto con la rótula A.*
3. *Movimiento relativo entre los puntos A y F.*

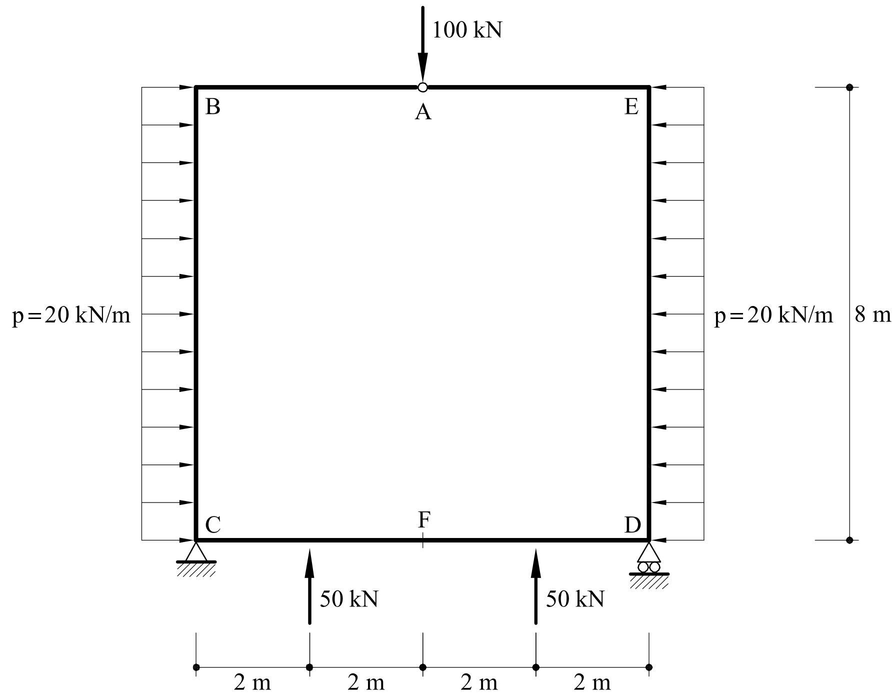


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 11.17

Solución

La estructura es intraslacional y puede, por tanto, descomponerse en vigas simples con apoyos fijos (figura 2). Por otro lado, el cortante en *A* vale $50\, kN$, por lo que el momento en *B* valdrá

$$M_B = 4 \times 50 = 200 \;\; kN\, m$$

Se calculan los giros en *C*

$$\varphi_C^{BC} = -\frac{20 \times 8^3}{24 E(2I)} + \frac{8 M_C}{3E(2I)} + \frac{200 \times 8}{6E(2I)} = -\frac{213{,}33}{EI} + \frac{1{,}333 M_C}{EI} + \frac{133{,}33}{EI}$$

$$\varphi_C^{CC'} = \frac{300}{EI} - \frac{8 M_C}{2 EI}$$

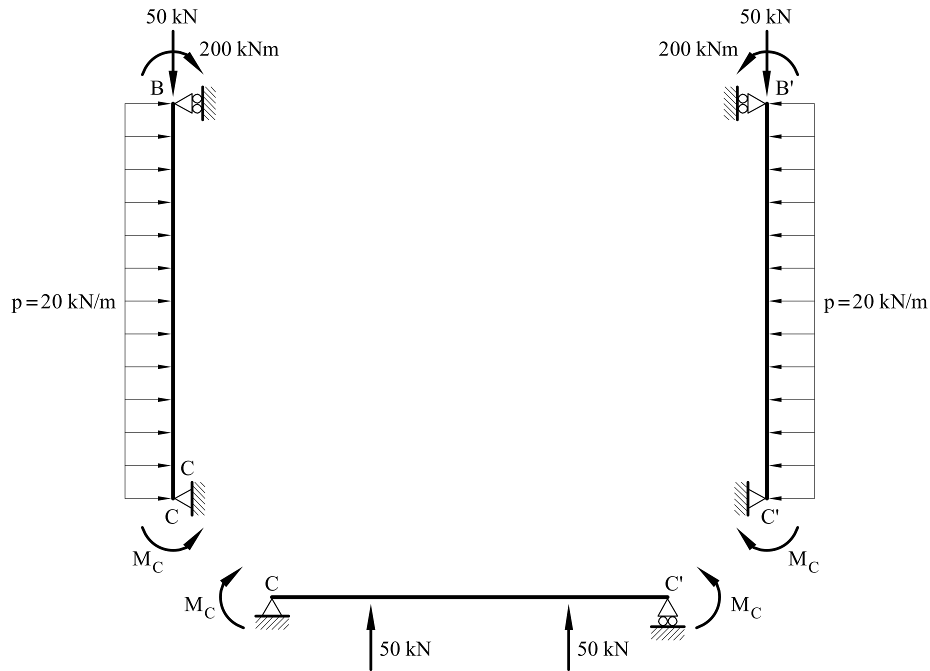


Fig. 2 Descomposición en vigas simples

Igualando:

$$M_C = 71{,}25 \ \ kN\,m$$

En la figura 3 puede verse representada la ley de momentos flectores:

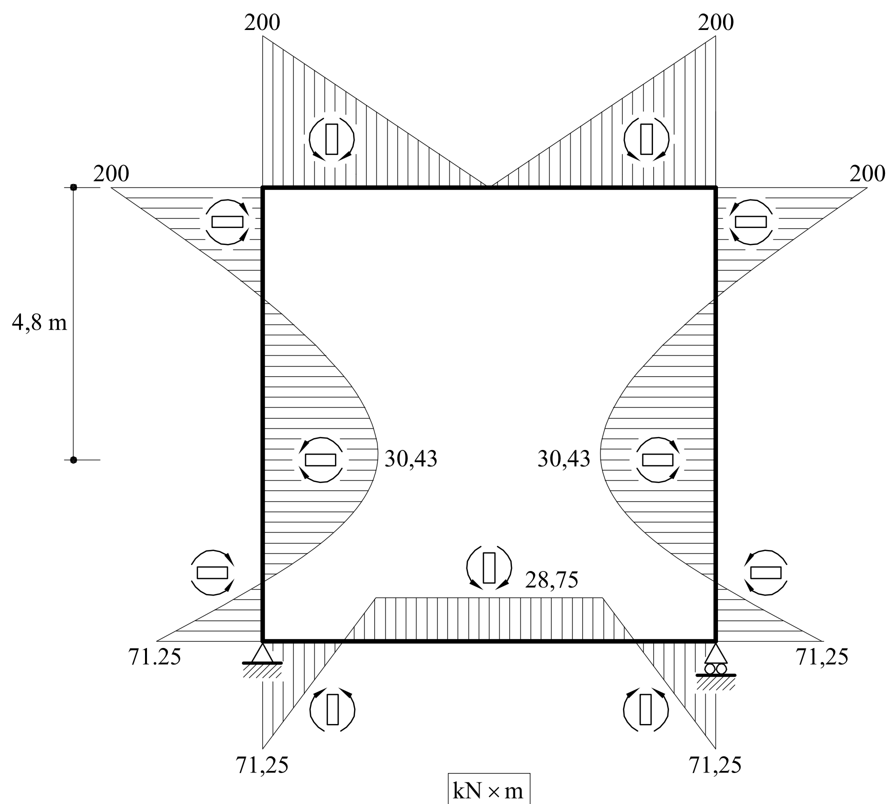


Fig. 3 Ley de momentos flectores

El giro relativo entre las dos secciones de *A* valdrá

$$[\varphi_A] = 2\left(\varphi_B + \int_A^B \frac{M_F}{EI} ds\right) = 2 \times (-100{,}83 - 400)\frac{1}{EI} = -0{,}01 \ rdn$$

Los puntos *A* y *F* se acercarán. Se obtendrá el movimiento del punto *A* y posteriormente el de *F*.

$$\upsilon_A \ (sentido\ descendente) = \frac{50 \times 4^3}{3\,EI} - \varphi_B \times 4 = \frac{1\,066{,}67}{EI} + \frac{403{,}32}{EI} = 0{,}0147\, m$$

$$\upsilon_F \ (sentido\ ascendente) = 0{,}00082\, m$$

Por tanto el acercamiento entre *A* y *F* valdrá

$$\Delta_{AF} = 0{,}0147 + 0{,}00082 = 0{,}01552\ metros$$

♣**Problema 11.18** *La estructura de la figura 1 está compuesta por las siguientes piezas:*

- *Las rectas AD y DC representan un tirante único ADC.*
- *La pieza ABC es un perfil metálico IPE-* 450 ($I = 33\ 740\, cm^4$)
- *La pieza BD es infinitamente rígida, y sobre el punto D desliza libremente el tirante ADC*

La sección del cable es tal que el momento flector en el punto B de la viga BC es la mitad del que tendría si no hubiera cable.

Sobre la pieza ABC actúa una carga normal a la pieza, uniformemente repartida y con sentido descendente, de valor $p = 12\ \ kN/m$.

En un determinado momento de la vida de la estructura, y al comprobar que los cables se encuentran en deficiente estado de conservación, se decide colocar un apoyo en C y a continuación eliminar el cable ADC.

HALLAR:

- *Ley final de momentos flectores en la estructura.*
- *Giro final del punto B (se supondrá E = 210 GPa).*

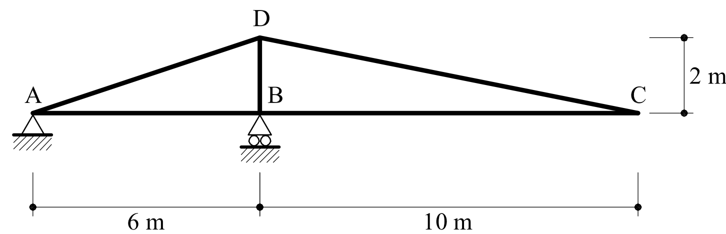


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 11.18

Solución

Si *T* es el esfuerzo axil en el tirante, el momento flector en *B* de la pieza *BC* vale (figura 2).

$$M_{fB} = -\frac{p \times 10^2}{2} + T \times 10 \sin\alpha = -600 + 1{,}9612\, T$$

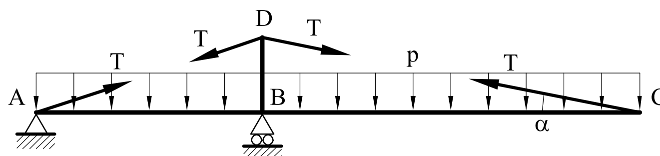


Fig. 2 Incógnita hiperestática.

De cumplirse que

$$M_{fB} = -\frac{600}{2}$$

es decir:

$$T = 153 \ \ kN$$

El efecto, en los momentos flectores de la estructura, del hecho de quitar los cables es equivalente a colocar un apoyo en *C* y una fuerza horizontal *H* en *D* de valor (ver figura 3)

$$H = T\left(\cos\alpha - \cos\beta\right) = 0{,}031897 \ \ T$$

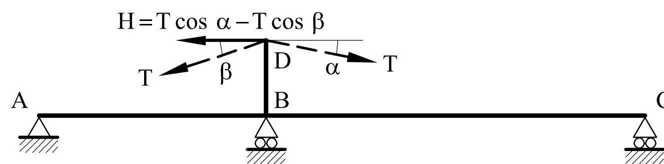


Fig. 3 Estructura sin cables

lo cual equivale a la estructura de la figura 4 con

$$M_{fB}^{BD} = 2\,H = 2\times 0{,}031897\,F = 9{,}76 \ \ kNm$$

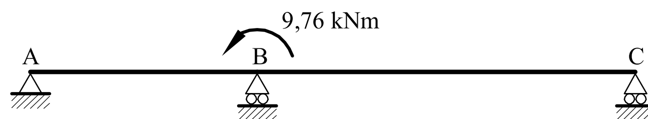


Fig. 4 Viga continua sin tirantes

Igualando giros en *B* se obtienen los valores de los momentos flectores en *B*.

$$M_{fB}^{BA} = 6{,}1 \ \ kN\,m$$

$$M_{fB}^{BC} = 3{,}66 \ \ kNm$$

En la figura 5 puede verse representada la ley de momentos flectores.

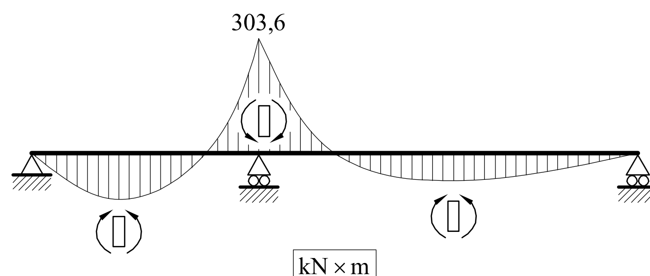


Fig. 5 Ley de momentos flectores

El giro final del punto B valdrá (positivo si antihorario):

$$\varphi_B = \frac{12 \times 6^3}{24\,EI} - \frac{303{,}6 \times 6}{3\,EI} = -\frac{499{,}2}{EI} = -7{,}05 \times 10^{-3}\ rdn$$

Problema 11.19 *La pieza de la figura 1 tiene todas sus barras de sección constante con* $EI = 10^4 \, kN \, m^2$ *y coeficiente térmico* $\alpha = 10^{-4} \, {}^{o}C^{-1}$. *Se somete toda ella a un aumento de temperatura de 60ºC.*

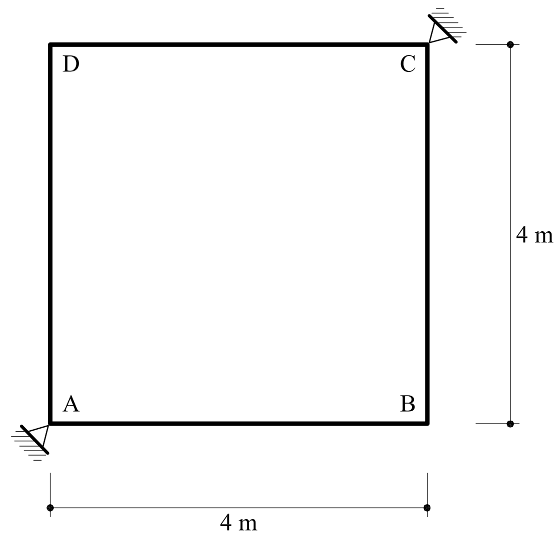


Fig. 1 Marco correspondiente al problema 11.19

SE PIDE:

1. *Ley de momentos flectores.*
2. *Reacciones en los apoyos.*

Solución

Por simetría, los cuatro vértices tendrán giro nulo. En la figura 2 puede verse la deformada de la estructura.

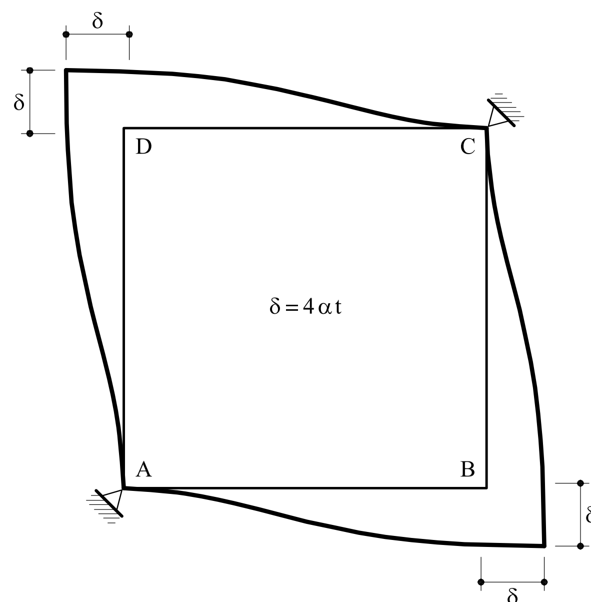


Fig. 2 Deformada del marco

El desplazamiento δ valdrá

$$\delta = 4\alpha t = 4\times 10^{-4}\times 60 = 240\times 10^{-4}\, m$$

En la figura 3 se ha aislado la barra *DC*. Aparecen las incógnitas hiperestáticas *F* y *M*, las cuales se obtendrán imponiendo las siguientes condiciones:

- Giro en *D* nulo.
- Movimiento de *D* en dirección normal a *DC* igual a δ .

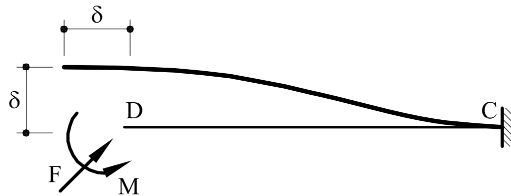


Fig. 3 Fuerza y momento en el punto D de la pieza DC

$$\varphi_D = -\frac{\left(\frac{F\sqrt{2}}{2}\right)a^2}{2EI} + \frac{M\,a}{EI} = 0$$

$$u_D = \delta = \frac{\left(\frac{F\sqrt{2}}{2}\right)a^3}{3EI} - \frac{M\,a^2}{2EI}$$

Resolviendo el sistema:

$$F = 63{,}64\ kN$$

$$M = 90\ kNm$$

En la figura 4 puede verse representada la ley de momentos flectores

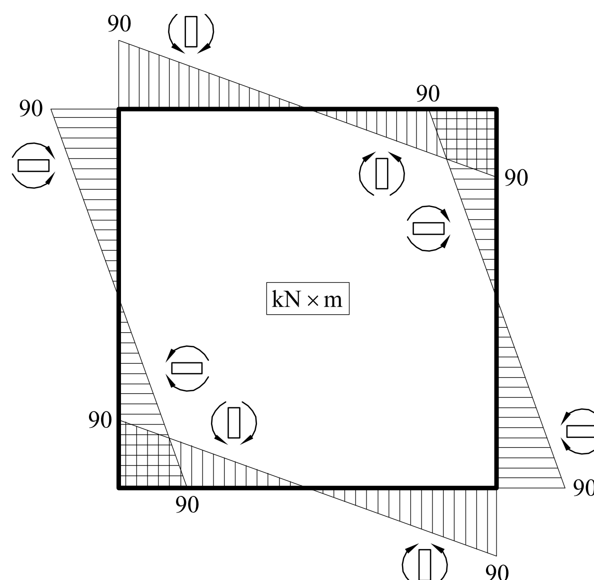


Fig. 4 Ley de momentos flectores

Problema 11.20 *En el punto A de la estructura de la figura 1 tiene un descenso de apoyo de valor δ. Considérese también un incremento térmico de valor t en todas las barras. Se desea hallar la ley de momentos flectores.*

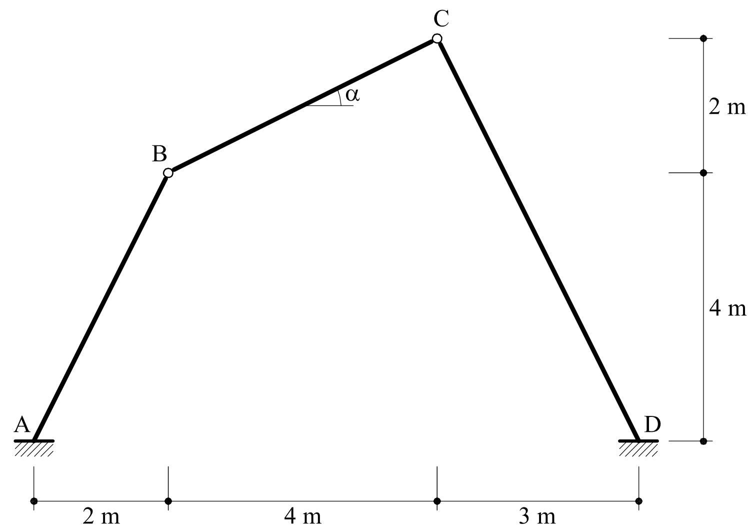


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 11.20

Solución

Se toma como incógnita hiperestática el axil en *BC*.

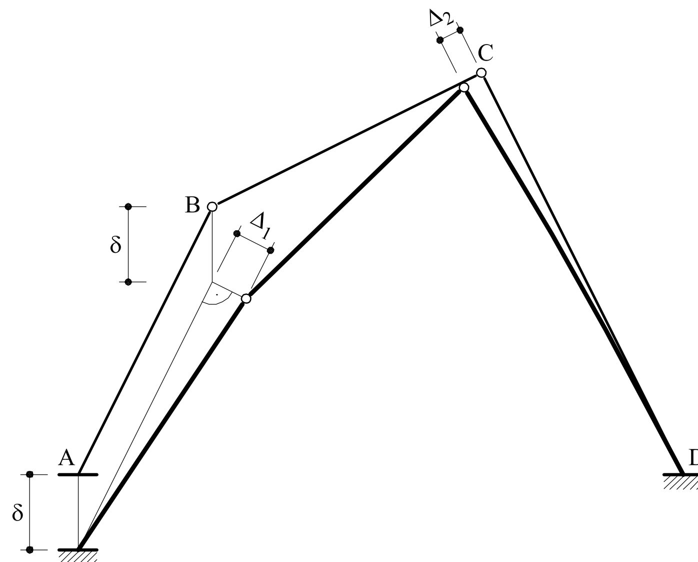


Fig. 2 Movimientos de los nudos

a) *Descenso de apoyo en A*

La proyección sobre *BC* de los movimientos *totales* en *B* debe ser igual a Δ_2 (figura 2) De esta forma, la ecuación de compatibilidad se escribe

$$\delta \sin\alpha - \Delta_1 \cos 2\alpha = \Delta_2$$

Por otro lado, separando las piezas *AB*, *BC* y *CD* (figura 3) se tiene:

$$F_1 = N\cos 2\alpha$$

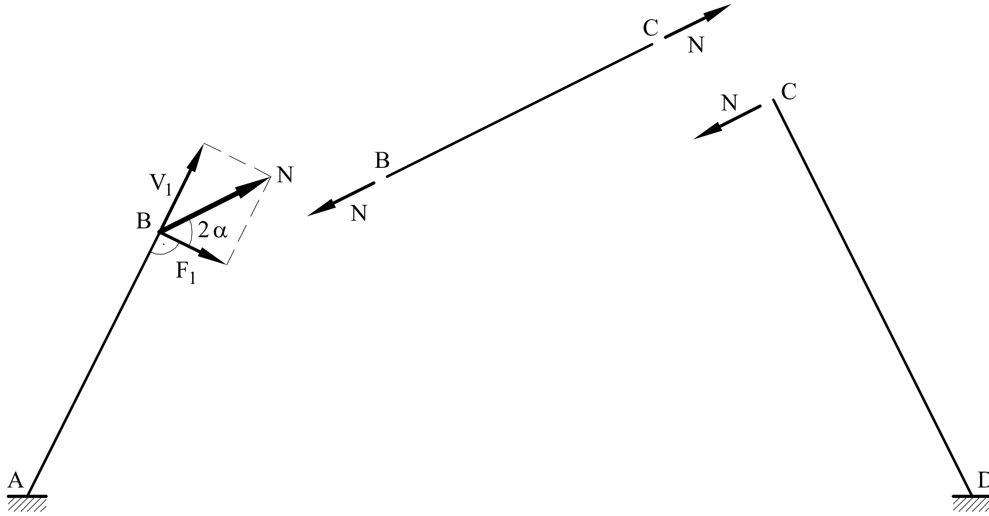


Fig. 3 Fuerzas en las distintas barras

Por otro lado:

$$\Delta_1 = \frac{F_1 \cdot L_{AB}^3}{3EI} = \frac{N\cos 2\alpha \cdot \left(\sqrt{20}\right)^3}{3EI} = 17{,}89\frac{N}{EI}$$

$$\Delta_2 = \frac{N \cdot L_{CD}^3}{3EI} = 100{,}62\frac{N}{EI}$$

Introduciendo estos valores en la ecuación de compatibilidad

$$\delta \cdot \sin\alpha - 17{,}89\frac{N}{EI}\cos 2\alpha = 100{,}62\frac{N}{EI}$$

Es decir:

$$N = 0{,}004016\,EI\,\delta$$

b) Variación térmica

Los alargamientos de cada barra debido a la temperatura valen

$$\delta_{AB} = \alpha\, L_{AB}\, t = \sqrt{20}\,\alpha\, t$$

$$\delta_{BC} = \alpha\, L_{BC}\, t = \sqrt{20}\,\alpha\, t$$

$$\delta_{CD} = \alpha\, L_{CD}\, t = \sqrt{45}\,\alpha\, t$$

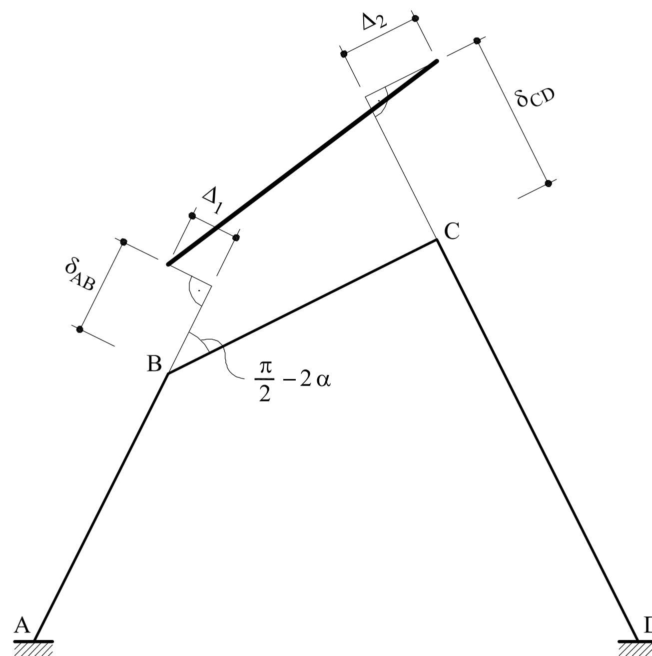


Fig. 4 Movimientos de los nudos

En el punto *B* de la barra *AB* (figura 4) se producirá además un desplazamiento perpendicular a *AB* y de valor Δ_2.
La ecuación de compatibilidad se escribe:

$$\Delta_2 - \left[\delta_{AB} \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) - \Delta_1 \cos 2\alpha \right] = \delta_{BC}$$

Si *N* es el esfuerzo axil en la barra *BC* (esfuerzo de compresión) se tendrá (figura 5)

$$F_1 = N \cos 2\alpha$$

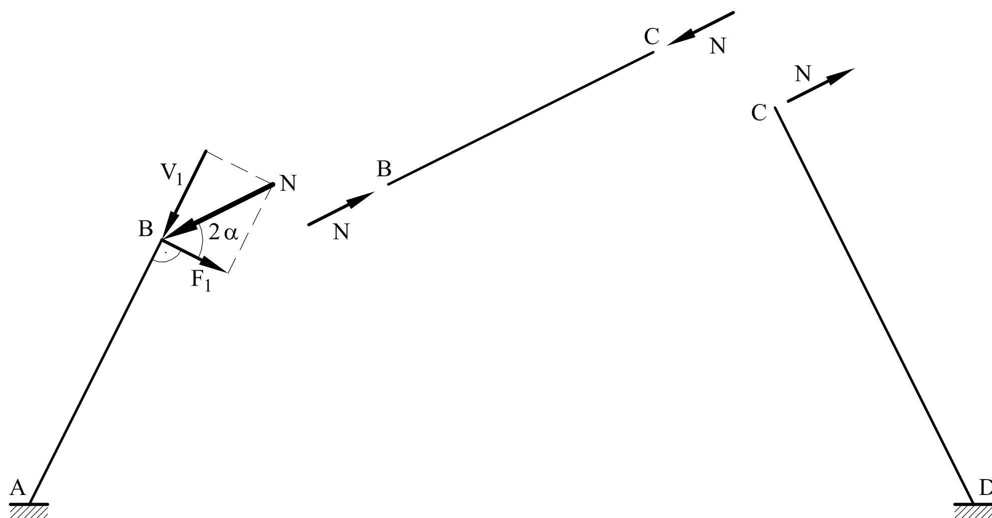


Fig. 5 Fuerzas en las barras

Por otro lado:

$$\Delta_1 = \frac{F_1 L_{AB}^3}{3EI} = 17,89 \frac{N}{EI}$$

$$\Delta_2 = \frac{N L_{CD}^3}{3EI} = 100,62 \frac{N}{EI}$$

Introduciendo estos valores en la ecuación de compatibilidad

$$100,62 \frac{N}{EI} - \left[\sqrt{20}\, \alpha\, t \sin 2\alpha - 17,89 \frac{N}{EI} \cos 2\alpha \right] = \sqrt{20}\, \alpha\, t$$

Es decir:

$$N = 0,0723\, \alpha\, t\, EI$$

Conocidos los valores de N es inmediato dibujar las leyes de momentos flectores.

Problema 11.21 *Determinar la ley de momentos flectores en la estructura de la figura 1.*

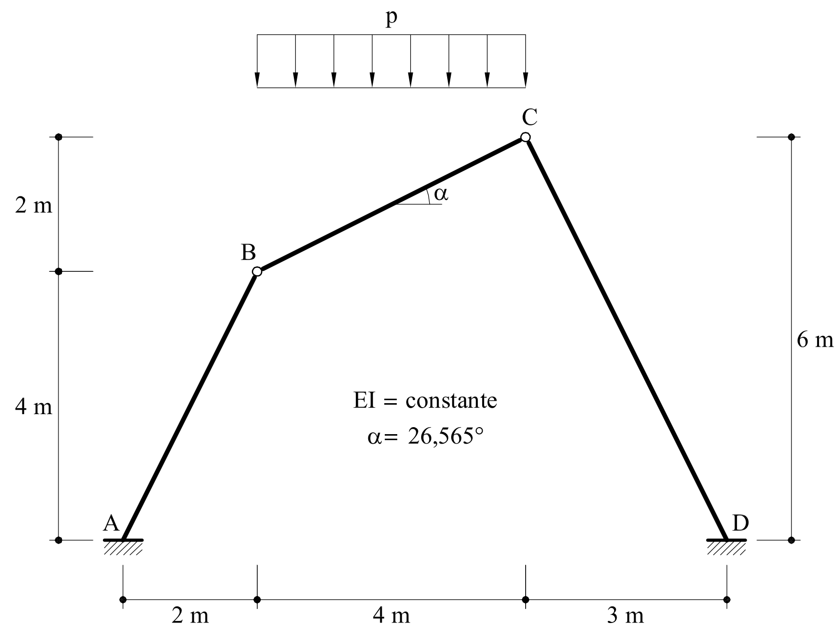


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 11.21

Solución

Se aísla la barra *BC* (figura 2).

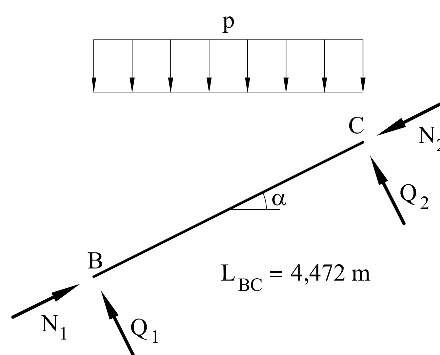


Fig. 2 Barra BC aislada

- Tomando momentos respecto a *B*:

$$4{,}472\,Q_2 = 4\,p \cdot \frac{4}{2} \quad \Rightarrow \quad Q_2 = 0{,}56\,p$$

$$Q_1 = 0{,}56\,p$$

- Equilibrio en la línea de acción *BC*

$$N_1 - N_2 - 4\,p\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 - N_2 = 1{,}79\,p$$

Las barras *AB* y *CD* estarán sometidas a las fuerzas indicadas en la figura 3:

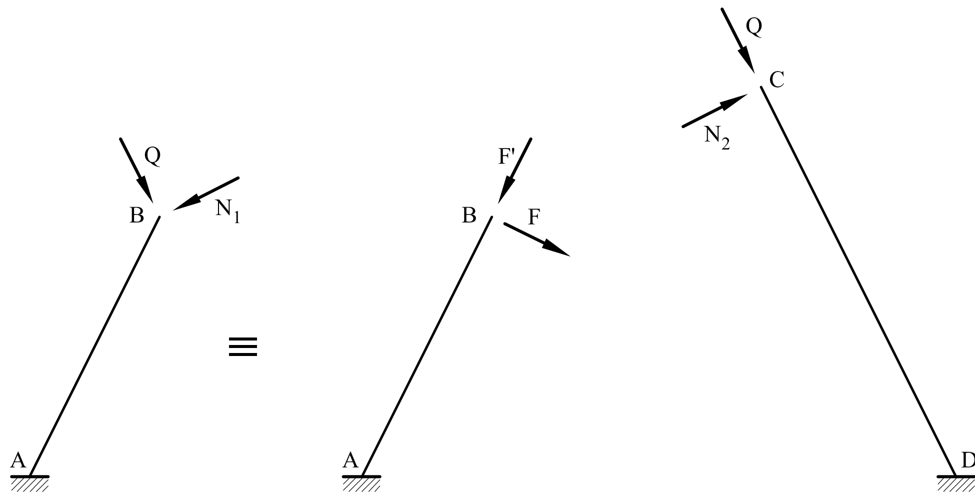


Fig. 3 Fuerzas en las barras inclinadas

$$F = -N_1 \cos 2\alpha + Q \sin 2\alpha = -0{,}6\, N_1 + 0{,}447\, p$$

Es preciso establecer una relación entre el desplazamiento de *C* y el desplazamiento de *B*. Se puede proceder de dos formas.

a) Por la inextensibilidad de *BC* se tendrá (fig.4)

$$\Delta_B \cos 2\alpha = \Delta_C$$

$$0{,}6\, \Delta_B = \Delta_C$$

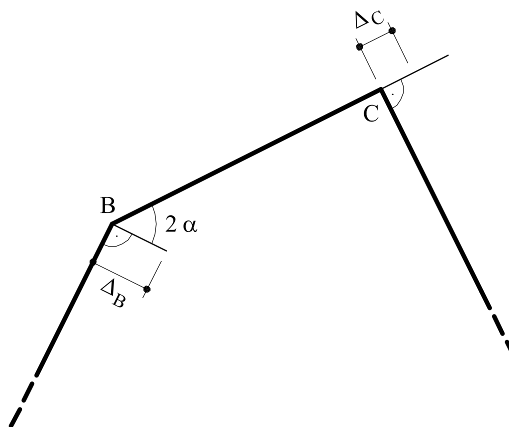


Fig. 4 Desplazamientos de B y C

b) Utilizando el centro de rotación de la barra *BC* (figura 5)

$$\Delta_B = L_{OB}\, \theta$$

$$\Delta_C = L_{OC}\,\theta$$

y por tanto, como θ es el mismo

$$0{,}6\,\Delta_B = \Delta_C$$

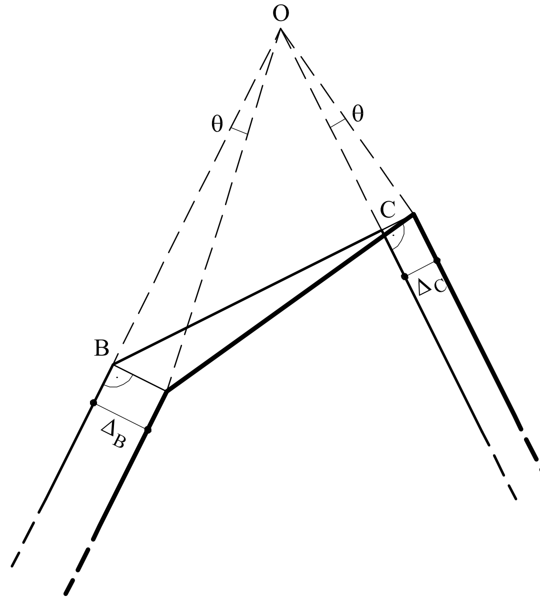


Fig. 5 Centro de rotación de la barra BC

- En la barra *AB* el desplazamiento en *B* vale

$$\Delta_B = \frac{F\,L_{AB}^3}{3EI} = \frac{(-0{,}6\,N_1 + 0{,}447\,p)89{,}44}{3EI} = \frac{1}{EI}(-17{,}89\,N_1 + 13{,}33\,p)$$

- En la barra *CD* el desplazamiento en *C* vale

$$\Delta_C = \frac{N_2\,L_{CD}^3}{3EI} = \frac{100{,}62\,N_2}{EI}$$

y como $0{,}6\,\Delta_B = \Delta_C \quad \Rightarrow \quad 10{,}734\,N_1 + 100{,}6\,N_2 = 8\,p$

El sistema de ecuaciones será

$$N_1 - N_2 = 1{,}79\,p$$

$$10{,}734\,N_1 + 100{,}6\,N_2 = 8\,p$$

que resuelto proporciona los valores de N_1 y N_2

$$N_1 = 1{,}69\,p$$

$$N_2 = -0{,}1\, p$$

El valor de la figura F que actúa en B de la barra AB vale

$$F = -0{,}6\, N_1 + 0{,}447\, p = -0{,}567\, p$$

Las leyes de momentos pueden verse representadas en la figura 6

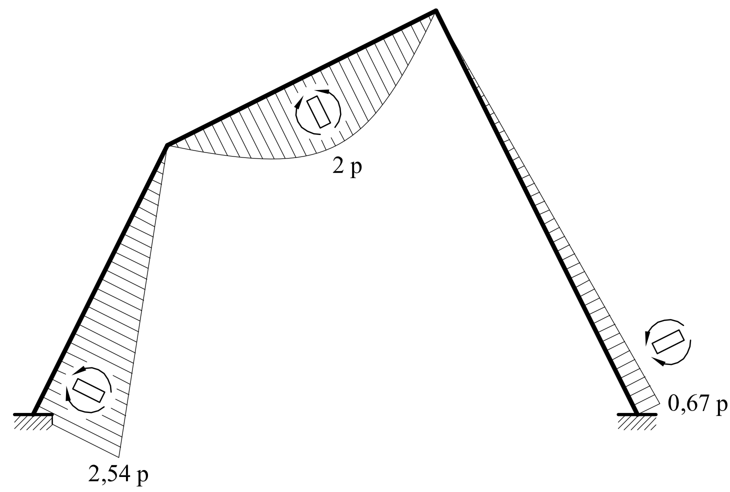


Fig. 6 Ley de momentos flectores

Problema 11.22 *En la estructura representada en la figura 1 la pieza BD representa un tirante. Se pide determinar la ley de momentos flectores.*

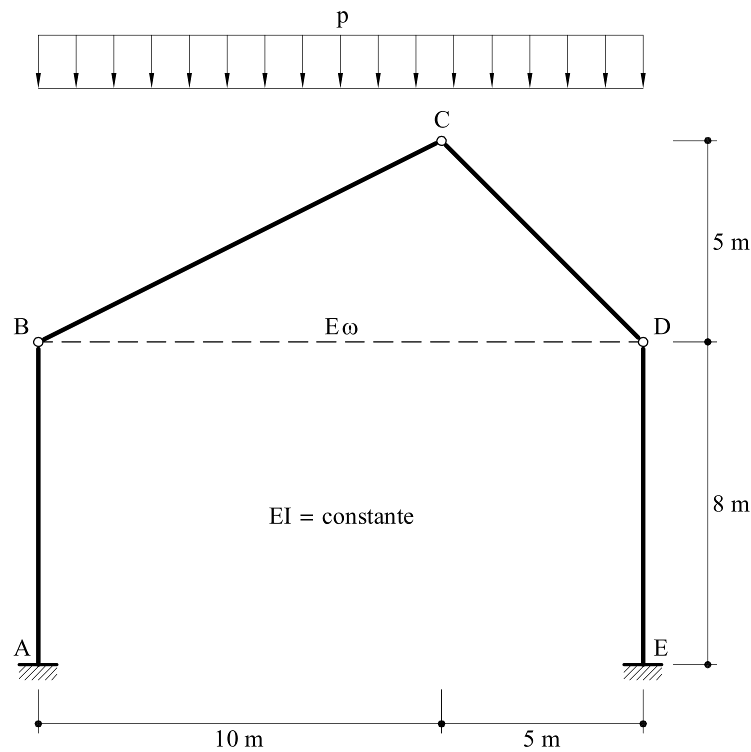


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 11.22

Solución

Se separan las piezas *BC* y *CD* (figura 2)

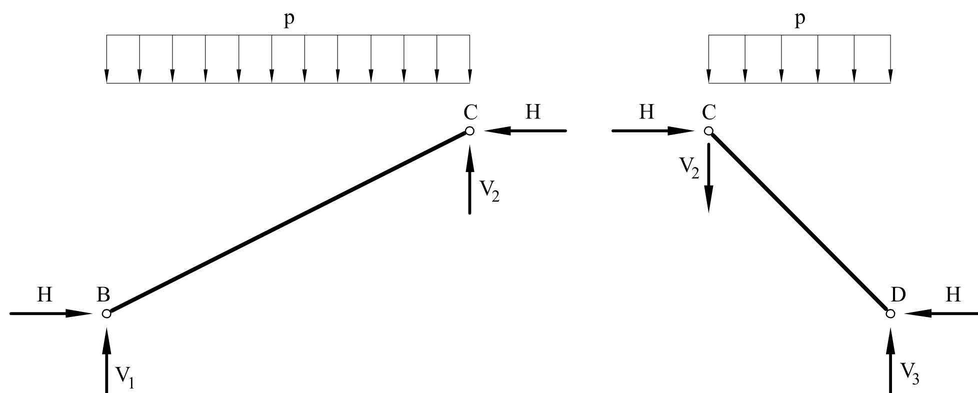


Fig. 2 Fuerzas en las piezas BC y CD

Tomando momentos respecto a *B* del conjunto *BCD* se determina V_3

$$-p\frac{15^2}{2}+15V_3=0 \quad \Rightarrow \quad V_3=7{,}5\,p$$

y por equilibrio:

$$V_1 = 7{,}5\,p$$

- Por equilibrio de cada una de las barras:

$$V_2 = 10\,p - V_1 = 2{,}5\,p$$

$$V_3 = 5\,p + V_2 = 7{,}5\,p \quad (comprobación)$$

- Tomando momentos respecto a *B* en la barra *BC*

$$10V_2 - \frac{10^2}{2}p + 5H = 0 \quad \Rightarrow \quad H = 5\,p$$

- Se comprueba el valor de *H* tomando momentos respecto a *D* en la barra *CD*

$$V_2\,5 + \frac{5^2}{2}p - 5H = 0 \quad \Rightarrow \quad H = 5\,p \quad \Rightarrow \quad (comprobación)$$

En los pilares *AB* y *DE* se tendrán las fuerzas que se indican en la figura 3

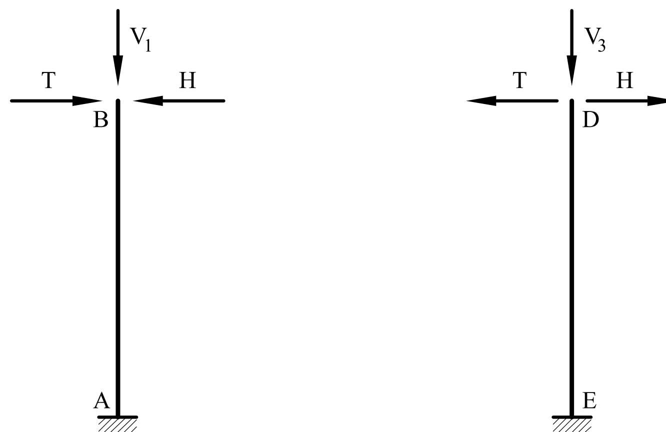


Fig. 3 Fuerzas en los pilares

El movimiento de *B* de la barra *AB* valdrá

$$\overleftarrow{\delta_B} = \frac{(H - T)8^3}{3EI}$$

El movimiento en *D* de la barra *DE* valdrá

$$\overrightarrow{\delta_D} = \frac{(H - T)8^3}{3EI}$$

El *alejamiento* de *B* respecto a *D* vale

$$\delta_{BD} = 2\frac{(H-T)8^3}{3EI} = 341{,}33\frac{H-T}{EI}$$

El *alejamiento* de *B* respecto a *D* en el tirante vale

$$\delta_{BD} = \frac{T\times 15}{E\,\omega}$$

Igualando:

$$\frac{341{,}33}{EI}(H-T) = \frac{15T}{E\,\omega}$$

Es decir:

$$T = \frac{341{,}33\,H}{341{,}33+15\dfrac{I}{\omega}} = \frac{H}{1+0{,}043945\,I/\omega} = \frac{5}{1+0{,}043945\,I/\omega}\,p$$

A partir de este valor se pueden hallar las leyes de momentos flectores.

Para obtener las leyes de cortantes y axiles, obsérvese la figura 4. A partir de dicha figura y por equilibrio se obtiene

$$Q_C^{BC} = V_2\cos\alpha + H\sin\alpha = 4{,}472\,p$$
$$Q_B^{BC} = V_1\cos\alpha - H\sin\alpha = 4{,}472\,p$$
$$N_C^{BC} = V_2\sin\alpha - H\cos\alpha = -3{,}354\,p$$
$$N_B^{BC} = V_1\sin\alpha + H\cos\alpha = 7{,}826\,p$$
$$Q_C^{CD} = (H - V_2)\cos 45 = 1{,}77\,p$$
$$N_C^{CD} = (H + V_2)\cos 45 = 5{,}3\,p$$
$$Q_D^{CD} = (V_3 - H)\cos 45 = 1{,}77\,p$$
$$N_D^{CD} = (V_3 + H)\cos 45 = 8{,}84\,p$$

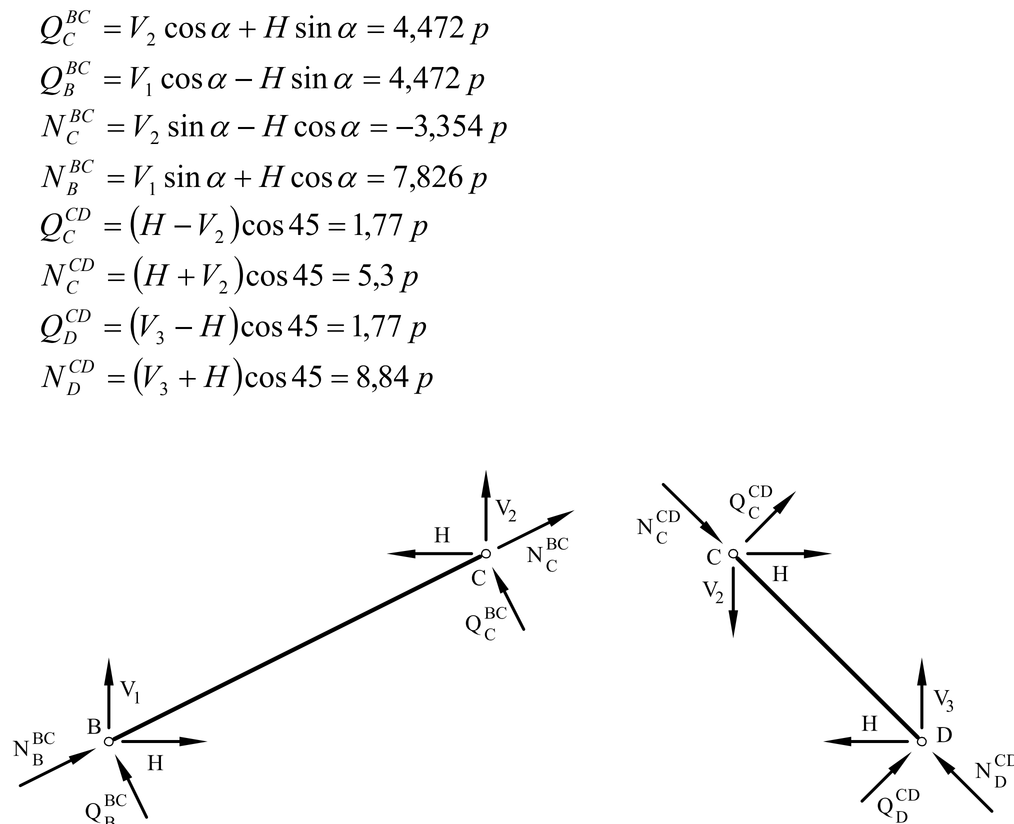


Fig. 4 Cortantes y axiles en las barras inclinadas

En la figura 5 se dibuja la ley de momentos flectores y en la 6 las leyes de cortantes y de axiles

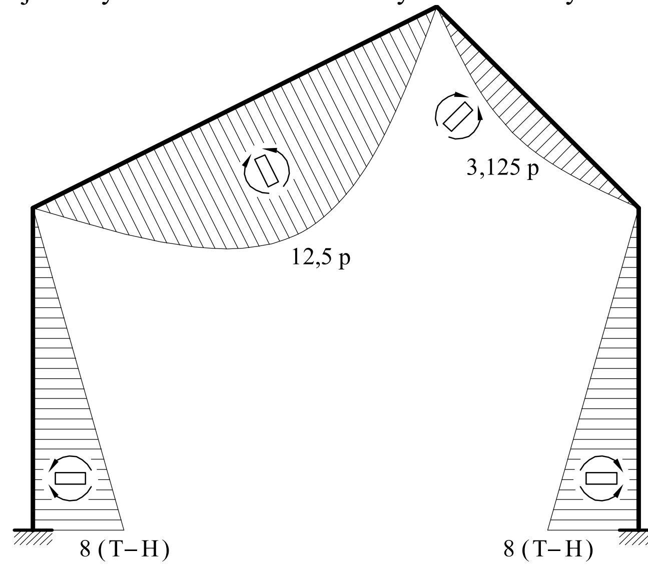
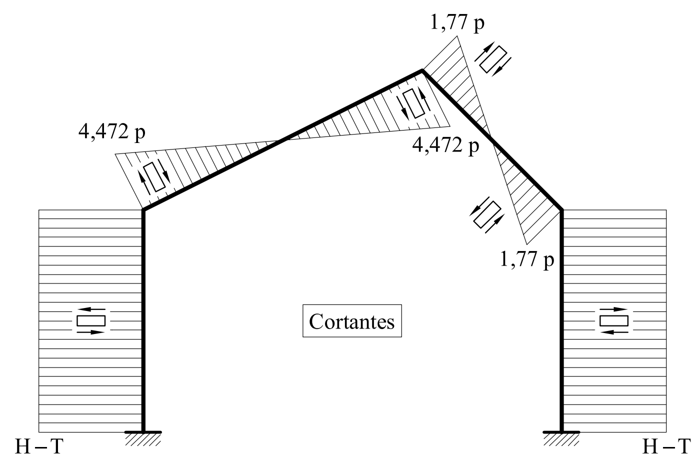


Fig. 5 Ley de Momentos flectores

.



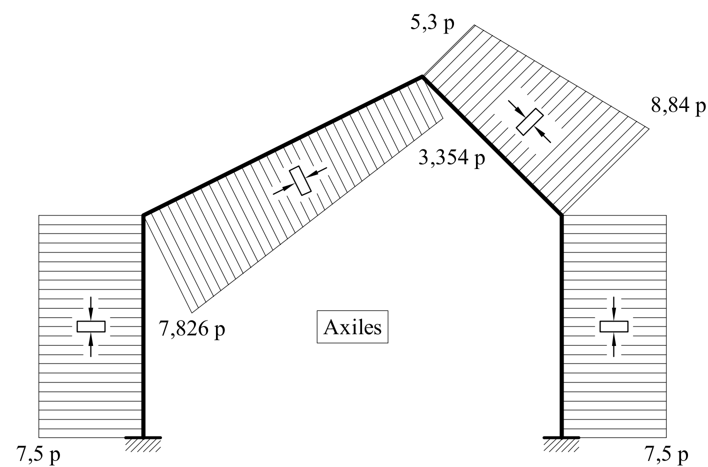


Fig. 6 Leyes de cortantes y axiles

Problema 11.23 *Determinar las leyes de momentos flectores y esfuerzos cortantes, así como el movimiento del punto A en la estructura que se representa en la figura 1.*

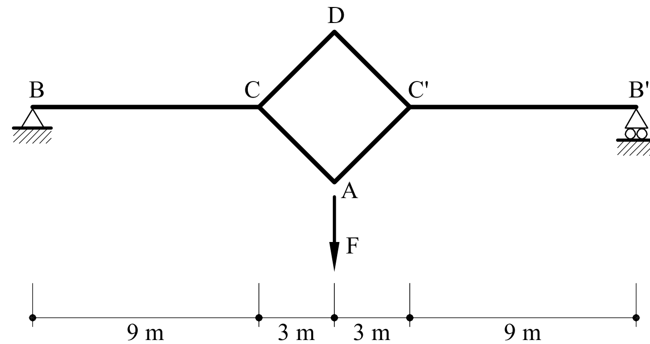


Fig. 1 estructura correspondiente al problema resuelto 11.23

Solución

La reacción horizontal en *B* es nula, mientras que las reacciones verticales valen

$$V_B = V_{B'} = F/2$$

Por lo tanto, el cuadrado *CDC'A* , considerado de forma aislada, estará sometido a las fuerzas y momentos que se indican en la figura 2. Dicho cuadrado puede descomponerse en su parte antimétrica y en su parte simétrica (figura 2).

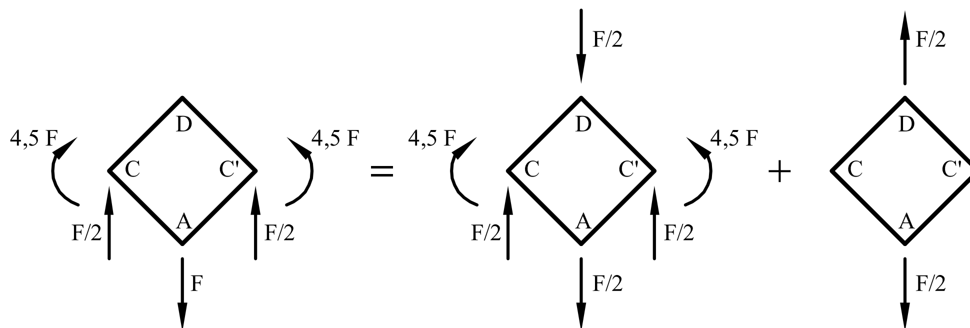


Fig.2 Simetría y antisimetría

- *Análisis de la parte antisimétrica*

  Por simetría respecto a un eje vertical que pasa por *A* y *D* el giro en *A* y en *D* es nulo. Por antimetría respecto a un eje horizontal que pasa por *C* y *C'* sucede que el movimiento horizontal de *C* respecto a *C'* es nulo, por lo que también serán nulos los movimientos verticales de *A* y *D*. Por lo tanto, las cuatro barras se comportarán de la misma forma. Eligiendo una cualquiera de ellas, por ejemplo la *CD*, se tendrá el esquema de cálculo que se indica en la figura 3.

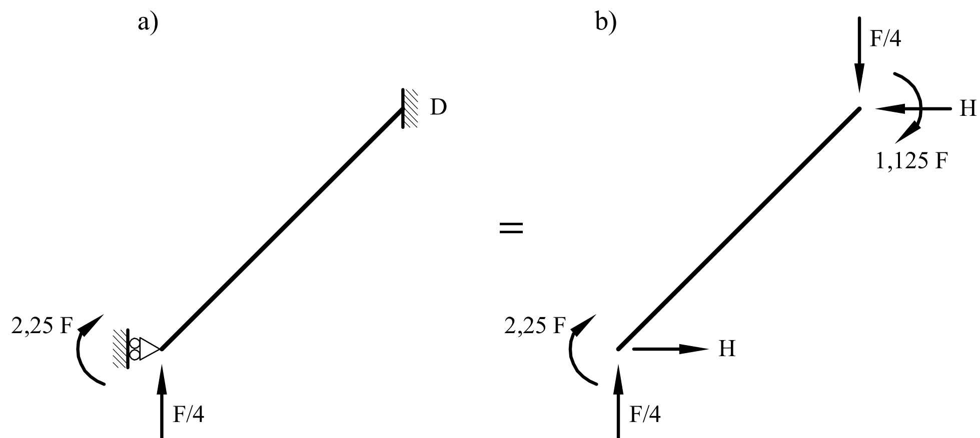


Fig. 3 Comportamiento de la viga CD

Por equilibrio de momentos se obtiene $H = 1{,}375\,F$

- *Análisis de la parte simétrica*

Por simetría respecto a un eje horizontal y respecto a un eje vertical los giros en cada uno de los vértices serán nulos. Además, el movimiento vertical de *A* y *D* será igual al movimiento horizontal de *C* y *C'* (ver figura 4 a)). Al igual que antes, el comportamiento de cada una de las cuatro barras será el mismo. En la figura 4 b) puede verse el comportamiento de *CD*.

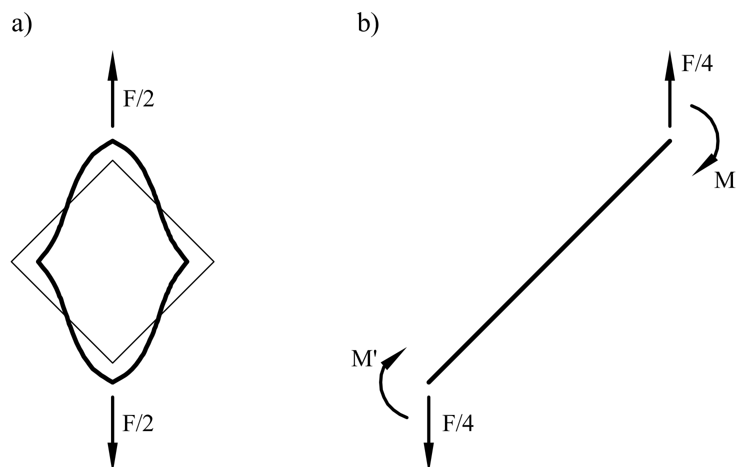


Fig4 a) Deformada. b) Barra CD

Por equilibrio de momentos, $M' = 0{,}375\,F$

En la figura 5 pueden verse representadas las leyes de momentos flectores, cortantes y axiles.

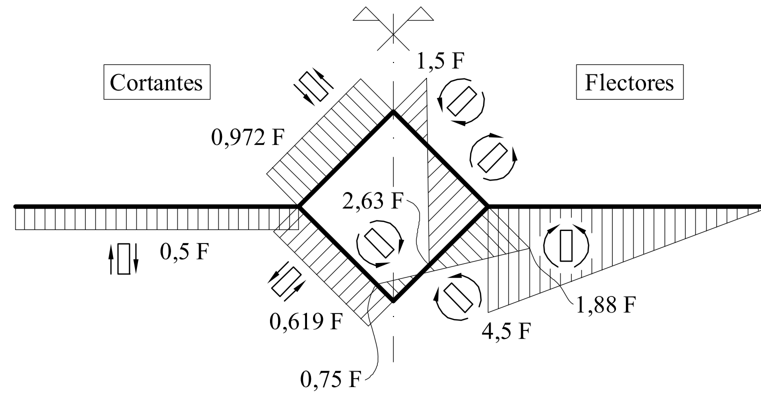


Fig5 Ley de momentos flectores y de esfuerzos cortantes

A partir de los resultados anteriores se obtiene el desplazamiento vertical del punto *A*.

$$\delta_A = \frac{144\,F}{EI} \qquad (descendente)$$

Problema 11.24 *Determinar la ley de momentos flectores en la estructura de la figura 1*

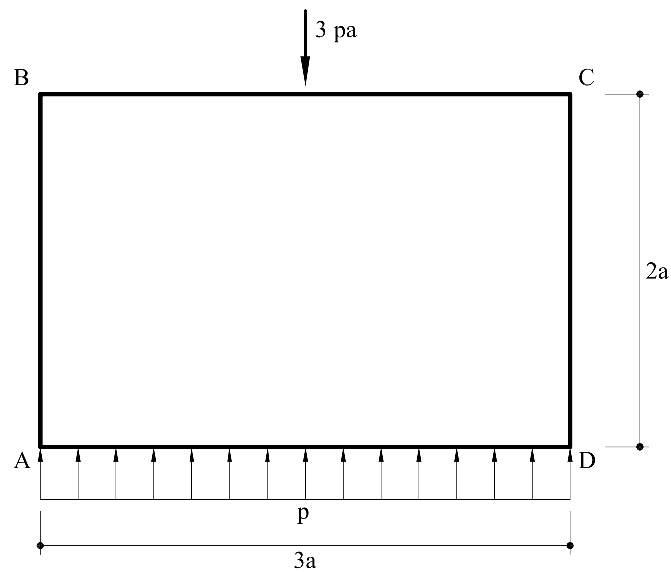


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 11.24

Solución

La estructura es intraslacional y simétrica respecto a un eje vertical.
Se descompone la estructura en vigas simples (figura 2).

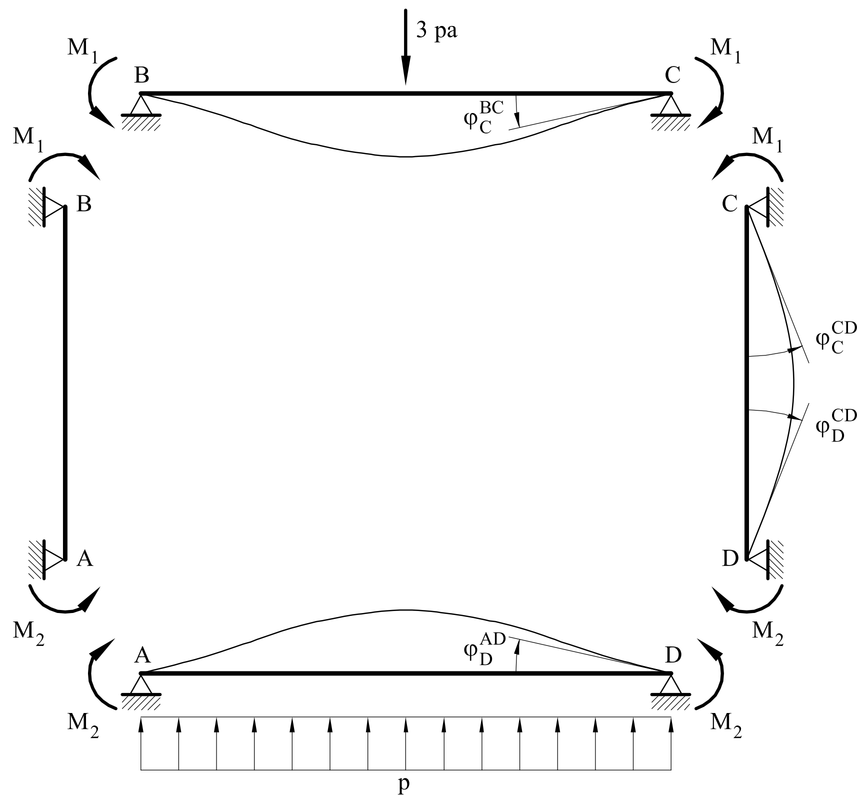


Fig. 2 Descomposición en vigas simples

Se calculan los giros:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_C^{BC} &= \frac{3\,pa(3a)^2}{16\,EI} - \frac{M_1 \cdot 3a}{2\,EI} = \frac{27}{16}\frac{p\,a^3}{EI} - \frac{3}{2}\frac{M_1 a}{EI}\\ \varphi_C^{CD} &= \frac{M_1 2a}{3\,EI} + \frac{M_2 2a}{6\,EI}\end{aligned}\right\} =$$

Igualando ambos giros se obtiene la primera ecuación

$$2{,}1667\,M_1 + 0{,}3333\,M_2 = 1{,}6875\,pa^2$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi_D^{DC} &= -\frac{M_1 \cdot 2a}{6\,EI} - \frac{M_2 2a}{3\,EI}\\ \overrightarrow{\varphi_D^{AD}} &= -\frac{p(3a)^3}{24\,EI} + \frac{M_2 3a}{2\,EI}\end{aligned}\right\}\text{Igualando:}$$

$$0{,}333\,M_1 + 2{,}1667\,M_2 = 1{,}125\,pa^2$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$M_1 = 0{,}716\,pa^2$$

$$M_2 = 0{,}42\,pa^2$$

En la figura 3 puede verse representada la ley de momentos flectores.

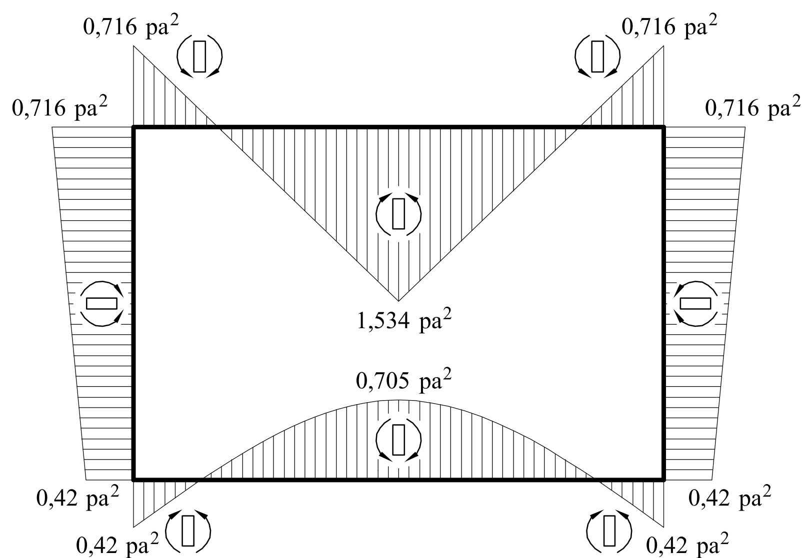


Fig. 3 Ley de momentos flectores

Problema 11.25 *En la estructura hexagonal (regular) que se representa en la figura 1, determinar el valor del momento flector en el punto A.*

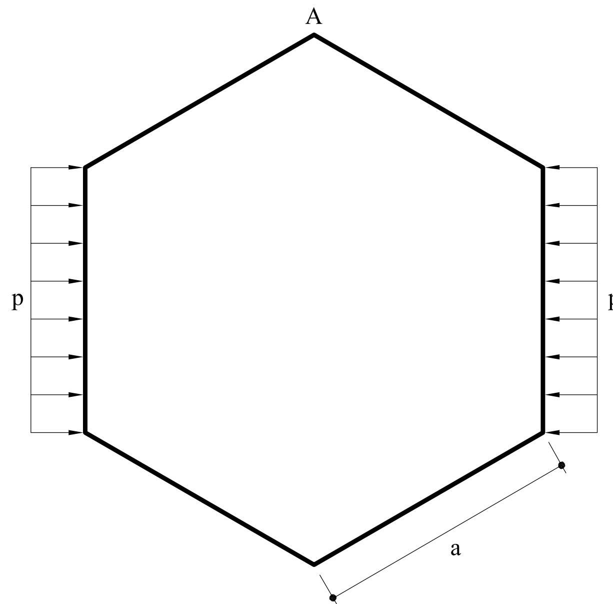


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 11.25

Solución

La estructura es simétrica respecto a un eje horizontal y respecto a un eje vertical. Cortando por ambos ejes, la estructura se reduce a la dibujada en la figura 2

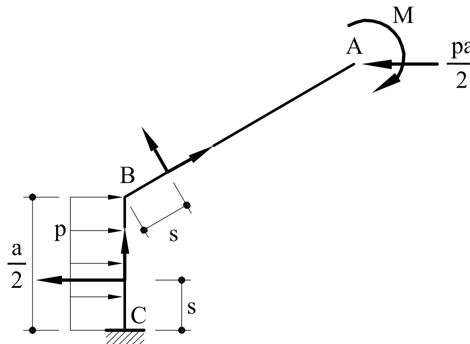


Fig. 2 Estructura descompuesta y ejes locales

Las leyes de momentos flectores se escribe:

$$M_f\Big|_A^B = \frac{pa}{4}(a-s) - M$$

$$M_f\Big|_B^C = \frac{pa}{2}(a-s) - M - \frac{p\left(\frac{a}{2}-s\right)^2}{2}$$

El momento hiperestático M se determinará imponiendo la condición de que el giro en A sea cero:

$$\varphi_A = 0 = \int_0^a M_f \Big|_A^B \frac{ds}{EI} + \int_0^{a/2} M_f \Big|_B^C \frac{ds}{EI}$$

es decir,

$$M = \frac{7}{36} pa^2$$

Problema 11.26 *Determinar la ley de momentos flectores en la estructura de la figura 1.*

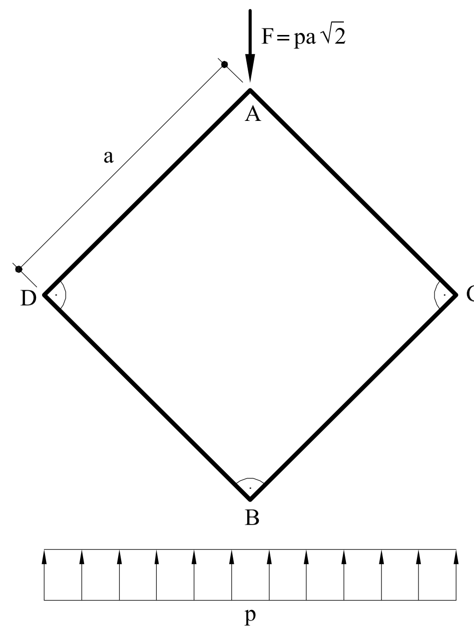


Fig. .1 Estructura correspondiente al problema 11.26

Solución

Se estudiarán diversas alternativas de solución

a) *Utilizando las fórmulas de Navier-Bresse*

Al ser la estructura simétrica respecto a un eje vertical, los giros de *A* y *B* son nulos. Por tanto, se corta por *A* y *B* quedando la media estructura indicada en la figura 2. Las incógnitas hiperestáticas *H* y *M* se obtendrán de imponer las dos condiciones:

- Movimiento horizontal de *B* igual a cero
- Giro de *B* igual a cero

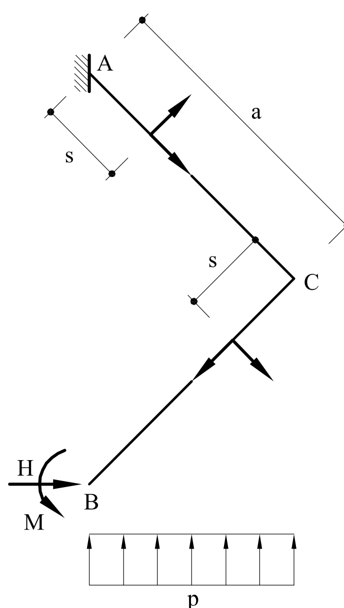


Fig. 2 División de la estructura y ejes locales

Las leyes de momentos flectores se escriben:

$$M_f\Big|_B^C = -p\frac{[(a-s)\cos 45]^2}{2} + M + H(a-s)\cos 45$$

$$M_f\Big|_A^C = p\,a\cos 45\left(\frac{a}{2}-s\right)\cos 45 + H(2a-s)\cos 45 + M$$

El movimiento horizontal del punto *B* se escribe

$$u_{1B} = \int_0^a M_f\Big|_B^C (a-s)\cos 45\,\frac{ds}{EI} + \int_0^a M_f\Big|_A^C (2a-s)\cos 45\,\frac{ds}{EI} =$$

$$= (1{,}33333\,a^3H + 1{,}41421\,a^2M - 0{,}0147314\,a^4p)/EI = 0$$

El giro de *B* vale

$$\varphi_B = \int_0^a M_f\Big|_B^C \frac{ds}{EI} + \int_0^a M_f\Big|_A^C \frac{ds}{EI} = (1{,}4142\,a^2H + 2\,a\,M - 0{,}0833333\,a^3p)/EI = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$H = -0{,}1326\,pa$$
$$M = 0{,}1354\,pa^2$$

b) Descomposición en vigas simples

La deformada de la pieza será aproximadamente la que se representa en la figura 3. Dado que la estructura no descansa en ningún apoyo fijo, puede imponerse que el desplazamiento δ del punto *A* sea igual al desplazamiento del punto *B*.

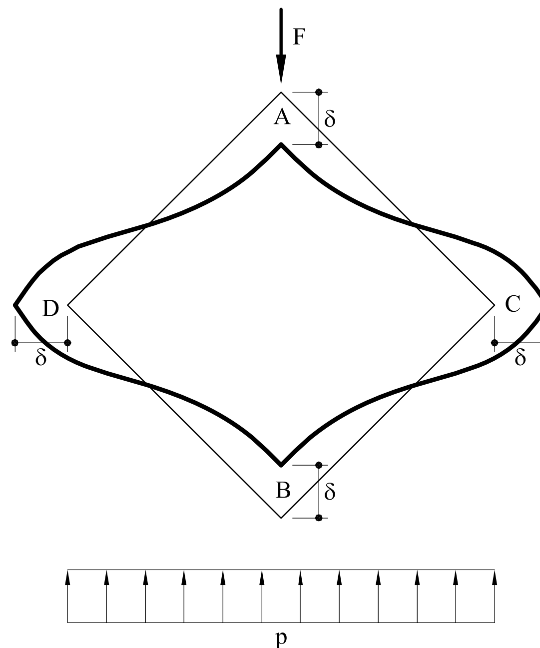


Fig. 3 Deformada a estima

Cortando por los puntos *A*, *D* y *B* aparecen las dos vigas de la figura 4 que también pueden verse en la figura 5.

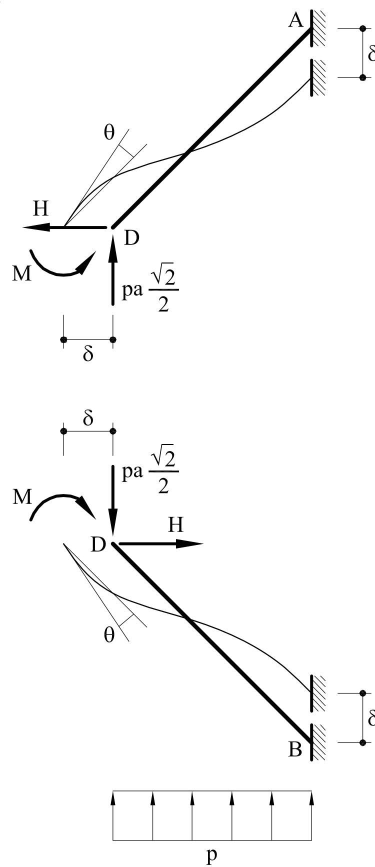


Fig. 4 Descomposición en vigas simples

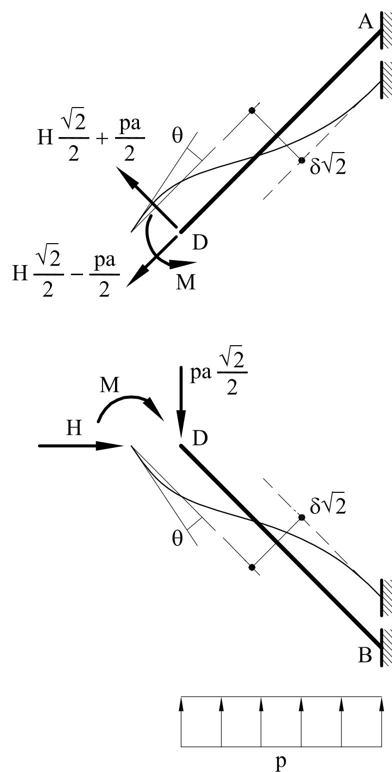


Fig. 5 Piezas AD y BD

Las incógnitas hiperestáticas *M* y *H* se obtendrá de igualar el desplazamiento y el giro en el punto *D*.

- Pieza *AD*:

$$\delta\sqrt{2}=\frac{\left(H\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{pa}{2}\right)a^3}{3EI}-\frac{M\,a^2}{2EI}$$

$$\theta=-\frac{\left(H\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{pa}{2}\right)a^2}{2EI}+\frac{Ma}{EI}$$

- Pieza *BD*:

$$\delta\sqrt{2}=-\frac{\left(H\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{pa}{2}\right)a^3}{3EI}-\frac{M\,a^2}{2EI}-\frac{pa^4}{16EI}$$

$$\theta=-\frac{\left(H\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{pa}{2}\right)a^2}{2EI}-\frac{Ma}{EI}-\frac{pa^3}{12EI}$$

Igualando el movimiento y el giro:

$$\frac{H\sqrt{2}}{6}a^3=-\frac{H\sqrt{2}}{6}a^3-\frac{pa^4}{16}$$

$$-\frac{pa^2}{2}+2M\,a=-\frac{p\,a^3}{12}$$

Es decir,

$$H=-0{,}1326\,pa$$

$$M=0{,}2083\,pa^2$$

En la figura 6 pueden verse representadas las leyes de momentos flectores.

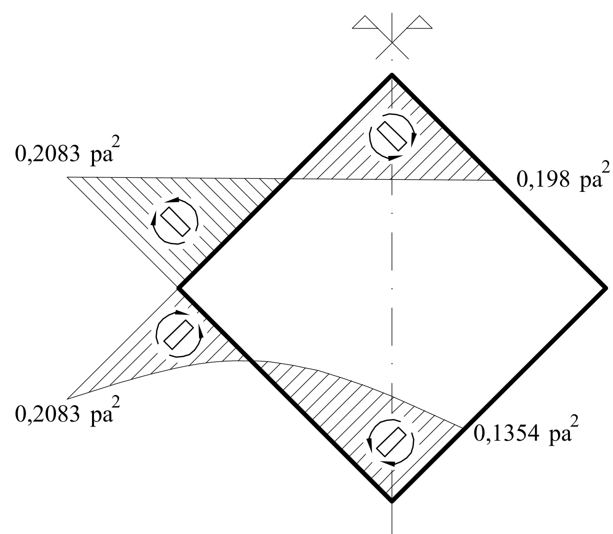


Fig. 6 Ley de momentos flectores.

Problema 11.27 *Dado el marco de la figura 1 con las fuerzas que se indican, se pide determinar la ley de momentos flectores.*

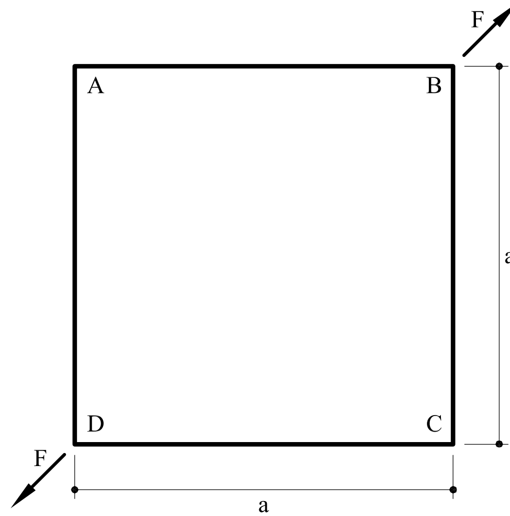


Fig. 1 Marco correspondiente al problema 11.27

Solución

La estructura es simétrica respecto a los ejes *AC* y *BD* por lo cual el giro es nulo en los cuatro vértices. En la figura 2 se ha aislado la barra *AB*. La incógnita hiperestática *M* se obtendrá al imponer que el giro en *B* sea nulo.

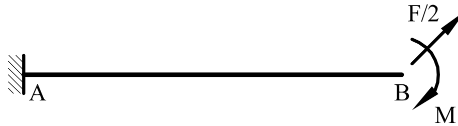


Fig. 2 Pieza AB

$$\varphi_B = 0 = \frac{\left(\frac{F}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a^2}{2EI} - \frac{M\,a}{EI}$$

es decir,

$$M = \frac{\sqrt{2}}{8}a\,F = 0{,}1768\ a\,F$$

En la figura 3 puede verse representada la ley de momentos flectores

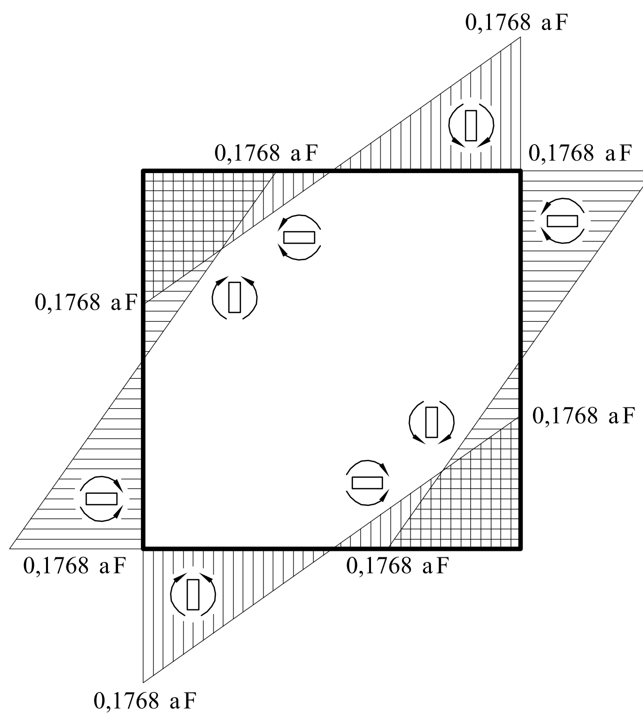


Fig. 3 Ley de momentos flectores

Problema 11.28 *La estructura de la figura 1 está sometida a las cargas indicadas. Utilizando el teorema de Castigliano, hallar y dibujar:*

- *Reacciones*
- *Ley de momentos flectores*
- *Ley de esfuerzos cortantes*

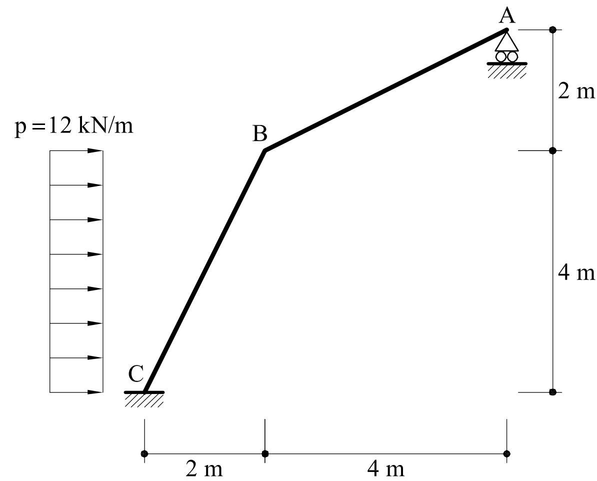


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 11.28

Solución

Se tomará como incógnita hiperestática la reacción vertical en A. Dicha reacción se obtendrá al imponer la nulidad del desplazamiento vertical en A. En la figura 2 pueden verse los ejes locales adoptados.

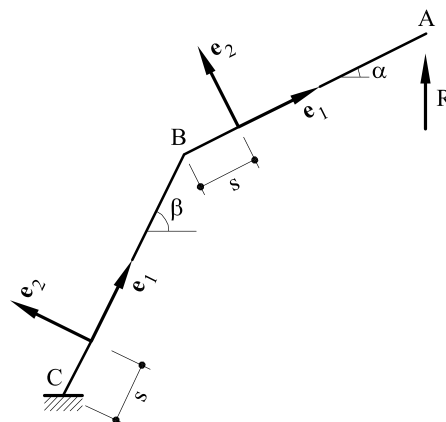


Fig.2 Ejes locales

Las leyes de momentos flectores se escriben:

$$M_f\Big|_A^B = R(4 - s\cos\alpha)$$

$$M_f\Big|_B^C = R(6 - s\cos\beta) - \frac{12}{2}(4 - s\sin\beta)^2$$

Y derivando con respecto a R

$$\frac{\partial M_f\Big|_A^B}{\partial R} = 4 - s\cos\alpha$$

$$\frac{\partial M_f\Big|_B^C}{\partial R} = 6 - s\cos\beta$$

El movimiento vertical del punto A debe ser cero. Utilizando el teorema de Castigliano

$$v_A = \int_0^{4,472} M_f\Big|_A^B \frac{\partial M_f\Big|_A^B}{\partial R}\frac{ds}{EI} + \int_0^{4,472} M_f\Big|_B^C \frac{\partial M_f\Big|_B^C}{\partial R}\frac{ds}{EI} = \frac{1}{EI}(137{,}146\,R - 787{,}096) = 0$$

$$R = 5{,}74\,kN$$

En las figuras 3 y 4 se representan las leyes de momentos flectores y de esfuerzos cortantes.

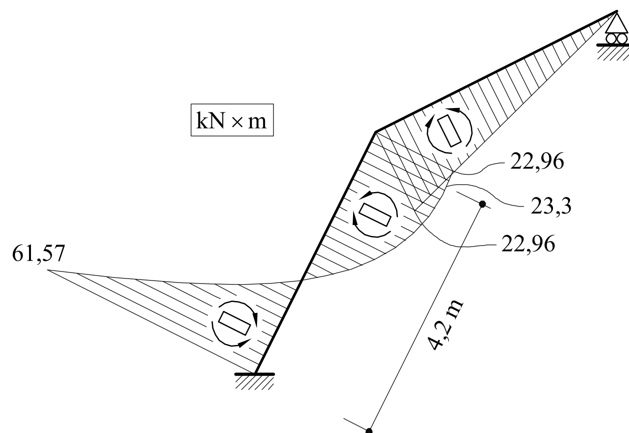


Fig. 3 Ley de momentos flectores

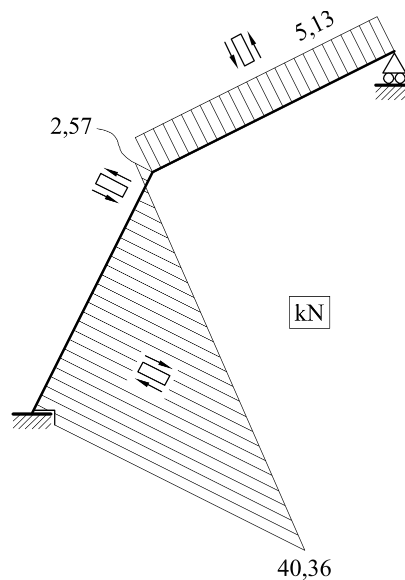


Fig. 4 Ley de esfuerzos cortantes

Problema 11.29 *En el pórtico de la figura 1, hallar las leyes de momentos flectores, esfuerzos cortantes y esfuerzos axiles.*

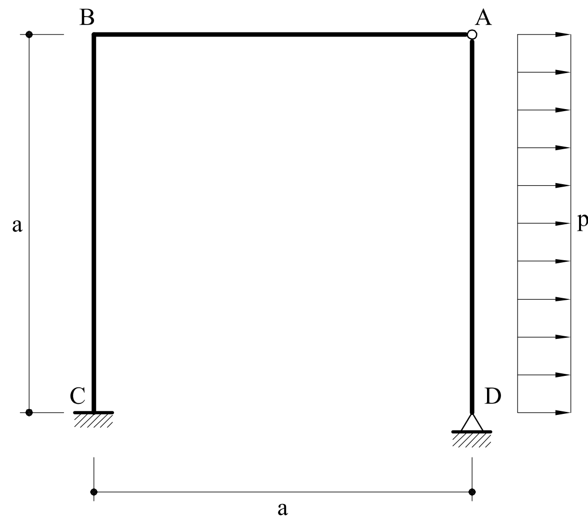


Fig. 1 Pórtico correspondiente al problema 11.29

Solución

El pórtico es una vez hiperestático. Se toma como incógnita hiperestática el axil en *AD* (figura 2)

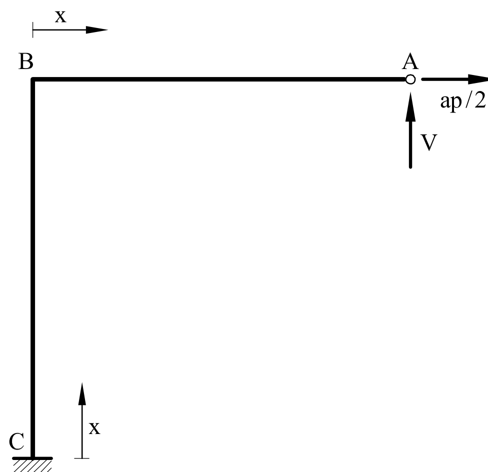


Fig. 2 Incógnita hiperestática y ejes locales

Las leyes de momentos se escriben

$$M_f\Big|_A^B = V\left(a-x\right)$$

$$M_f\Big|_B^C = Va - \frac{a\,p}{2}\left(a-x\right)$$

El movimiento vertical de *A* vale:

$$v_A = \int_0^a M_f\Big|_A^B (a-x)\frac{dx}{EI} + \int_0^a M_f\Big|_B^C a\frac{dx}{EI} = \frac{a^3}{EI}\left(-\frac{a\,p}{4} + \frac{4V}{3}\right)$$

Es decir,

$$V = \frac{3}{16}\,a\,p = 0{,}1875\;a\,p$$

En la figura 3 pueden verse representadas las leyes de esfuerzos.

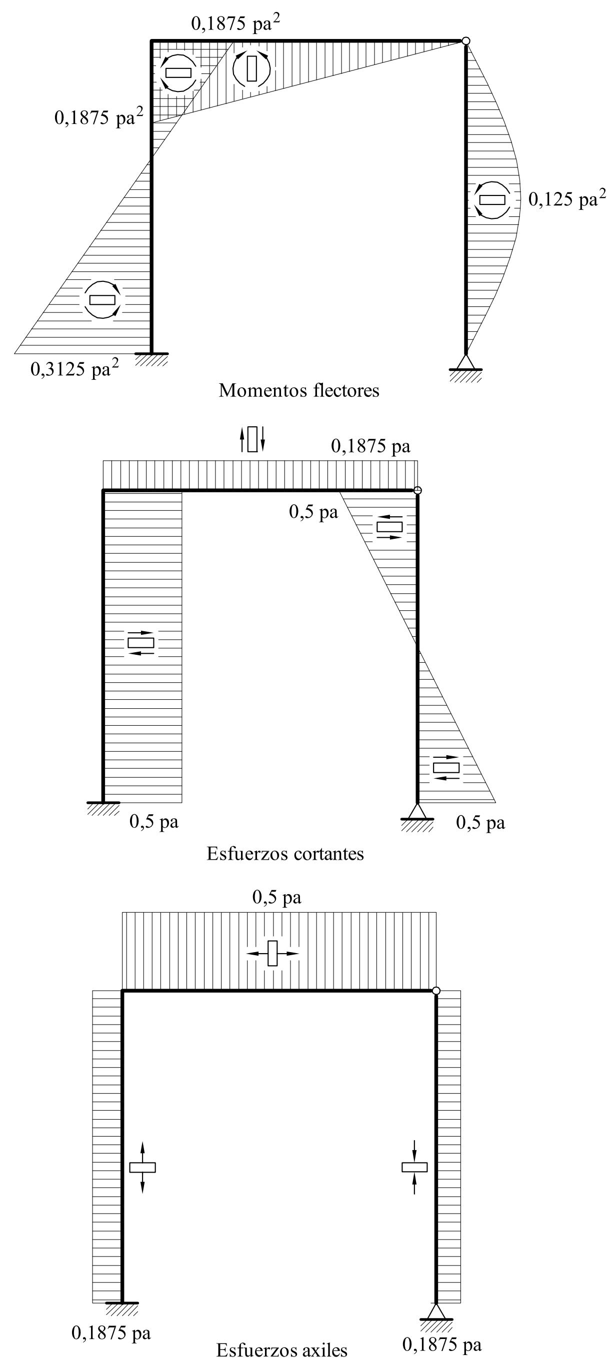


Fig. 3 Leyes de esfuerzos

Problema 11.30 *Determinar las leyes de esfuerzos en el pórtico que se representa en la fig. 1.*

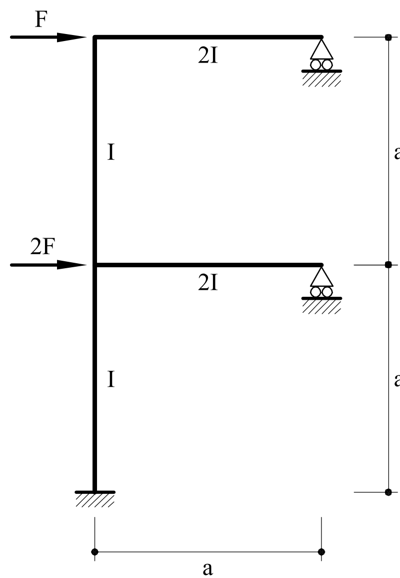


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema resuelto 11.30

Solución

La estructura es dos veces hiperestática. Se tomarán como incógnitas hiperestáticas las reacciones verticales en los apoyos deslizantes. Mediante las ecuaciones de Navier-Bresse se obtendrán los movimientos verticales en dichos apoyos y se impondrá la condición de que sean nulos.

En la figura 2 pueden verse los ejes locales adoptados así como las reacciones hiperestáticas.

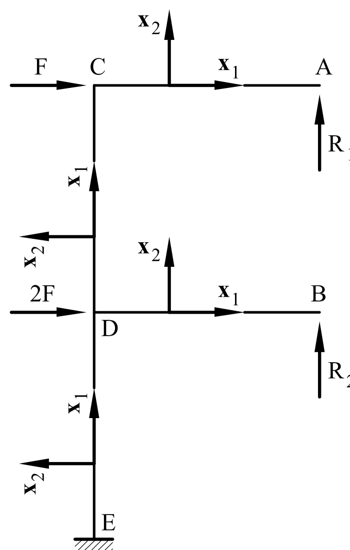


Fig. 2 Reacciones y ejes locales

Las leyes de momentos flectores se escriben:

$$M_f\Big|_A^C = R_1\left(a - x_1\right)$$

$$M_f\Big|_C^D = R_1\, a - F\left(a - x_1\right)$$

$$M_f\Big|_B^D = R_2\left(a - x_1\right)$$

$$M_f\Big|_E^D = \left(R_1 + R_2\right)a - F\left(2\,a - x_1\right) - 2\,F\left(a - x_1\right) = \left(R_1 + R_2\right)a - F\left(4\,a - 3\,x_1\right)$$

Utilizando las fórmulas de Navier-Bresse, los movimientos verticales de *A* y *B* se escribirán respectivamente

$$v_A = \int_A^C M_f\Big|_A^C \left(a - x_1\right)\frac{dx_1}{2\,EI} + \int_C^D M_f\Big|_C^D a\frac{dx_1}{EI} + \int_E^D M_f\Big|_E^D a\frac{dx_1}{EI}$$

$$v_B = \int_D^B M_f\Big|_D^B \left(a - x_1\right)\frac{dx_1}{2\,EI} + \int_E^D M_f\Big|_E^D a\frac{dx_1}{EI}$$

Es decir:

$$v_A = \int_o^a R_1\left(a - x_1\right)^2\frac{dx_1}{2\,EI} + \int_o^a \left[R_1\, a - F\left(a - x_1\right)\right]a\frac{dx_1}{EI} + $$
$$+ \int_o^a \left[\left(R_1 + R_2\right)a - F\left(4\,a - 3\,x_1\right)\right]a\frac{dx_1}{EI} = 0$$

$$v_B = \int_o^a R_2\left(a - x_1\right)\frac{dx_1}{2\,EI} + \int_o^a \left[\left(R_1 + R_2\right)a - F\left(4a - 3x_1\right)\right]a\frac{dx_1}{EI} = 0$$

Lo cual conduce al sistema de ecuaciones.

$$\frac{13}{6}R_1 + R_2 = 3F$$

$$R_1 + \frac{7}{6}R_2 = \frac{5}{2}F$$

Resolviendo el sistema:

$$R_1 = 0{,}6545\,F$$

$$R_2 = 1{,}5818\,F$$

A partir de los valores de las reacciones, en la figura 3 se dibujan las leyes de momentos flectores.

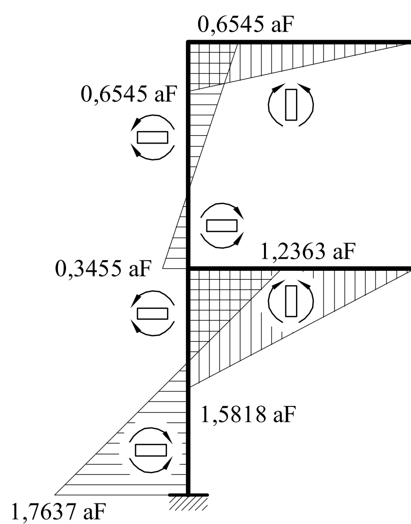


Fig. 3 Leyes de momentos flectores

Problema 11.31 *En la estructura, cuya forma, dimensiones y cargas se indican en la figura 1 y en la que todas las barras son de sección constante con* $EI = 10^5\ kN\ m^2$.
Se pide:
Corrimiento horizontal y giro del nudo A.

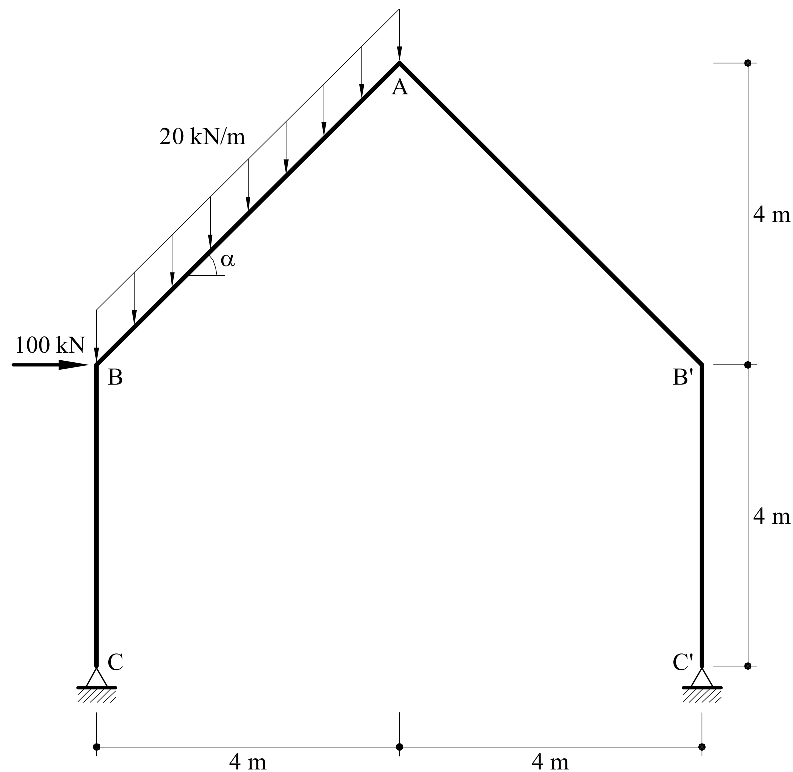


Fig. 1 Pórtico correspondiente al problema 11.31

Solución

La estructura es simétrica de forma pero no de cargas. Por lo tanto puede ser descompuesta en un estado simétrico y uno antimétrico. Para el estado simétrico el punto *A* no experimenta giro ni desplazamiento horizontal, por lo cual puede prescindirse de él a los efectos que interesan (no así para la determinación de las leyes de esfuerzos).
En la figura 2 puede verse el estado antimétrico así como los ejes locales elegidos.

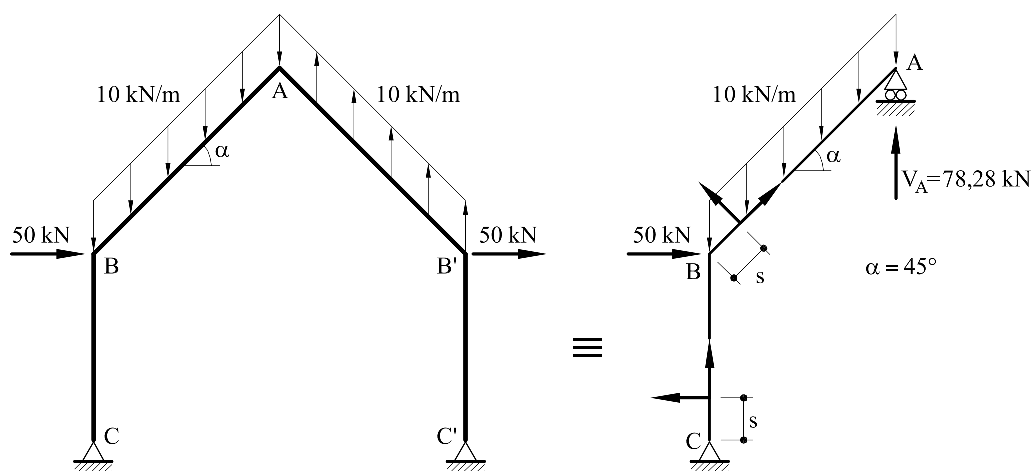


Fig. 2 Estado antimétrico y ejes locales

El movimiento horizontal del punto *A* puede obtenerse de forma indistinta utilizando el teorema de la fuerza unidad, el teorema de Castigliano (ver Capítulo 7), las fórmulas de Navier-Bresse o la descomposición en vigas simples. Se seguirán los dos últimos métodos:

a) *Movimiento horizontal y giro de A utilizando las fórmulas de Navier-Bresse.*

Las leyes de momentos flectores se escriben:

$$M_f\Big|_A^B = V_A(4-s\cos\alpha)-10\frac{(4-s\cos\alpha)^2}{2\cos\alpha} = 78{,}28(4-s\cos 45)-5\frac{(4-s\cos 45)^2}{\cos 45}$$
$$M_f\Big|_B^C = 50\,s$$

El movimiento horizontal de *A* se escribe

$$u_{1A} = -\varphi_C \times 8 - \int_A^B M_f\Big|_A^B (4-s\sin\alpha)\frac{ds}{EI} - \int_B^C M_f\Big|_B^C (8-s)\frac{ds}{EI} = -8\varphi_C - \frac{3\,855}{EI}$$

El movimiento vertical de *A* es nulo

$$u_{2A} = 4\varphi_C + \int_A^B M_f\Big|_A^B (4-s\cos\alpha)\frac{ds}{EI} + \int_B^C M_f\Big|_B^C \frac{4\,ds}{EI} = 4\varphi_C + \frac{3\,321{,}7}{EI} = 0$$

De la segunda ecuación se obtiene

$$\varphi_C = -\frac{830{,}43}{EI} = -0{,}0083043 \; rdn$$

Sustituyendo en u_{1A}

$$u_{1A} = \frac{8\times 830{,}43 - 3\,855}{EI} = \frac{2\,788{,}44}{EI} = 0{,}0278844 \; m$$

El giro en *A* se escribe

$$\varphi_A = \varphi_C + \int_A^B M_f\Big|_A^B \frac{ds}{EI} + \int_B^C M_f\Big|_B^C \frac{ds}{EI} = \frac{-830{,}43 + 1\,072{,}3}{EI} = 0{,}0024187 \; radianes$$

b) *Movimiento horizontal y giro de A mediante la descomposición en vigas simples*.

Si u_{1A} es el movimiento horizontal de *A*, el movimiento horizontal de *B* valdrá también u_{1A} (figura 3). Asimismo, el momento flector en *B* vale: $M_{fB} = 50\times 4 = 200\,kN\,m$. Se descompone la mitad del pórtico antimétrico en dos vigas simples con los apoyos no fijos (ver figura 3) y se igualan los giros en *B*.

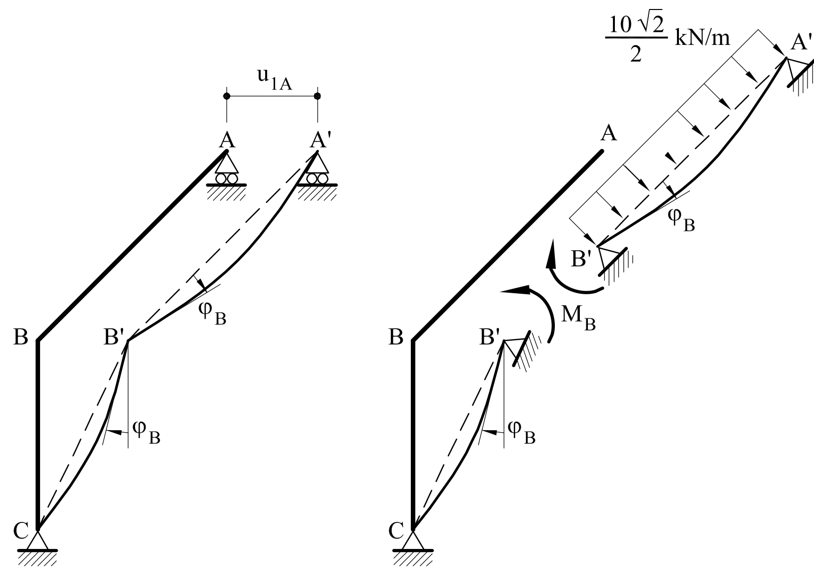


Fig. 3 Deformada de la mitad del pórtico antimétrico y descomposición en vigas simples

$$\varphi_B^{CB} = -\frac{u_{1A}}{4} + \frac{M_B \times 4}{3EI} = -\frac{u_{1A}}{4} + \frac{266{,}67}{EI}$$

$$\varphi_B^{BA} = -\frac{M_B 4\sqrt{2}}{3EI} - \frac{\left(10\sqrt{2/2}\right)\left(4\sqrt{2}\right)^3}{24EI}$$

Igualando giros se obtiene:

$$u_{1A} = \frac{2\,788{,}44}{EI} = 0{,}0278844 \;\; m$$

El giro en *A* valdrá

$$\varphi_A = \frac{M_B \times 4\sqrt{2}}{6EI} + \frac{\left(10\sqrt{2}/2\right)\left(4\sqrt{2}\right)^3}{24EI} = 0{,}0024187 \; radianes$$

Problema 11.32 *En el hexágono regular de lado a que se representa en la figura 1, hallar y dibujar las leyes de momentos flectores y las de esfuerzos cortantes.*

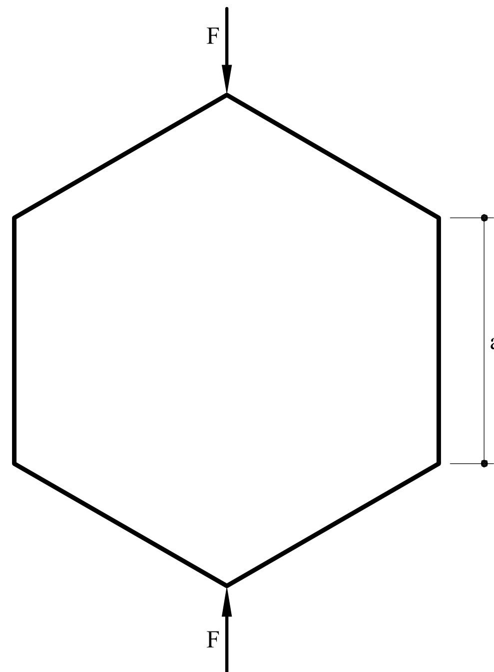


Fig.1 Estructura correspondiente al problema 11.32

Solución

La estructura tiene simetría respecto a un eje horizontal y respecto a un eje vertical. Cortando la estructura por dichos ejes de simetría, queda la estructura reducida de la figura 2

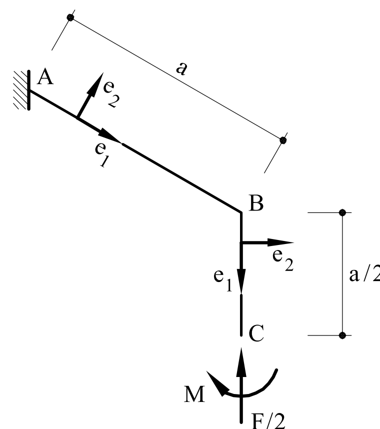


Fig. 2. Estructura después de realizados los cortes

La incógnita *M* se obtendrá imponiendo la condición de giro nulo en el punto *C*. La ley de momentos flectores se escribe

$$M_f\Big|_B^C = -M$$

$$M_f\Big|_A^B = \frac{F}{2}(a - x_1)\cos 30 - M$$

Con lo cual, el giro en C valdrá

$$\varphi_C = 0 = \int_0^{a/2}(-M)\frac{d\,x_1}{E\,I} + \int_0^a \left[\frac{F}{2}(a - x_1)\cos 30 - M\right]\frac{d\,x_1}{E\,I} = -\frac{3M\,a}{2E\,I} + \frac{F\,a^2}{4E\,I}\cos 30 = 0$$

O sea:

$$M = 0{,}144\,F\,a$$

En las figuras 3 y 4 pueden verse representadas las leyes de momentos flectores y esfuerzos cortantes.

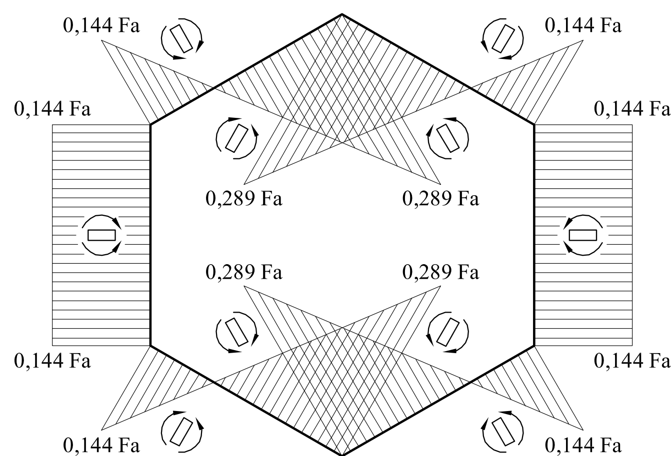


Fig.3. Ley de momentos flectores

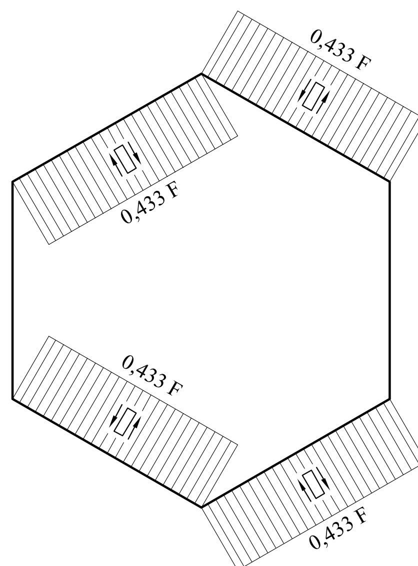


Fig.4. Ley de esfuerzos cortantes

Problema 11.33 *Aplicando las expresiones de Navier-Bresse, hallar la ley de momentos flectores del pórtico representado en la figura 1.*

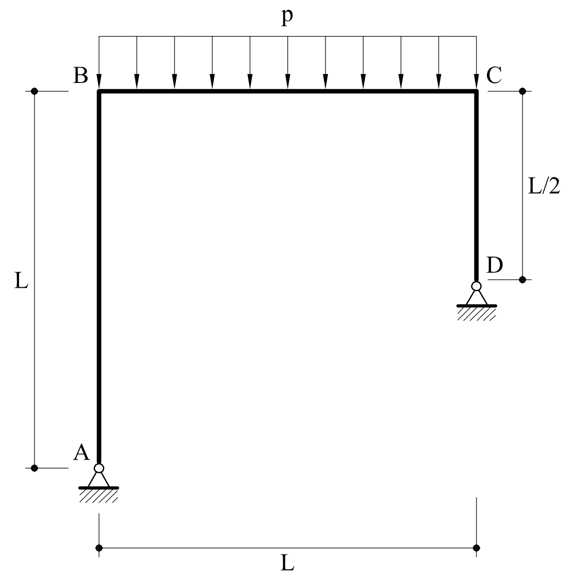


Fig.1 Pórtico correspondiente al problema 11.33

Solución

La estructura es una vez hiperestática. Se tomará como incógnita hiperestática la reacción horizontal en D.

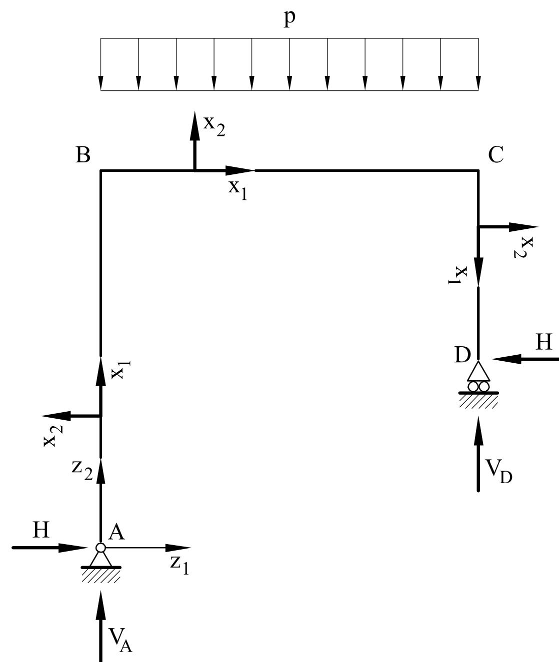


Fig.2 Reacciones y ejes locales.

Por equilibrio:

$$V_D = \frac{p\,L}{2} - \frac{H}{2}$$

$$V_A = \frac{p\,L}{2} + \frac{H}{2}$$

Las leyes de momentos flectores se escriben:

$$M_f\Big|_A^B = -H\,x_1$$

$$M_f\Big|_B^C = -H\,L + V_A x_1 - p\frac{x_1^2}{2} = -H\,L + \left(\frac{p\,L}{2} + \frac{H}{2}\right)x_1 - p\frac{x_1^2}{2}$$

$$M_f\Big|_C^D = -H\left(\frac{L}{2} - x_1\right)$$

Utilizando las ecuaciones de Navier-Bresse se calcula el movimiento horizontal de *D*, el cual, por compatibilidad, debe ser nulo

$$u_{1D} = u_{1A} - \varphi_A\frac{L}{2} - \int_0^L M_f\Big|_A^B\left(\frac{L}{2} - x_1\right)\frac{d\,x_1}{E\,I} + \int_0^L M_f\Big|_B^C\frac{L}{2}\frac{d\,x_1}{E\,I} + \int_0^{L/2} M_f\Big|_C^D\left(\frac{L}{2} - x_1\right)\frac{dx_1}{E\,I} =$$

$$= -\varphi_A\frac{L}{2} - \frac{1}{E\,I}\left(\frac{H\,L^3}{2} - \frac{p\,L^4}{24}\right) = 0$$

El giro en *A* se obtendrá de imponer la condición de desplazamiento vertical nulo en *D*

$$u_{2D} = u_{2A} + \varphi_A\,L + \int_0^L M_f\Big|_A^B L\frac{d\,x_1}{E\,I} + \int_0^L M_f\Big|_B^C (L - x_1)\frac{d\,x_1}{E\,I} + 0 = 0$$

Y teniendo presente que $u_{2A} = 0$, de la anterior expresión se obtiene:

$$\varphi_A = -\frac{p\,L^3}{24\,E\,I} + \frac{11}{12}\frac{H\,L^2}{E\,I}$$

Por lo que, sustituyendo el valor de φ_A en la expresión de u_{1D} se tendrá:

$$-\left[\frac{-p\,L^3}{24\,E\,I} + \frac{11}{12}\frac{H\,L^2}{E\,I}\right]\frac{L}{2} - \frac{1}{E\,I}\left(\frac{H\,L^3}{2} - \frac{p\,L^4}{24}\right) = 0$$

Es decir:

$$H = \frac{3}{46}p\,L$$

Con lo cual, las reacciones valdrán:

$$V_A = \frac{49}{92} p\,L \qquad\qquad V_D = \frac{43}{92} p\,L$$

En la figura 3 se representa la ley de momentos flectores

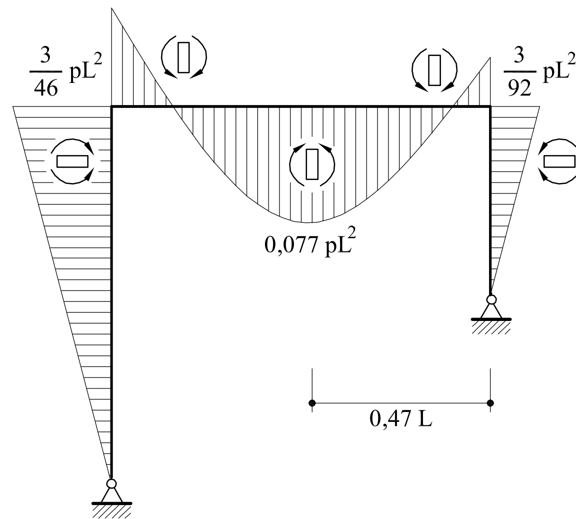


Fig.3 Ley de momentos flectores.

Problema 11.34 *En la estructura que se representa en la figura 1, el punto* O' *sufre un descenso de apoyo de valor* δ *. Determinar las leyes de momentos flectores*

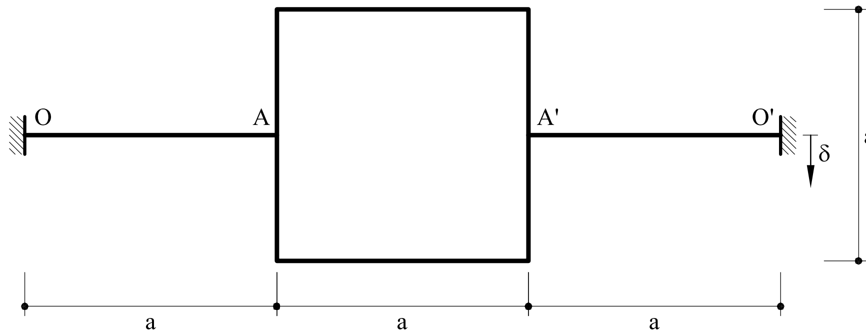


Fig.1 Estructura correspondiente al problema 11.34

Solución

La estructura es simétrica de forma respecto a un eje vertical y respecto a un eje horizontal, pero no de carga. Se descompone la estructura en dos estados de carga:

- *Estado simétrico,* consistente en un descenso de apoyo de valor $\delta/2$ en los apoyos O y O'. Este estado de carga no produce esfuerzos.

- *Estado antimétrico,* consistente en una elevación $\delta/2$ del apoyo O y en un descenso $\delta/2$ del apoyo O'. Para este estado de carga se puede considerar únicamente la mitad de la estructura (por ejemplo, la mitad izquierda) tal como se representa en la figura 2.

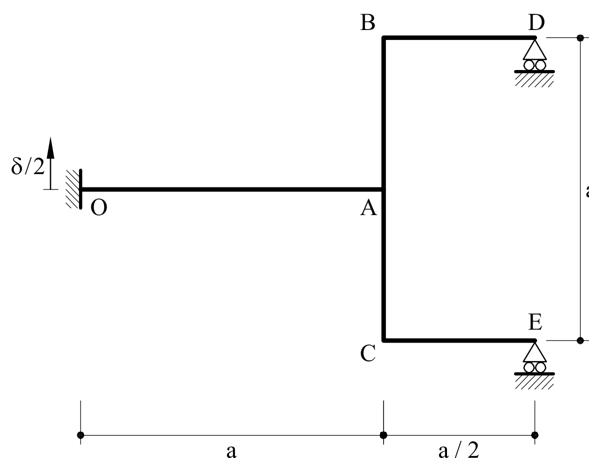


Fig.2 Descomposición de la estructura antimétrica.

Asimismo, en la mencionada estructura antimétrica, puede suponerse que el punto O permanece fijo, mientras que los puntos *D* y *E* descienden $\delta/2$. Además, las reacciones

verticales en D y E son iguales, debido a que la estructura es antimétrica respecto a un eje horizontal (figura 3)

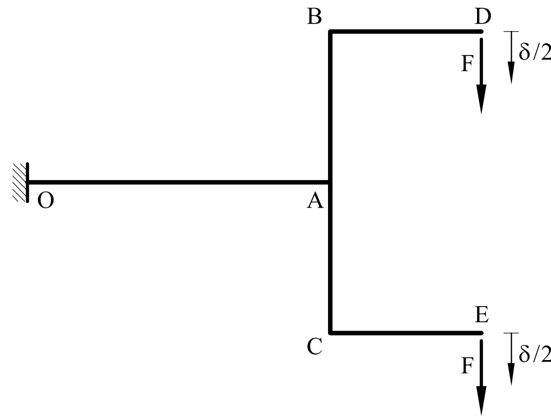


Fig.3 Transformación de la estructura antimétrica.

Es evidente que si se conoce F pueden hallarse las leyes de esfuerzos. Para ello, es preciso imponer la condición que el desplazamiento vertical de D (o de E) valga $\delta/2$. Es decir:

$$\delta_D = \delta/2 = \upsilon_A + \varphi_A \cdot \frac{a}{2} + \upsilon_{AD}$$

siendo:

υ_A: Desplazamiento vertical del punto A (positivo si descendente)

φ_A: Giro del punto A (positivo si horario)

υ_{AD}: Desplazamiento relativo del punto D respecto al punto A (positivo si descendente)

El valor de υ_A puede obtenerse a partir de la figura 4:

$$\upsilon_A = \frac{2Fa^3}{3EI} + \frac{aF \cdot a^2}{2EI} = \frac{7}{6}\frac{Fa^3}{EI}$$

$$\varphi_A = \frac{2Fa^2}{2EI} + \frac{aF \cdot a}{EI} = \frac{2Fa^2}{EI}$$



Fig.4 Barra OA

El valor υ_{AD} se obtiene a partir de la figura 5

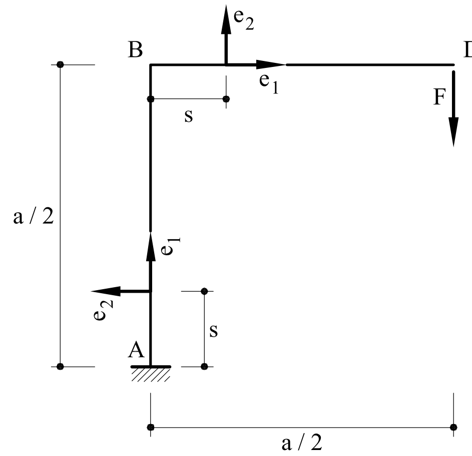


Fig.5 Subestructura ABD

$$M_f\Big|_B^D = -F\left(\frac{a}{2}-s\right)$$

$$M_f\Big|_A^B = -F\frac{a}{2}$$

Es decir:

$$\upsilon_{AD} = -\int_0^{a/2} M_f\Big|_B^D\left(\frac{a}{2}-s\right)\frac{ds}{EI} - \int_0^{a/2} M_f\Big|_A^B\frac{a}{2}\frac{ds}{EI} = \frac{Fa^3}{24EI}+\frac{Fa^3}{8EI}=\frac{Fa^3}{6EI}$$

Y sustituyendo:

$$\delta_D = \delta/2 = \frac{7}{6}\frac{Fa^3}{EI}+\frac{2Fa^2}{EI}\cdot\frac{a}{2}+\frac{Fa^3}{6EI}=2{,}667\frac{Fa^3}{EI}$$

Es decir,

$$F = 0{,}214\frac{\delta EI}{a^3}$$

En la figura 6 se representan las leyes de momentos flectores en función de *F*.

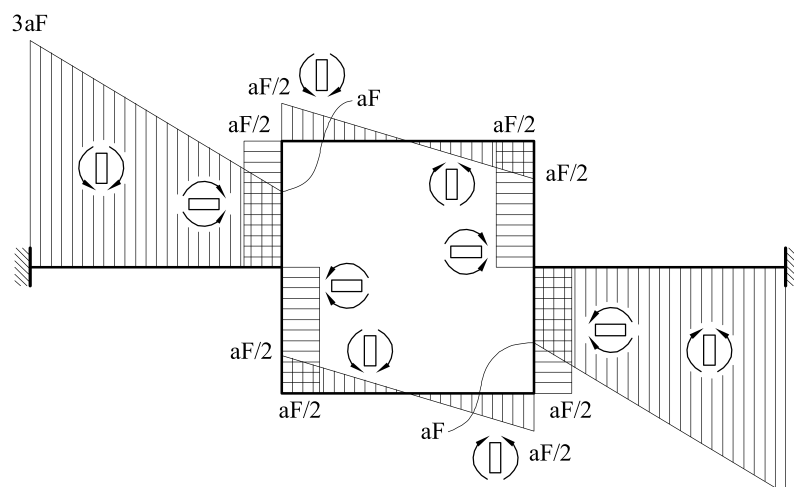


Fig.6 Leyes de momentos flectores

Problema 11.35 *En la estructura que se representa en la figura 1, hallar y dibujar las leyes de momentos flectores*

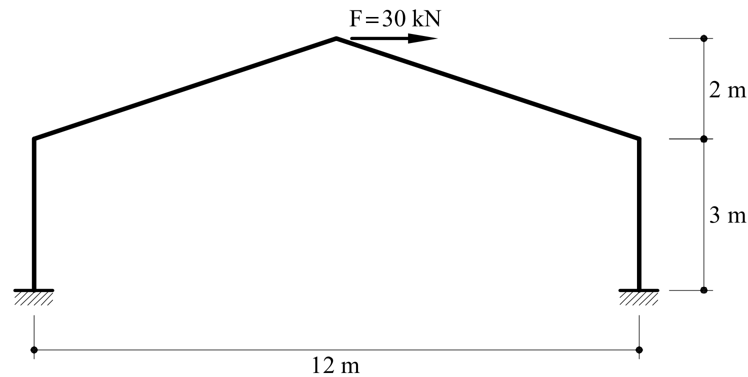


Fig.1 Pórtico correspondiente al problema 11.35

Solución

La estructura es antimétrica respecto a un eje vertical. Admite, por tanto, la descomposición que se indica en la figura 2

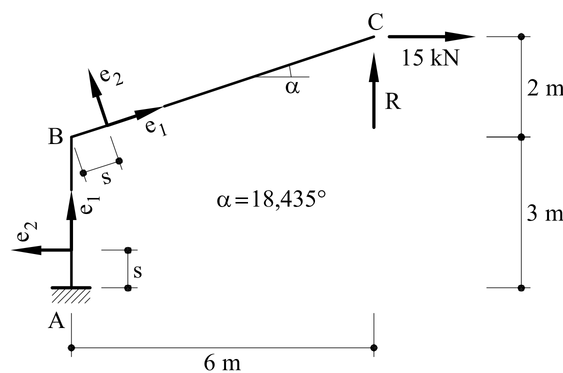


Fig.2 Estructura descompuesta

El valor de R se obtendrá imponiendo la condición que el desplazamiento vertical de C es nulo.

Las leyes de momentos flectores se escriben:

$$M_f\Big|_B^C = R(6 - s\cos\alpha) - 15(2 - s\sin\alpha)$$

$$M_f\Big|_A^B = 6R - 15(5 - s)$$

El movimiento vertical de C se escribe

$$\upsilon_C = \int_0^{6/\cos\alpha} M_f\Big|_B^C (6 - s\cos\alpha)\frac{ds}{EI} + \int_0^3 M_f\Big|_A^B \cdot 6\frac{ds}{EI} = 0$$

Es decir $R = 7{,}25\,kN$

En la figura 3 pueden verse representadas las leyes de momentos flectores

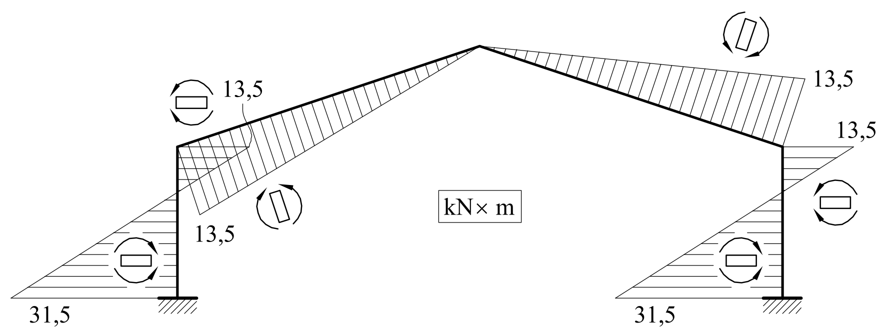


Fig.3 Leyes de momentos flectores

Problema 11.36 *En la estructura que se representa en la figura 1, la barra DC sufre un incremento térmico de valor t. Hallar las leyes de momentos flectores*

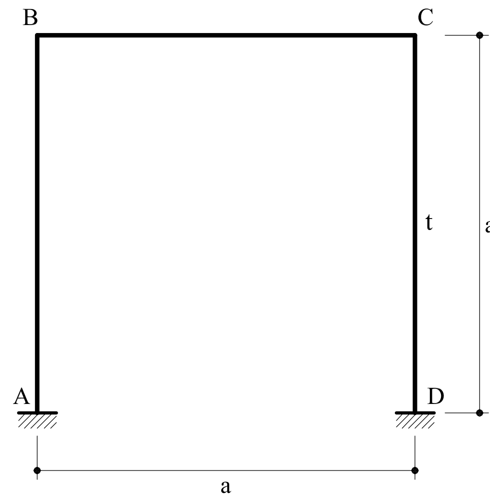


Fig.1 Pórtico correspondiente al problema 11.36

Solución

La estructura se descompone en su parte simétrica y en su parte antimétrica (figura 2)

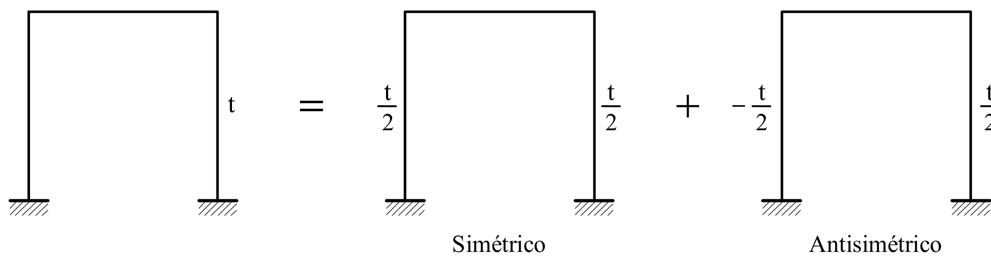


Fig.2 Descomposición en simétrico y antimétrico

La estructura simétrica no tiene esfuerzos. De la antimétrica se considera únicamente la mitad (figura 3)

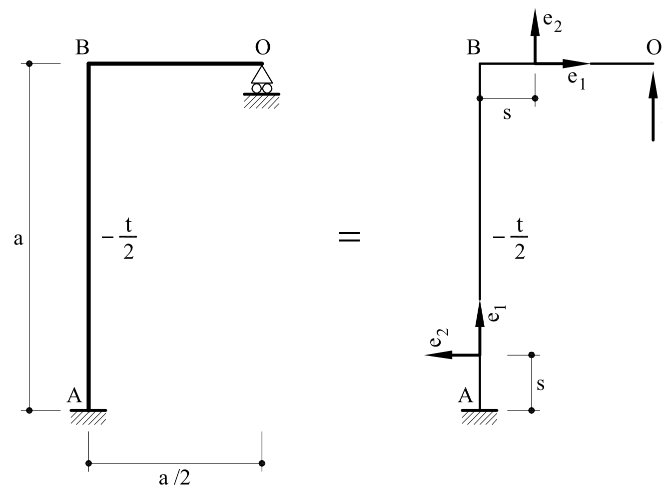


Fig.3 Estructura antimétrica

Las leyes de momentos flectores se escriben:

$$M_f\Big|_0^B = F\left(\frac{a}{2} - s\right)$$

$$M_f\Big|_A^B = \frac{a}{2}F$$

El movimiento total vertical del punto *O* debe ser nulo

$$\upsilon_0 = -a\,\alpha\,\frac{t}{2} + \int_0^{a/2} M_f\Big|_0^B \left(\frac{a}{2} - s\right)\frac{d\,s}{E\,I} + \int_0^{a} M_f\Big|_A^B \,\frac{a}{2}\,\frac{d\,s}{E\,I} = -\frac{a\,\alpha\,t}{2} + \frac{7}{24}\,\frac{F\,a^3}{E\,I} = 0$$

Es decir:

$$F = 1{,}7143\,\frac{\alpha\,t\,E\,I}{a^2}$$

En la figura 4 se representan las leyes de momentos flectores

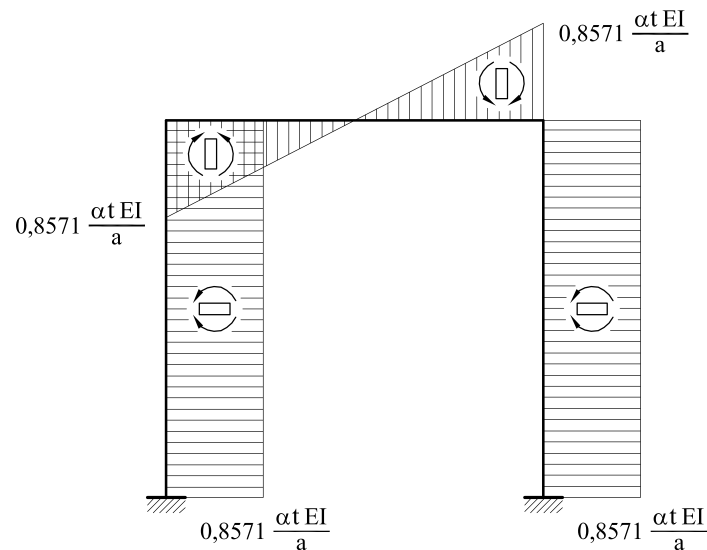


Fig.4 Leyes de momentos flectores

Problema 11.37 *Determinar las leyes de esfuerzos en el pórtico que se representa en la figura 1*

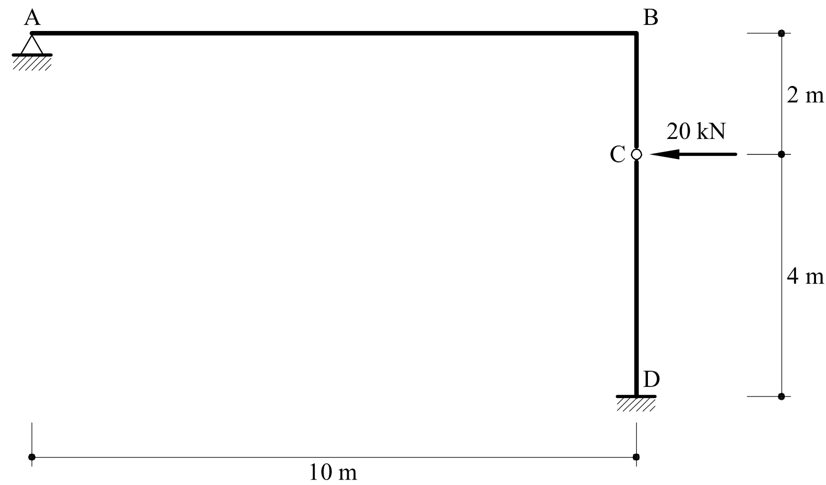


Fig.1 Pórtico correspondiente al problema 11.37

Solución

Se resolverá utilizando dos procedimientos:

- ***Primer procedimiento***

La estructura se corta por el punto *C* y se descomponen+ en dos, tal como indica la figura 2

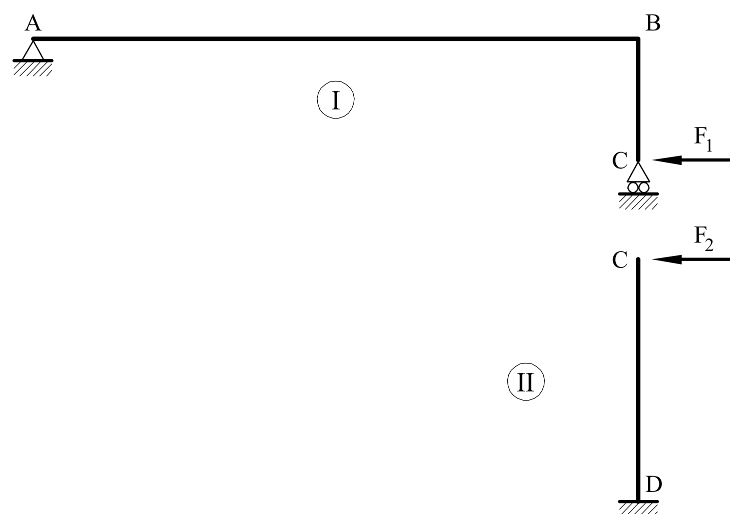


Fig.2 Descomposición en dos subestructuras

Obviamente, para determinar el valor de F_1 y F_2 hay que imponer la condición de igualdad de desplazamiento horizontal en *C*

Subestructura I (figura 3):

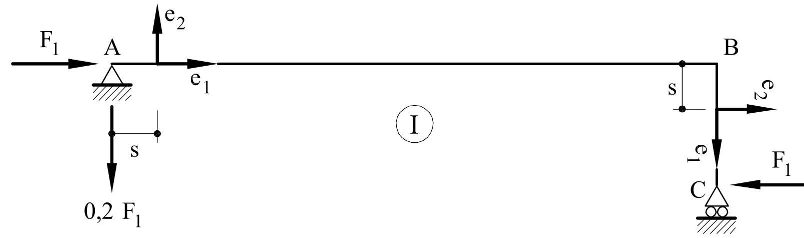


Fig.3 Subestructura I

Para hallar el movimiento horizontal en C se hallan los momentos flectores y sus derivadas:

$$M_f\Big|_A^B = -0,2\,F_1\,s$$

$$M_f\Big|_B^C = -(2-s)F_1$$

$$\frac{\partial M_f\Big|_A^B}{\partial F_1} = -0,2\,s$$

$$\frac{\partial M_f\Big|_B^C}{\partial F_1} = -(2-s)$$

El movimiento horizontal de *C* se escribe

$$u_C = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{10} M_f\Big|_A^B \frac{\partial M_f\Big|_A^B}{\partial F_1}ds + \int_0^2 M_f\Big|_B^C \frac{\partial M_f\Big|_B^C}{\partial F_1}ds\right] = 16\frac{F_1}{EI}$$

Subestructura II:

El movimiento horizontal de *C* vale

$$u_C = \frac{F_2 \times 4^3}{3EI} = 21,33\frac{F_2}{EI}$$

Igualando ambos movimientos:

$$16\,F_1 = 21,33\,F_2$$

y teniendo además en cuenta que

$$F_1 + F_2 = 20$$

se obtiene

$$F_1 = 11,43\,kN \qquad\qquad F_2 = 8,57\,kN$$

- ***Segundo procedimiento***

Se corta la estructura original por el punto *B*, quedando las vigas *AB* y *BCD* (fig.4).

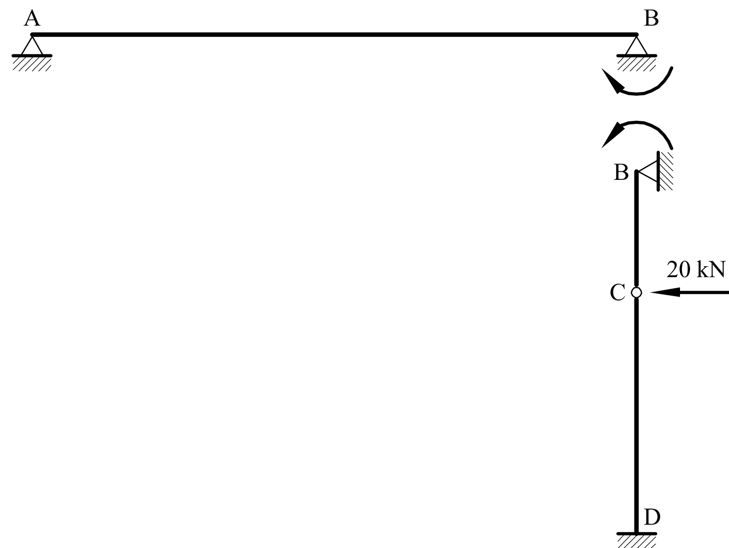


Fig.4 Descomposición en vigas simples

La incógnita hiperestática *M* se obtendrá de igualar el giro en *B*

$$\varphi_B^{AB} = -\frac{10M}{3EI}$$

$$\varphi_B^{BD} = \frac{6M}{EI} - \frac{213{,}33}{EI}$$

Es decir: $M = 22{,}86\, kN\, m$

En la figura 5 pueden verse representadas las leyes de momentos flectores

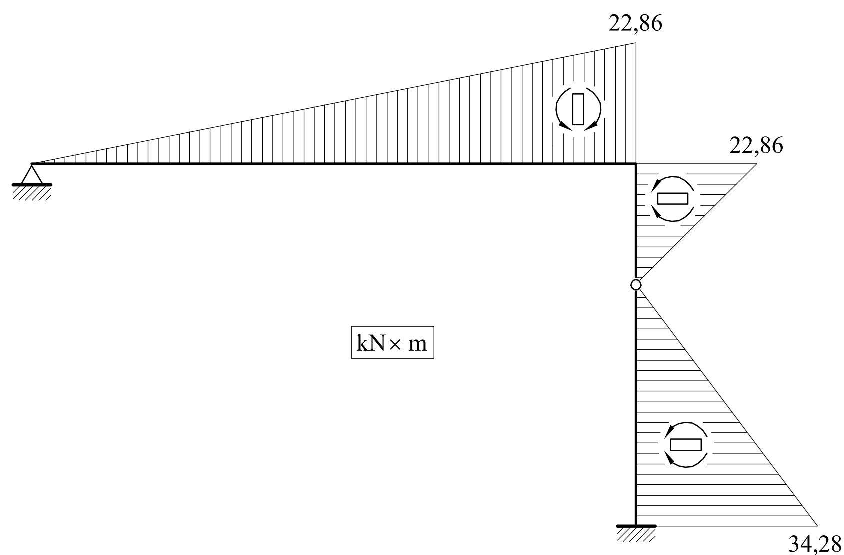


Fig.5 Ley de momentos flectores

Problema 11.38 *El marco de la figura 1 es un cuadrado de lado L y en el que se coloca un tirante en la diagonal AB. El módulo de elasticidad es el mismo para toda la estructura, mientras que la inercia vale I para las piezas rígidas, y la sección del tirante vale ω. Hallar el esfuerzo axil T que soporta el tirante*

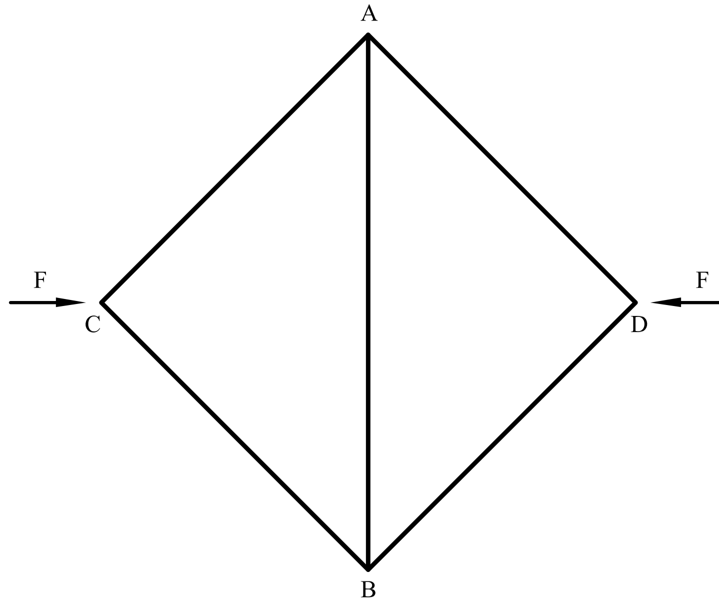


Fig.1 Estructura correspondiente al problema 11.38

Solución

Si debido a la doble simetría, horizontal y vertical, se aísla la barra *AC* se obtiene el esquema estático representado en la figura 2

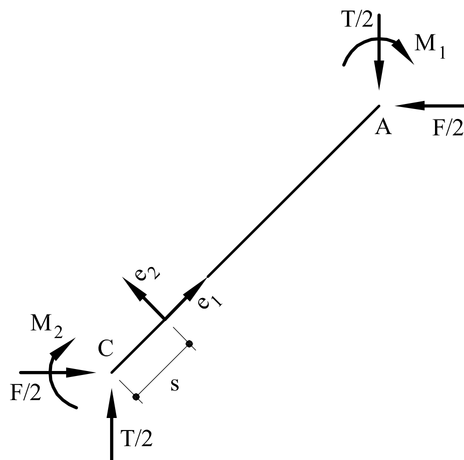


Fig.2 Barra AC

Por simetría, $M_1 = M_2 = M$

Por equilibrio:

$$\frac{F}{2}\,\frac{L\sqrt{2}}{2}-\frac{T}{2}\,\frac{L\sqrt{2}}{2}-2M=0$$

Es decir:

$$M=\left(F-T\right)\frac{L\sqrt{2}}{8}$$

La ley de momentos flectores en la barra *AC* se escribe

$$M_f=-M-\frac{T}{2}\left(L-s\right)\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{F}{2}\left(L-s\right)\frac{\sqrt{2}}{2}=M\left(1-\frac{2s}{L}\right)$$

El alejamiento, en dirección vertical, de los puntos *A* y *C* vale:

$$\upsilon_{AC}=\int_0^L M_f\left(L-s\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{ds}{EI}=M\frac{\sqrt{2}}{12}\frac{L^2}{EI}=\left(F-T\right)\frac{L^3}{48EI}$$

Por lo tanto, el alejamiento entre los puntos A y B de la estructura original vale:

$$\Delta_{AB}=2\upsilon_{AC}=\left(F-T\right)\frac{L^3}{24EI}$$

Este alejamiento debe igualarse al alargamiento del tirante, es decir

$$\left(F-T\right)\frac{L^3}{24EI}=\frac{TL\sqrt{2}}{E\omega}$$

De donde se obtiene el valor de T

$$T=\frac{F}{1+24\sqrt{2}\,\dfrac{I}{\omega L^2}}$$

Problema 11.39 *En el pórtico que se representa en la figura 1, se desea saber el valor de las leyes de esfuerzos.*

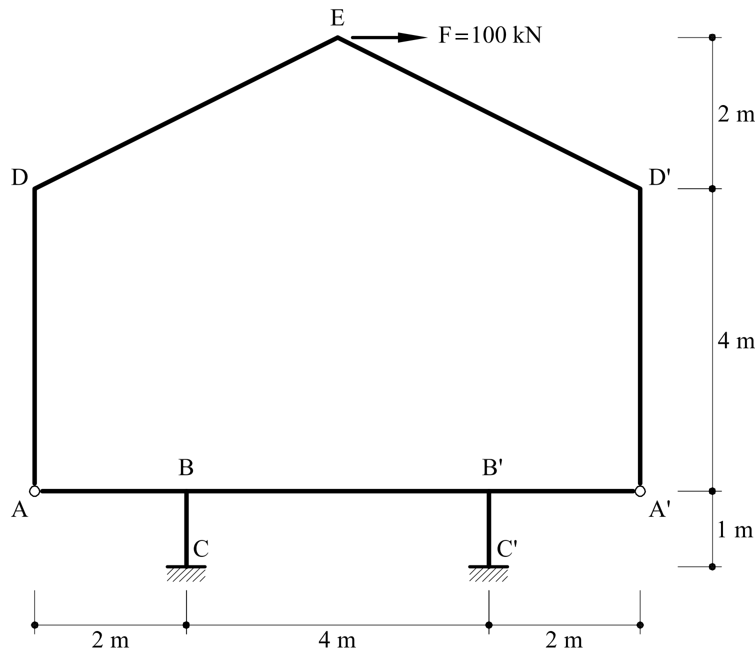


Fig.1 Pórtico correspondiente al problema 11.39

Solución

El pórtico se descompone tal como se indica en la figura 2

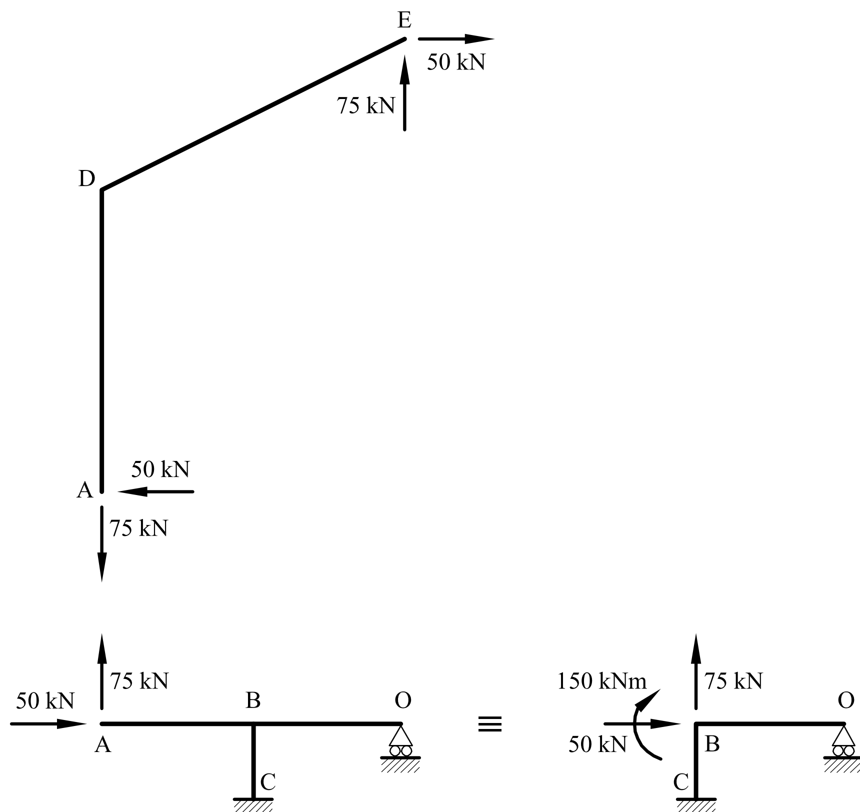


Fig.2 Descomposición del pórtico original

La única incógnita hiperestática es la reacción vertical en el punto O (figura 3)

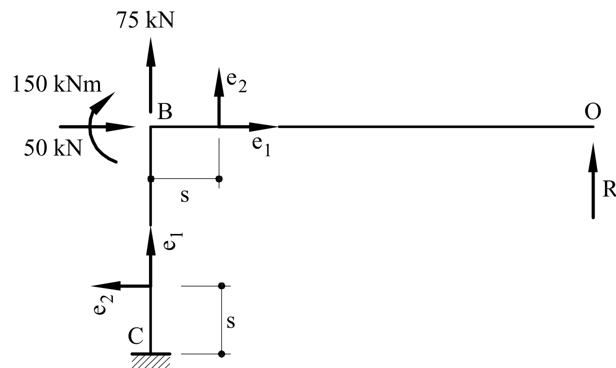


Fig.3 Sistema de ejes e incógnita hiperestática.

Las leyes de momentos flectores se escriben

$$M_f\Big|_0^B = R(2-s)$$
$$M_f\Big|_B^C = 2R - 50\,(1-s) - 150$$

El movimiento vertical de O debe ser nulo:

$$E\,I\,\upsilon_0 = \int_0^2 M_f\Big|_0^B (2-s)\,ds + \int_0^1 M_f\Big|_B^C \cdot 2\,d\,s = \frac{8}{3}R + 4R - 350 = 0$$

$$R = 52{,}5\,kN$$

Conocido este valor pueden obtenerse las leyes de esfuerzos.

Problema 11.40 *El pórtico de la figura 1 es de sección rectangular de 30 cm de ancho y 60 cm de canto. Su módulo de elasticidad vale* $E = 2 \times 10^4\ MPa$. *Entre A y D hay un tirante de acero de 2 cm*^{2} *de sección y* $2{,}1 \times 10^5\ MPa$ *de módulo de elasticidad cuya longitud se puede variar dando una tensión previa al tirante.*

Entre B y C actúa una sobrecarga uniforme de valor $15\, kN/m$. *Antes de aplicar la carga se da una tensión previa al tirante, de un valor tal que al actuar la sobrecarga, la distancia AD vuelva a ser 16 metros.*

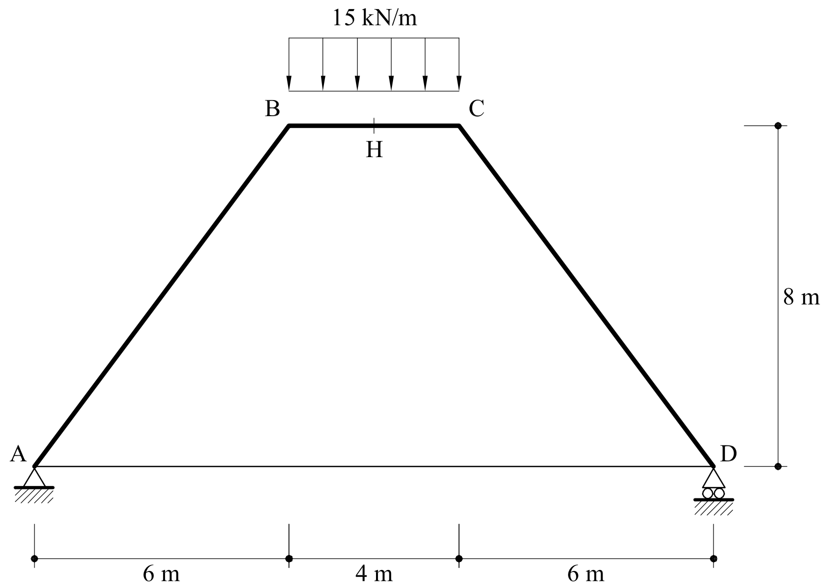


Fig.1 Pórtico correspondiente al problema 11.40

SE PIDE:

1. *Valor del esfuerzo en el tirante, después de aplicar la sobrecarga.*
2. *Valor del esfuerzo en el tirante antes de aplicar la sobrecarga.*

Solución

El valor del esfuerzo final T_f que tendrá el tirante *AD* será el mismo que el de la reacción horizontal en *A* y en *D* del pórtico *ABCD* supuesto articulado y con apoyos fijos en *A* y *D*. El incremento de esfuerzo en el tirante ΔT que se produce al colocar la sobrecarga de $15\, kN/m$ puede obtenerse compatibilizando el alargamiento del tirante *AD* con el movimiento del punto *D* en la estructura con los apoyos indicados en la figura 1. El esfuerzo inicial T_i a aplicar al tirante valdrá

$$T_i = T_f - \Delta T$$

Para obtener los valores anteriores, se calculará en primer lugar el movimiento del punto *D* en la estructura representada en la figura 2. Para ello, puede trabajarse únicamente con la mitad de la estructura al tener en cuenta que el punto medio de *BC* no gira (figura 3).

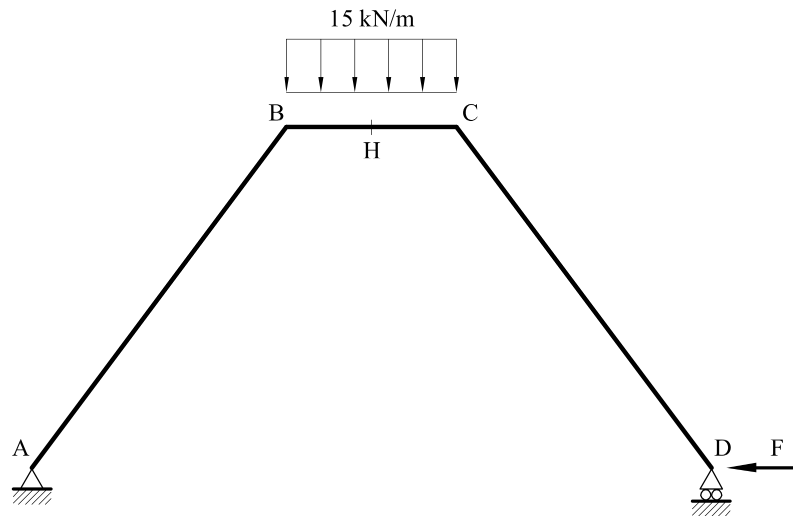


Fig.2 Estructura sin tirante

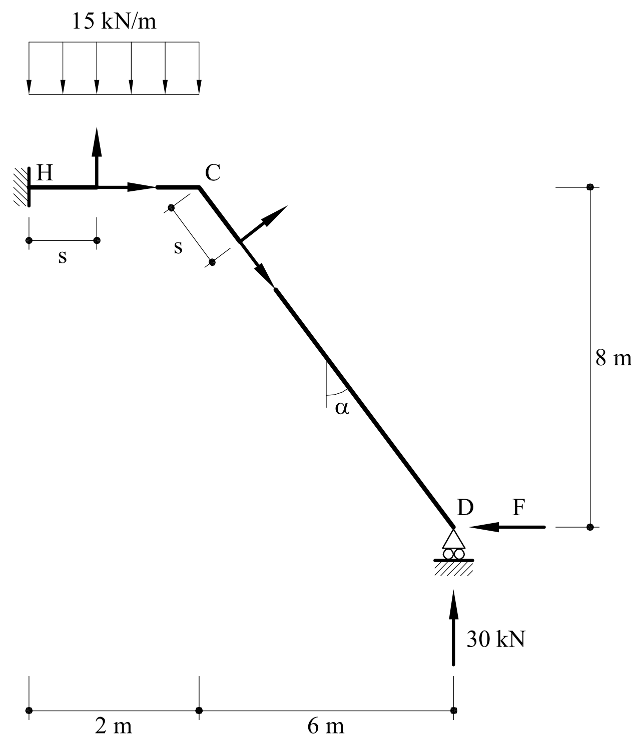


Fig. 3 Estructura a considerar para hallar el movimiento del punto D

Las leyes de momentos se escriben:

$$M_f\Big|_D^C = 30\left(6 - s\sin\alpha\right) - F\left(6 - s\cos\alpha\right)$$

$$M_f\Big|_H^C = 30\left(8 - s\right) - 8F - \frac{15\left(2 - s\right)^2}{2}$$

$$\frac{\partial M_f\big|_C^D}{\partial F} = -8 + s\cos\alpha$$

$$\frac{\partial M_f\big|_H^C}{\partial F} = -8$$

$$\overrightarrow{u_D} = -2\left[\int_0^{8/\cos\alpha} M_f\Big|_C^D \frac{\partial M_f\big|_C^D}{\partial F}\frac{ds}{EI} + \int_0^2 M_f\Big|_H^C \frac{\partial M_f\big|_H^C}{\partial F}\frac{ds}{EI}\right] = \frac{16\,000 - 682{,}67\,F}{EI} \qquad (1)$$

Para obtener el valor de T_f basta con igualar a cero la expresión (1). En este caso se sustituye F por T_f:

$$16\,000 - 682{,}67\,T_f = 0$$

Es decir:

$$T_f = 23{,}44\,kN$$

Para hallar el valor ΔT, se iguala la expresión (1) al alargamiento del tirante (y se sustituye F por ΔT):

$$\frac{16\,000 - 682{,}67\,\Delta T}{EI} = \frac{16\,\Delta T}{E_t\omega}$$

Sustituyendo valores y despejando ΔT

$$\Delta T = 22{,}10\,kN$$

Por tanto:

$$T_i = T_f - \Delta T = 1{,}34\,kN$$

Problema 11.41 *La estructura que se representa en la figura 1 tiene el mismo momento de inercia I en todas las barras, así como el mismo módulo de elasticidad E. Entre los puntos A y B existe un tirante de módulo de elasticidad E y sección ω.*

Determinar las leyes de momentos flectores comparándolas con las que tendría el pórtico si no existiera tirante.

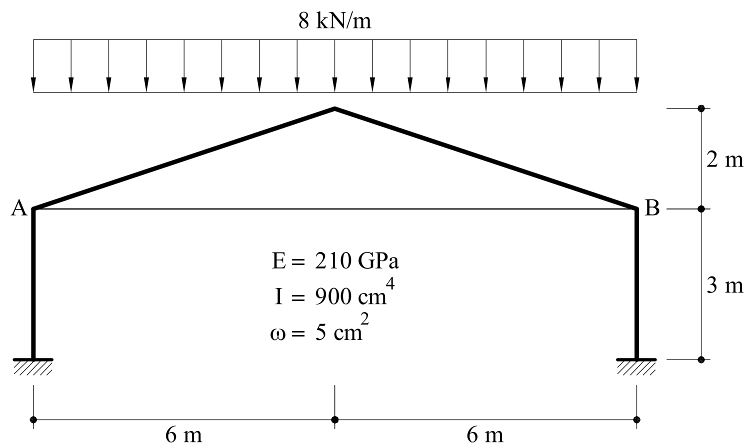


Fig. 1 Pórtico correspondiente al problema 11.41

Solución

Si F es el esfuerzo en el tirante el movimiento horizontal del punto *A* valdrá

$$u_A = 0{,}00409 - 5{,}88 \times 10^{-5}\, F$$

estando *F* expresado en *kiloNewton* y u_A en metros.

Por otro lado, la mitad del alargamiento del tirante *AB* vale

$$u_A = \frac{F \times 6}{2{,}1 \times 10^8 \times 5 \times 10^{-4}}$$

Igualando los valores de u_A se obtiene

$$F = 35{,}276\, kN$$

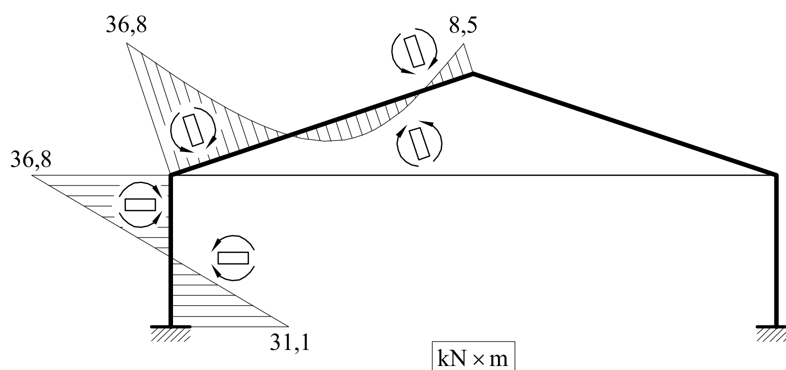


Fig. 2 Ley de momentos flectores en la estructura con tirante

En las figuras 2 y 3 pueden verse las leyes de momentos flectores con y sin tirante

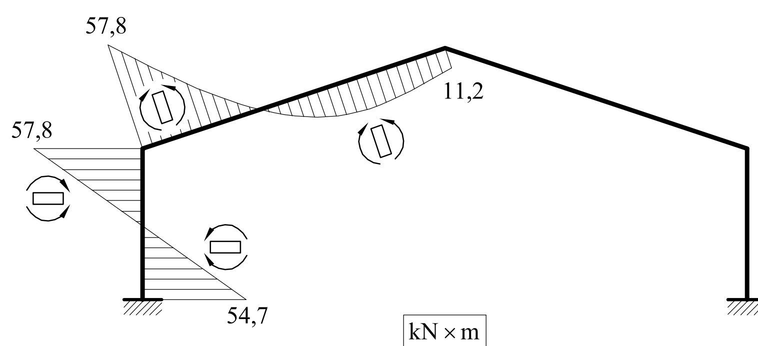


Fig. 3 Ley de momentos flectores en la estructura sin tirante

Problema 11.42 *La estructura que se representa en la figura 1 tiene todas las barras con el mismo módulo de Elasticidad I. A efectos prácticos, puede suponerse que sigue indefinidamente por la izquierda y por la derecha. El dintel superior sufre un desplazamiento δ hacia la derecha.*

Hallar:

- *Ley de momentos flectores.*
- *Giro del punto B.*

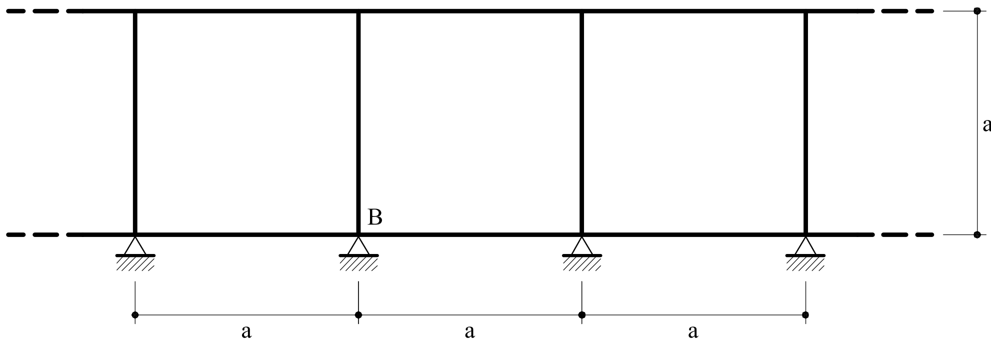


Fig.1 Estructura correspondiente al problema 11.42

Solución

En la figura 2 puede verse la deformada de la estructura.

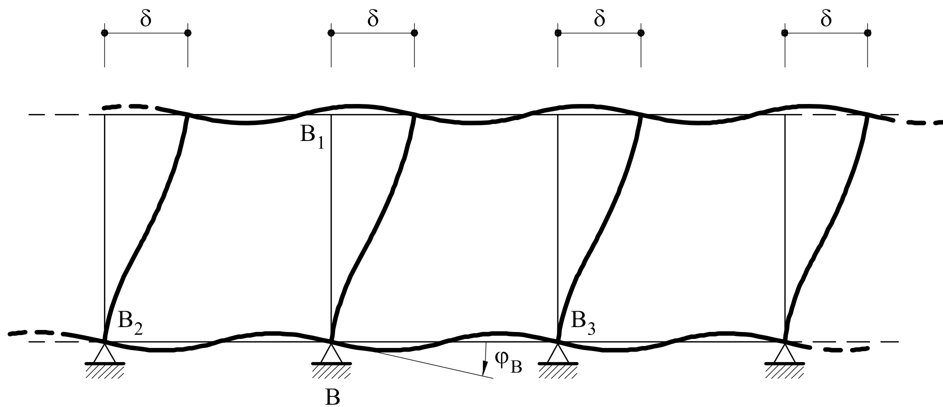


Fig. 2 Deformada

Como puede observarse en la figura 2, y todo ello por razón de antimetría, los puntos medios de BB_1, BB_2 y BB_3 no tienen momento flector. Además, los puntos medios de BB_2 y BB_3 no tienen movimiento vertical y el movimiento horizontal del punto medio de BB_1 vale $\delta/2$. Realizando los oportunos cortes queda el esquema de cálculo de la figura 3 en donde el punto A es el punto medio de BB_1, el punto *C* el punto medio de BB_2 y el punto *D* el punto medio de BB_3.

Con lo cual, y dado que la pieza *CBD* es antimétrica respecto al eje *AB*, el giro de *B* se escribe:

$$\varphi_B = \frac{\frac{1}{2} F \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{3EI} = \frac{F a^2}{24EI}$$

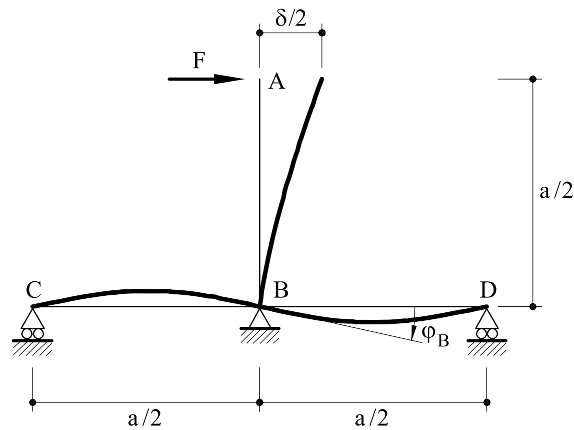


Fig. 3 Esquema de cálculo

Con lo que:

$$\frac{\delta}{2} = \frac{F\left(\frac{a}{2}\right)^3}{3EI} + \varphi_B \frac{a}{2} = \frac{F a^3}{16EI}$$

Es decir:

$$F = \frac{8EI}{a^3}\delta$$

y también, sustituyendo

$$\varphi_B = \frac{\delta}{3a}$$

En la figura 4 pueden verse dibujadas las leyes de esfuerzos.

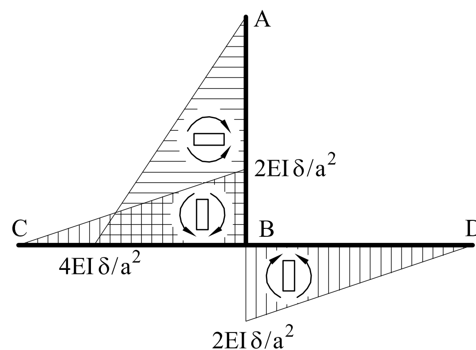


Fig. 4 Ley de momentos flectores

Problema 11.43 *Determinar las leyes de momentos flectores y deformada del pórtico de la figura 1.*

En el tirante se considerará sólo deformación por axil y en las barras no se tendrá en cuenta la deformación por axil.

La rigidez de las barras es EI *y la sección del tirante* Ω*.La relación entre ellas es* $25\,EI = L^2 E\Omega$.

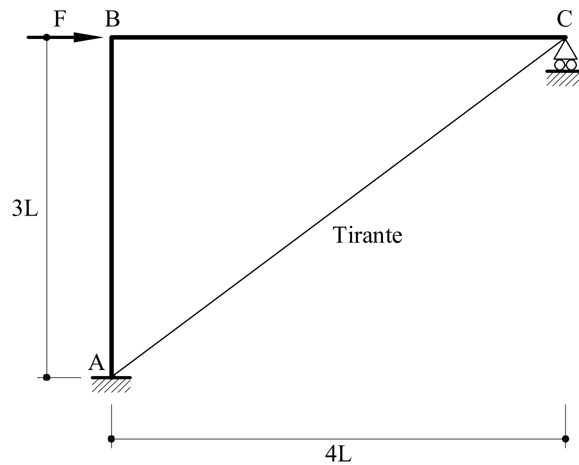


Fig. 1 Pórtico correspondiente al problema 11.43

Solución

Se tomarán como incógnitas hiperestáticas la tensión *T* en el tirante y la reacción vertical en *C*. Las leyes de momentos flectores se escriben (figura 2).

$$M_f\Big|_B^C = V_C\,(4L-s) - T\,(4L-s)\cos\alpha$$

$$M_f\Big|_A^B = V_C\,4L - T\,s\sin\alpha - F\,(3L-s)$$

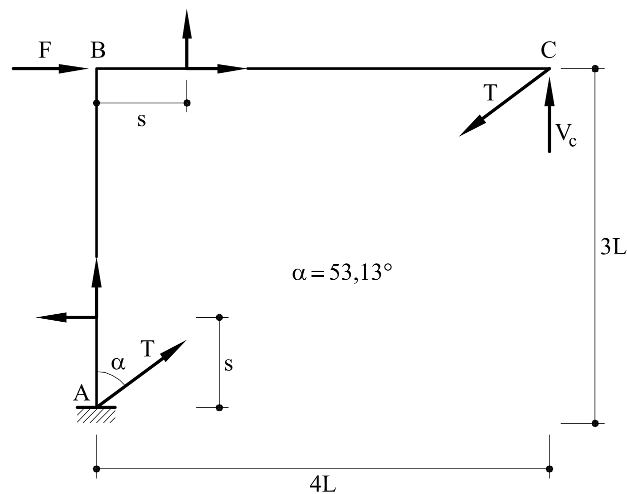


Fig. 2 Ejes locales e incógnitas hiperestáticas

Y las derivadas se escriben:

$$\frac{\partial M_f\big|_B^C}{\partial V_C} = 4L - s \qquad \frac{\partial M_f\big|_A^B}{\partial V_C} = 4L$$

$$\frac{\partial M_f\big|_B^C}{\partial T} = -(4L - s)\cos\alpha \qquad \frac{\partial M_f\big|_A^B}{\partial T} = -s\sin\alpha$$

El movimiento vertical de C debe ser nulo:

$$u_{2C} = 0 = \int_A^B M_f\big|_A^B \frac{\partial M_f\big|_A^B}{\partial V_C}\frac{ds}{EI} + \int_B^C M_f\big|_B^C \frac{\partial M_f\big|_B^C}{\partial V_C}\frac{ds}{EI} =$$

$$= \frac{-18FL^3 + V_C\left(48L^3 + \frac{64}{3}L^3\right) - TL^3\left(\frac{72}{5} + \frac{64}{5}\right)}{EI} = \frac{-18F + \frac{208}{3}V_C - \frac{136}{5}T}{EI}L^3$$

Lo cual constituye la primera ecuación.

La segunda se obtendrá a partir del movimiento relativo de A respecto a C en la dirección AC.

$$\Delta_{AC} = \int_A^B M_f\big|_A^B \frac{\partial M_f\big|_A^B}{\partial T}\frac{ds}{EI} + \int_B^C M_f\big|_B^C \frac{\partial M_f\big|_B^C}{\partial T}\frac{ds}{EI} = \frac{18F + \frac{336}{5}T - 136V_C}{5EI}L^3 \qquad (1)$$

Por otra parte, Δ_{AC} debe ser igual al "acortamiento" del tirante, es decir

$$\frac{18F + \frac{336}{5}T - 136V_C}{5EI}L^3 = -\frac{T\times 5L}{E\Omega} \qquad (2)$$

Lo cual constituye la segunda ecuación.
Resolviendo el sistema:

$$V_C = 0{,}717F \qquad T = 1{,}166F$$

A la misma conclusión puede llegarse mediante el estudio de vigas simples:

$$u_{2C} = \varphi_B \times 4L + \frac{(V_C - T\cos\alpha)(4L)^3}{3EI}$$

$$\varphi_B = \frac{(V_C - T\cos\alpha)4L\times 3L}{EI} - \frac{(F - T\sin\alpha)(3L)^2}{2EI}$$

Sustituyendo:

$$u_{2C}=0=\frac{-18F+\frac{208}{3}V_C-\frac{136}{5}T}{EI}L^3$$

El movimiento del punto C en la dirección CA vale:

$$\Delta_{AC}=u_{1C}\sin\alpha=\left[\frac{(F-T\sin\alpha)(3L)^3}{3EI}-\frac{(V_C-T\cos\alpha)\times 4L\times(3L)^2}{2EI}\right]\sin\alpha=$$

$$=\frac{\frac{36}{5}F+\frac{72}{25}T-\frac{72}{5}V_C}{EI}L^3 \qquad (3)$$

Puede parecer, a primera vista, que las dos expresiones (1) y (3) halladas para Δ_{AC} son diferentes. Téngase presente sin embargo que

$$\Delta_{AC}=u_{1C}\sin\alpha+u_{2C}\cos\alpha$$

En la expresión (3) ya se ha tenido en cuenta que $u_{2C}=0$ mientras que la expresión (1) es válida para cualquier movimiento vertical que tenga el punto C. Puede comprobarse que si a la expresión de Δ_{AC} dada por (3) se le suma el valor u_{2C} multiplicado por $\cos\alpha$ se obtiene el valor de Δ_{AC} dado por (1) pero cambiado de signo. Dicho cambio de signo es debido a que en la expresión (1) se da un "acortamiento" mientras que en (3) se da un alargamiento.

La ecuación de compatibilidad con el tirante se escribe

$$\frac{\frac{36}{5}F+\frac{72}{25}T-\frac{72}{5}V_C}{EI}L^3=\frac{T\times 5L}{E\Omega} \qquad (4)$$

Fácilmente se comprueba que las expresiones (2) y (4) coinciden.
Finalmente, en la figura 3 puede verse representada la ley de momentos flectores

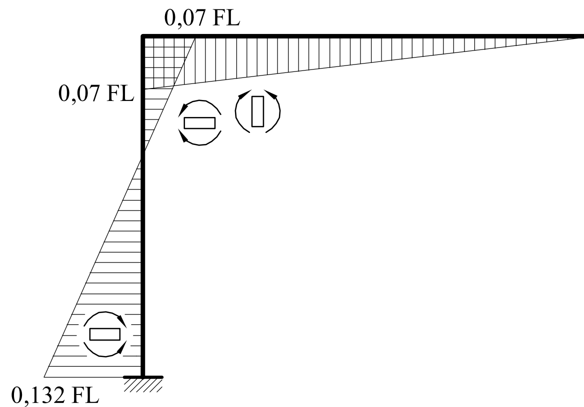


Fig. 3 Ley de momentos flectores

Problema 11.44 *La estructura que se representa en la figura 1 sufre un descenso de apoyo de valor δ en el punto A. Determinar la ley de momentos flectores.*

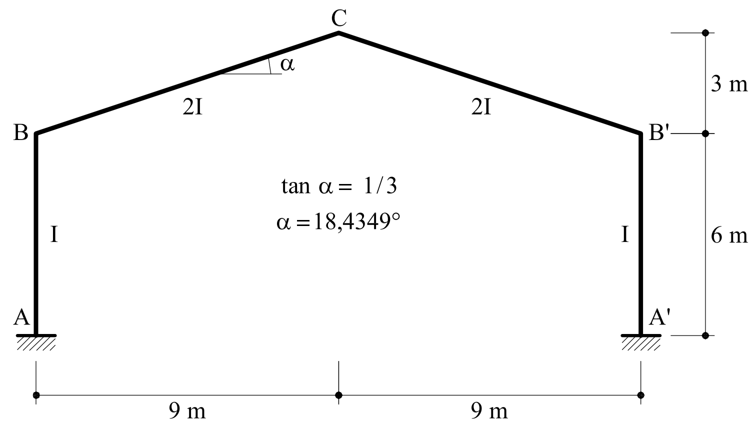


Fig. 1 Pórtico correspondiente al problema 11.44

Solución

Se descompone el pórtico en simétrico y antimétrico. El primero no produce esfuerzos mientras que el segundo puede descomponerse tal como se indica en la figura 2.

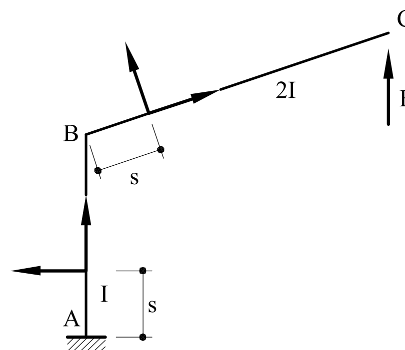


Fig. 2 Pórtico antimétrico

Las leyes de momentos flectores se escriben:

$$M_f\Big|_C^B = F(9 - s\cos\alpha)$$

$$M_f\Big|_A^B = 9F$$

$$v_C = \frac{\delta}{2} = \int_0^{9/\cos\alpha} \frac{F\,(9 - s\,\cos\alpha)^2}{2\,EI}\,ds + \int_0^6 \frac{81F}{EI}\,ds = 614{,}07\,\frac{F}{EI}$$

$$F = 8{,}1424 \times 10^{-4}\,EI\,\delta$$

En la figura 3 pueden verse representadas las leyes de momentos flectores.

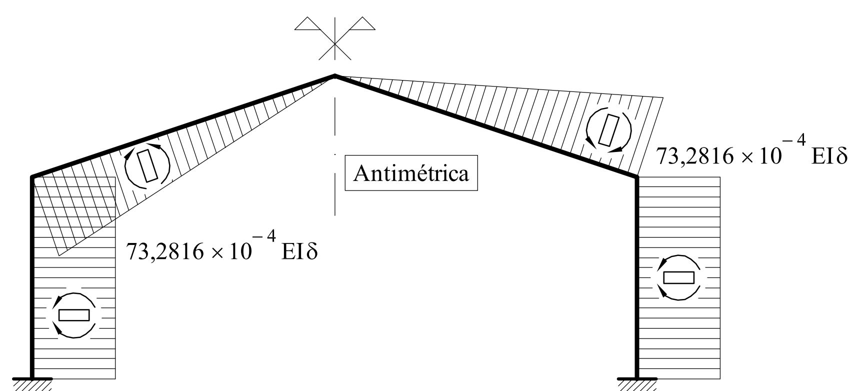


Fig. 3 Ley de momentos flectores

Problema 11.45 *La estructura que se representa en la figura 1 sufre un incremento térmico de valor t. Hallar la ley de momentos flectores.*

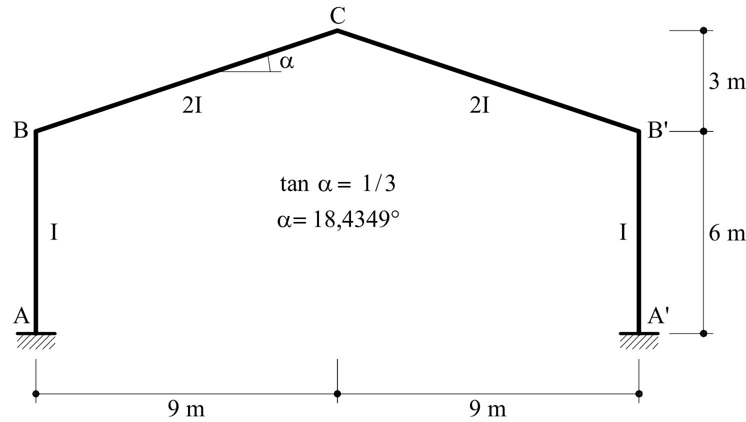


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 11.45

Solución

El pórtico es simétrico y se corta en *C* (figura 2)

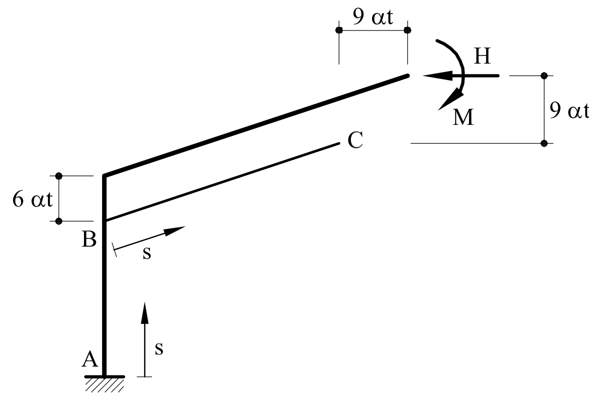


Fig. 2 Descomposición simétrica del pórtico propuesto

Las condiciones cinemáticas a imponer son:

$$\varphi_C = 0$$

$$u_C^t = 9\alpha t + u_C = 0 \quad \Rightarrow \quad u_C = -9\alpha t$$

con los movimientos considerados positivos hacia la derecha.
Las leyes de momentos flectores y sus derivadas se escriben

$$M_f\Big|_B^C = H(3 - s\sin\alpha) - M$$

$$M_f\Big|_A^B = H(9 - s) - M$$

$$\frac{\partial M_f\big|_B^C}{\partial H} = 3 - s\sin\alpha \qquad \frac{\partial M_f\big|_A^B}{\partial H} = 9 - s$$

$$\frac{\partial M_f\big|_B^C}{\partial M} = -1 \qquad \frac{\partial M_f\big|_A^B}{\partial M} = -1$$

El movimiento horizontal de C vale:

$$-u_C = \frac{1}{2EI}\int_0^{3/\sin\alpha}\left[H(3 - s\sin\alpha) - M\right](3 - s\sin\alpha)ds + \frac{1}{EI}\int_0^6\left[H(9-s) - M\right](9-s)ds =$$

$$= \frac{1}{EI}\left(248{,}23\,H - 43{,}12\,M\right) = 9\,\alpha\,t$$

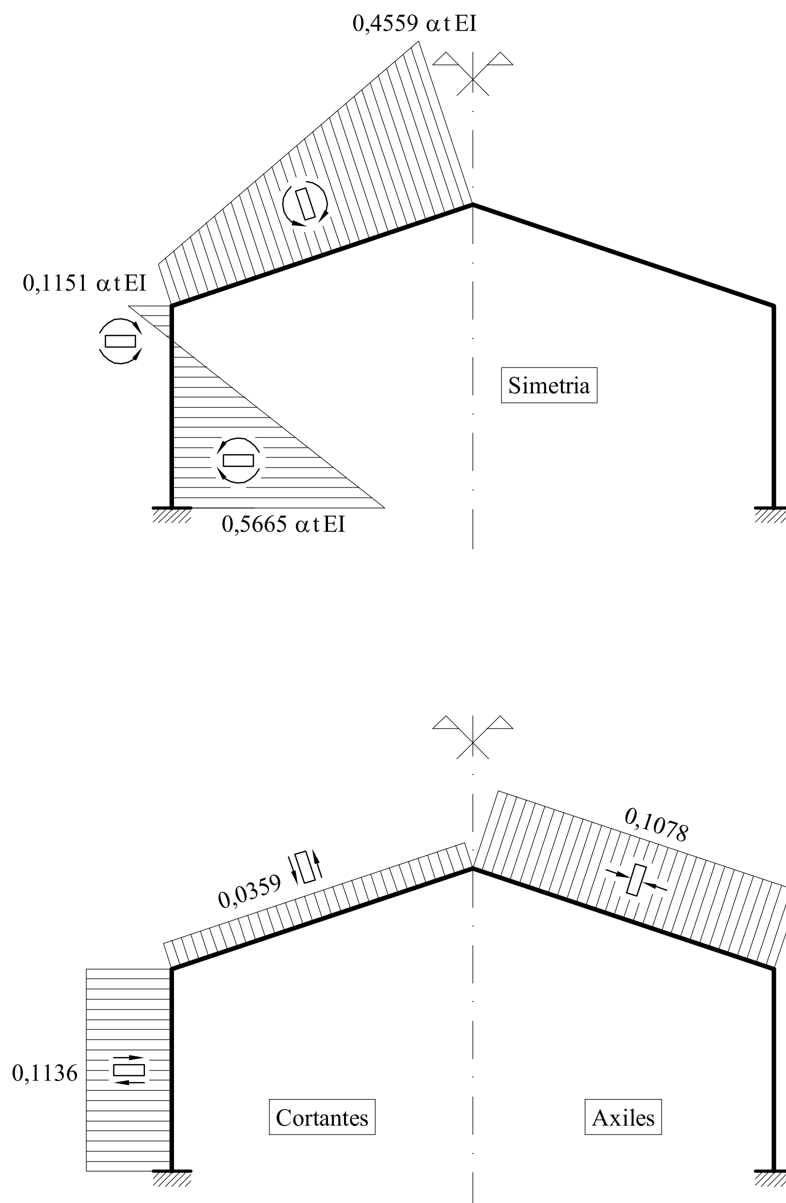


Fig. 3 Leyes de esfuerzos

El giro de *C* vale

$$\varphi_C = 0 = \frac{1}{2EI}\int_0^{3/\sin\alpha}\left[H(9-s)-M\right](-1)ds + \frac{1}{EI}\int_0^6\left[H(9-s)-M\right](-1)ds =$$

$$= \frac{1}{EI}\left(-43{,}111H + 10{,}7433M\right)$$

Es decir:

$$H = 0{,}1136\,\alpha\,t\,EI$$

$$M = 0{,}4559\,\alpha\,t\,EI$$

En la figura 3 pueden verse representadas las leyes de momentos, cortantes y axiles.

Problema 11.46 *En la estructura que se representa en la figura 1, la recta AB representa un cable de acero de 10 cm² de sección. El resto de las piezas son de hormigón con un canto de 1 metro y una anchura de 0,5 metros. Previamente a la introducción de las cargas se da una tensión previa al cable AB de tal forma que una vez cargada la estructura el momento flector en la barra CD sea nulo en todos los puntos. Sabiendo que la relación entre los módulos de elasticidad del acero y del hormigón vale 6.*

HALLAR:

- *Tensión previa que hay que dar al tirante.*
- *Esfuerzo final en el tirante.*
- *Ley de momentos flectores finales en la estructura.*

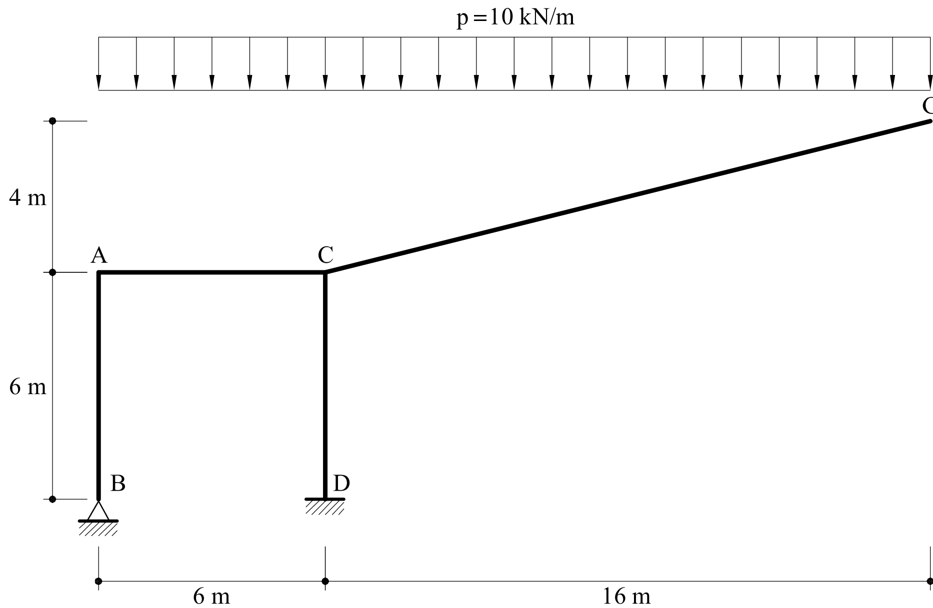


Fig. 1 Pórtico correspondiente al problema 11.46

Solución

Se calculará en primer lugar el incremento de tensión T_i que se produce en el tirante cuando se carga la estructura. Para ello, se igualará el alargamiento del tirante *AB* al movimiento del punto *A* de la estructura (figura 2).

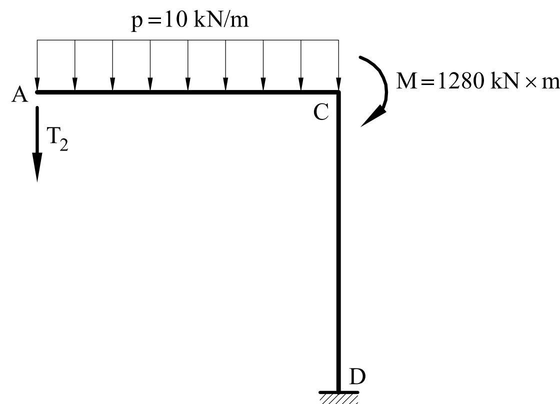


Fig. 2 Esquema de cálculo

El movimiento vertical de *A* en el pórtico valdrá

$$v_A = -\frac{10 \times 6^4}{8 E_h I} - \frac{T_i \times 6^3}{3 E_h I} + \frac{(-6T_i + 1100) \times 6^2}{E_h I} = \frac{37\,980}{E_h I} - \frac{288 T_i}{E_h I}$$

El alargamiento del tirante vale

$$\Delta = \frac{T_i\, 6}{E_a\, \Omega_a}$$

Igualando,

$$37\,980 - 288 T_i = \frac{E_h\, I}{E_a\, \Omega_a} 6 T_i$$

y dado que

$$E_h\, I / E_a\, \Omega_a = 6{,}94$$

$$T_i = 115{,}2\, kN$$

La tensión final que debe tener el tirante para que *CD* no tenga momentos vale:

$$T_f = \frac{1100}{6} = 183{,}3\, kN$$

Por lo tanto, la tensión previa T_p que hay que darle al tirante vale

$$T_p = T_f - T_i = 183{,}3 - 115{,}2 = 68{,}13\, kN$$

En la figura 3 pueden verse dibujadas las leyes de momentos flectores

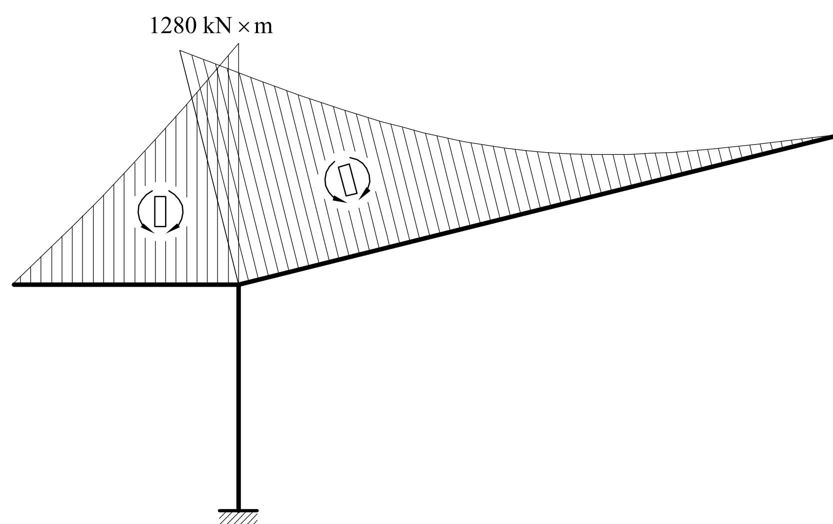


Fig. 3 Ley de momentos flectores

Problema 11.47 *En la estructura de la figura 1 todas las barras tienen sección rectangular de canto h y anchura b. Dicha estructura está sometida a la variación térmica que se indica en la misma figura. Supuesto conocido el coeficiente de dilatación lineal* α *, determinar las reacciones y las leyes de momentos flectores.*

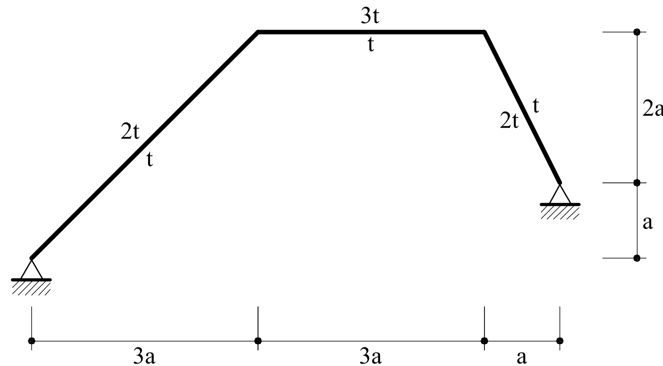


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema resuelto 11.47

Solución

La estructura es una vez hiperestática, pudiéndose tomar como incógnita hiperestática la reacción horizontal en el apoyo derecho. Utilizando las ecuaciones de Navier-Bresse, se determinará el valor del movimiento horizontal total en el apoyo derecho y se igualará a cero.

En la figura 2 puede verse la incógnita hiperestática adoptada así como los ejes locales. Como parámetro de definición de cada barra se tomará la coordenada global z_1

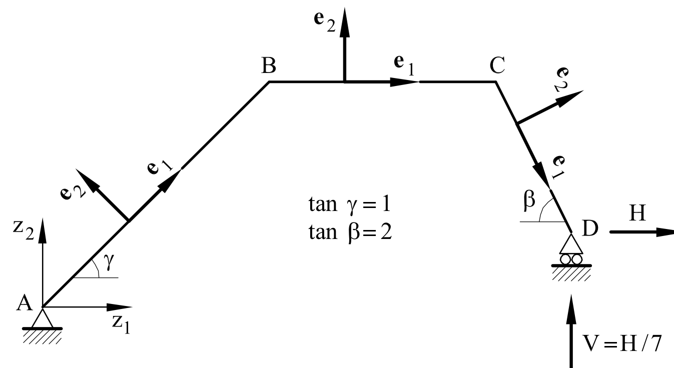


Fig. 2 Incógnita hiperestática, sistemas de ejes y reacciones

Las leyes de momentos flectores se escriben:

$$M_f\Big|_D^C = V\left(7a - z_1\right) + 2H\left(7a - z_1\right) = \frac{15}{7}H\left(7a - z_1\right)$$

$$M_f\Big|_C^B = V\left(7a - z_1\right) + 2aH = H\left(3a - \frac{z_1}{7}\right)$$

$$M_f\Big|_A^B = V\left(7a - z_1\right) - H\left(a - z_1\right) = \frac{6}{7}H z_1$$

Las deformaciones longitudinales de origen térmico valdrán:

$$\in_1^{nt}\Big|_A^B = \frac{3}{2}\alpha t \qquad \in_1^{nt}\Big|_B^C = 2\alpha t \qquad \in_1^{nt}\Big|_C^D = \frac{3}{2}\alpha t$$

y las curvaturas de origen térmico

$$\chi^{nt}\Big|_A^B = -\frac{\alpha t}{h} \qquad \chi^{nt}\Big|_B^C = -\frac{2\alpha t}{h} \qquad \chi^{nt}\Big|_C^D = \frac{\alpha t}{h}$$

A partir de las expresiones anteriores, se puede ir a las fórmulas de Navier-Bresse, dadas por (11.7).

$$u_{1D} = -\varphi_A\, a + \int_0^{3a} \frac{3}{2}\alpha\, t\cos\gamma \frac{dz_1}{\cos\gamma} + \int_{3a}^{6a} 2\alpha\, t\, dz_1 + \int_{6a}^{7a} \frac{3}{2}\alpha\, t\cos\beta \frac{dz_1}{\cos\beta} +$$
$$-\int_0^{3a}\left[\frac{6}{7\,EI}H\,z_1 - \frac{\alpha\,t}{h}\right](a-z_2)\frac{dz_1}{\cos\gamma} - \int_{3a}^{6a}\left[\frac{H}{EI}\left(3a-\frac{z_1}{7}\right)-\frac{2\alpha\,t}{h}\right](a-3a)\,dz_1 -$$
$$-\int_{6a}^{7a}\left[\frac{15}{7\,EI}H\left(7a-z_1\right)+\frac{\alpha\,t}{h}\right](a-z_2)\frac{dz_1}{\cos\beta} = 0$$

$$u_{2D} = \varphi_A\, 7a + \int_0^{3a}\frac{3}{2}\alpha\, t\sin\gamma\frac{dz_1}{\cos\gamma} + 0 + \int_{6a}^{7a}\frac{3}{2}\alpha\, t\left(-\sin\beta\right)\frac{dz_1}{\cos\beta} + \int_0^{3a}\left[\frac{6}{7EI}H\,z_1 - \frac{\alpha\,t}{h}\right]$$
$$\left(7\,a-z_1\right)\frac{dz_1}{\cos\gamma} + \int_{3a}^{6a}\left[\frac{H}{EI}\left(3a-\frac{z_1}{7}\right)-\frac{2\alpha\,t}{h}\right](7a-z_1)\,dz_1 + \int_{6a}^{7a}\left[\frac{15}{7\,EI}H\left(7\,a-z_1\right)+\frac{\alpha\,t}{h}\right](7a-z_1)\frac{dz_1}{\cos\beta} = 0$$

y teniendo en cuenta que para la barra *AB* $z_2 = z_1$ y para la *CD* $z_2 = -2\,z_1 + 15a$, las anteriores expresiones se escriben:

$$-\varphi_A + \left(12 - 11{,}8853\frac{a}{h}\right)\alpha\, t + 22{,}7914\frac{a^2 H}{EI} = 0$$

$$7\varphi_A + \left(1{,}5 - 37{,}2165\frac{a}{h}\right)\alpha\, t + 46{,}87\frac{a^2 H}{EI} = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$H = \left(-0{,}4142 + 0{,}5873\frac{a}{h}\right)\alpha\, t\, EI$$

A partir de este valor, la obtención de la ley de momentos flectores es inmediata.

Problema 11.48 *La estructura de la figura 1 es de sección rectangular de anchura unidad y canto* $h = 0{,}4$ *metros. Dicha estructura está sometida a una carga* $F = 110\ kN$ *y a un incremento térmico, siendo el valor del mismo* $t = 10^{o}C$.

Módulo de Elasticidad de toda la estructura $E = 3\times10^{4}\,MPa$.
Coeficiente de dilatación lineal $a = 10^{-5}\ {}^{o}C^{-1}$

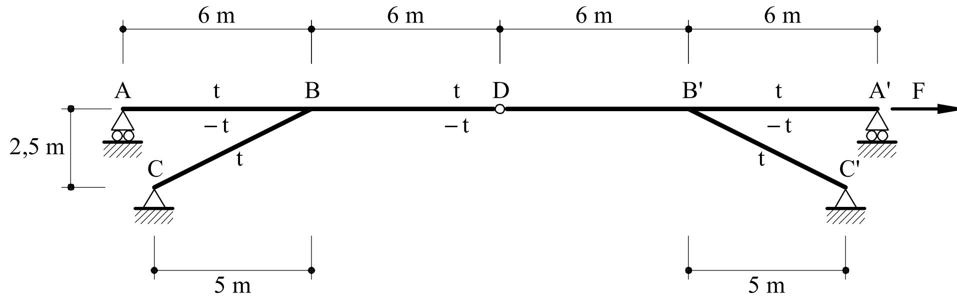


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 11.48

DETERMINAR:

1. *Leyes de esfuerzos en todas las piezas de la estructura.*
2. *Valor numérico del movimiento horizontal y vertical del punto donde está situada la rótula.*

Solución

a) *Cálculo de la estructura debido a la fuerza* $F = 110\ kN$.

La estructura es simétrica de forma respecto a un eje vertical por lo que se descompondrá en una estructura simétrica y en una antimétrica (figura 2)

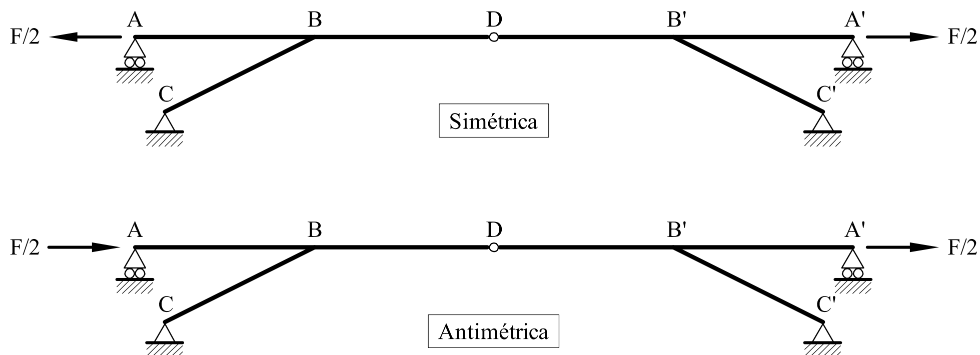


Fig. 2 Descomposición de la estructura en simétrica y antimétrica.

En la estructura simétrica únicamente aparece un esfuerzo axil de tracción de valor $N = F/2$ en el dintel. Para la estructura antimétrica es suficiente con analizar la mitad de la misma (figura 3).

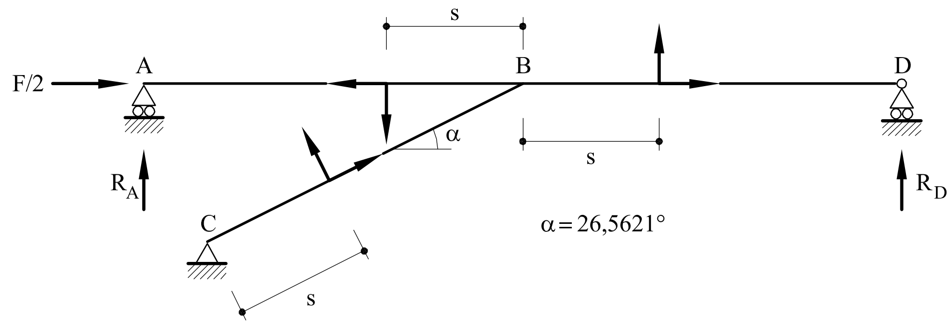


Fig. 3 Estructura antimétrica

Las leyes de Momentos flectores se escriben:

$$M_f\Big|_A^B = -R_A(6-s)$$

$$M_f\Big|_D^B = R_D(6-s)$$

$$M_f\Big|_C^B = R_D[6+5-s\cos\alpha] - R_A[1+s\cos\alpha] - \frac{F}{2}(2{,}5 - s\sin\alpha)$$

Tomando momentos respecto a C: $\sum M_C = 0$

$$(5+6)R_D - R_A - 2{,}5\frac{F}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = 11R_D - 1{,}25F$$

Con lo que

$$M_f\Big|_A^B = -(11R_D - 1{,}25F)(6-s)$$

$$\frac{\partial M_f}{\partial R_D} = -11(6-s)$$

$$M_f\Big|_D^B = R_D(6-s)$$

$$\frac{\partial M_f}{\partial R_D} = 6-s$$

$$M_f\Big|_C^B = R_D(11 - s\cos\alpha) - (11R_D - 1{,}25F)(1+s\cos\alpha) - \frac{F}{2}(2{,}5 - s\sin\alpha) =$$
$$= -12R_D\, s\cos\alpha + F\,s(1{,}25\cos\alpha + 0{,}5\sin\alpha) = -12R_D\, s\cos\alpha + 1{,}3416F\,s$$

$$\frac{\partial M_f\Big|_C^D}{\partial R_D} = -12s\cos\alpha$$

El movimiento vertical del punto *D* vale

$$EI\,\upsilon_D = \int M_f \frac{\partial M_f}{\partial R_D} ds = \int_0^6 \left[-\left(11R_D - 1{,}25F\right)(6-s)\right]\left[-11(6-s)\right]ds +$$

$$+\int_0^6 R_D\,(6-s)(6-s)ds + \int_0^{5/\cos\alpha} \left[-12\,R_D\,s\cos\alpha + 1{,}3416\,F\,s\right]\left[-12\,s\cos\alpha\right]ds =$$

$$= 122\,R_D \int_0^6 (6-s)^2\,ds - 13{,}75\,F\int_0^6 (6-s)^2\,ds + 144\,R_D \int_0^{5/\cos\alpha} s^2\cos^2\alpha\,ds -$$

$$-16{,}0992\,F \int_0^{5/\cos\alpha} s^2\cos\alpha\,ds = 8\,784\,R_D - 990\,F + 6\,708{,}31R_D - 852{,}92\,F = 0$$

Es decir:

$$R_D = 0{,}118\,F = 12{,}98\ kN$$

Este mismo problema puede también resolverse mediante las ecuaciones elásticas (fig. 4).

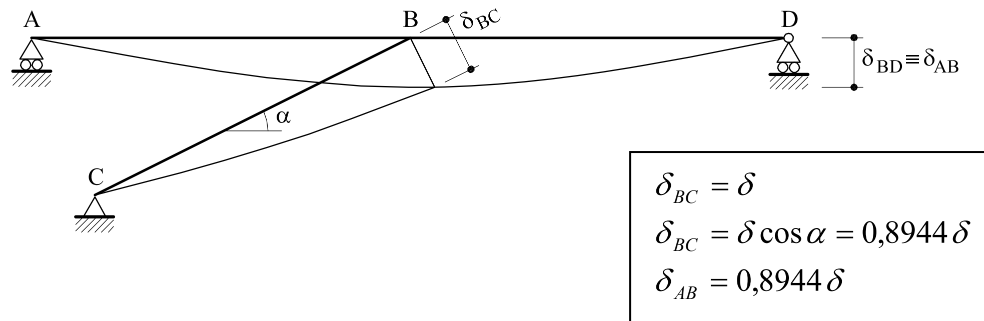


Fig. 4 Movimientos

Los momentos de extremo de barra de las piezas que concurren en *B* valen:

$$m_{ba} = \frac{3EI}{6}\varphi_B + \frac{3EI\cdot 0{,}8944\,\delta}{36} = 0{,}5\,EI\,\varphi_B + 0{,}07454\,\delta\,EI$$

$$m_{bc} = \frac{3EI}{5{,}59}\varphi_B + \frac{3EI\cdot\delta}{(5{,}59)^2} = 0{,}5367\,EI\,\varphi_B + 0{,}09601\,\delta\,EI$$

$$m_{bd} = \frac{3EI}{6}\varphi_B - \frac{3EI\cdot 0{,}8944\,\delta}{36} = 0{,}5\,EI\,\varphi_B - 0{,}07454\,\delta\,EI$$

Como $\sum m = 0$,

$$1{,}5367\,\varphi_B + 0{,}09601\,\delta = 0$$

lo cual constituye la primera ecuación.

Para el equilibrio de esfuerzos cortantes, se toman momentos respecto a *C*:

$$11 R_D - R_A - 1{,}25 F = 0$$

Y como $R_A = m_{ba}/6$ y $R_D = -m_{bd}/6$ sustituyendo

$$-11\frac{m_{bd}}{6} - \frac{m_{ba}}{6} - 1{,}25 F = 0$$

$$11\left(0{,}5 EI\,\varphi_B - 0{,}07454\,\delta\right) + 0{,}5 EI\,\varphi_B + 0{,}07454\,\delta + 7{,}5 F = 0$$

$$6 EI\,\varphi_B - 0{,}7454\,\delta\,EI = -7{,}5 F$$

lo cual constituye la segunda ecuación.

Resolviendo:

$$EI\,\varphi_B = -0{,}41828 F$$

$$EI\,\delta = 6{,}69482 F$$

Con lo cual:

$$m_{ba} = -0{,}5 \times 0{,}41828 F + 0{,}07454 \times 6{,}69482 F = 0{,}29 F$$

$$m_{bc} = -0{,}5367 \times 0{,}41828 F + 0{,}09601 \times 6{,}69482 F = 0{,}41828 F$$

$$m_{bd} = -0{,}5 \times 0{,}41828 - 0{,}07454 \times 6{,}69482 F = -0{,}70817 F$$

Sustituyendo:

$$m_{ba} = 31{,}9\ kNm$$

$$m_{bc} = 46\ kNm$$

$$m_{bd} = -77{,}9\ kNm$$

El movimiento vertical de la rótula es nulo. Para hallar el movimiento horizontal, es preciso en primer lugar obtener el valor del momento de inercia.

$$I = \frac{1}{12} \times 1 \times (0{,}4)^3 = 5{,}333 \times 10^{-3}\ m^4$$

$$EI = 3 \times 10^4\ MPa \times 5{,}333 \times 10^{-3}\ m^4 = 160\,000\,kN \times m^2$$

Por lo tanto, el movimiento δ valdrá

$$\delta = \frac{6{,}69482\,F}{EI} = \frac{6{,}69482 \times 110}{160\,000} = 4{,}6 \times 10^{-3}\ m$$

y el desplazamiento horizontal:

$$\delta_D = \delta \sin\alpha = 1{,}923 \times 10^{-3}\ m$$

b) Variación térmica

La curvatura de origen térmico vale

$$\chi^{nt} = -\frac{2\,\alpha\,t}{h} = -\frac{2 \times 10^{-5} \times 10}{0{,}4} = -5 \times 10^{-4}\,m^{-1}$$

El punto *D*, por simetría, no se desplazará horizontalmente, y además, como el cortante y el momento en *D* son nulos, la pieza *BD* está sometida únicamente a esfuerzo axil. Es por tanto válido eliminar la pieza *BD* y sustituirla por un apoyo en *B* (figura 5). Para hallar los momentos en *B* de las piezas *AB* y *CB* se descompone en vigas simples (figura 5).

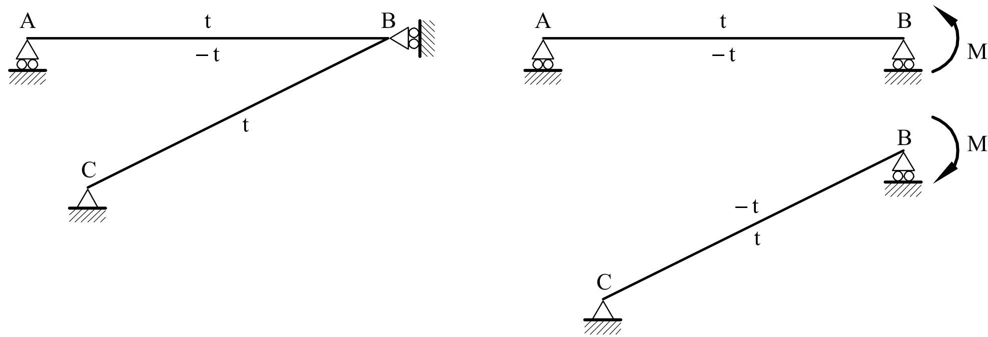


Fig. 5 Descomposición de la estructura

El giro del punto *B* valdrá

$$\varphi_B^{AB} = \chi^{nt}\,\frac{6}{2} + \frac{M\,6}{3\,EI}$$

$$\varphi_B^{BC} = -\chi^{nt}\,\frac{5/\cos\alpha}{2} - \frac{M\ \ 5/\cos\alpha}{3\,EI}$$

Igualando:

$$\chi^{nt}\left(\frac{6 + 5/\cos\alpha}{2}\right) = -\frac{M}{EI}\left(\frac{6 + 5/\cos\alpha}{3}\right)$$

Es decir:

$$M = -\frac{3}{2}\chi^{nt} EI = \frac{3}{2} \times 5 \times 10^{-4} \times 160\,000 = 120 \;\; kNm$$

Las leyes de momentos flectores se representan en la figura 6

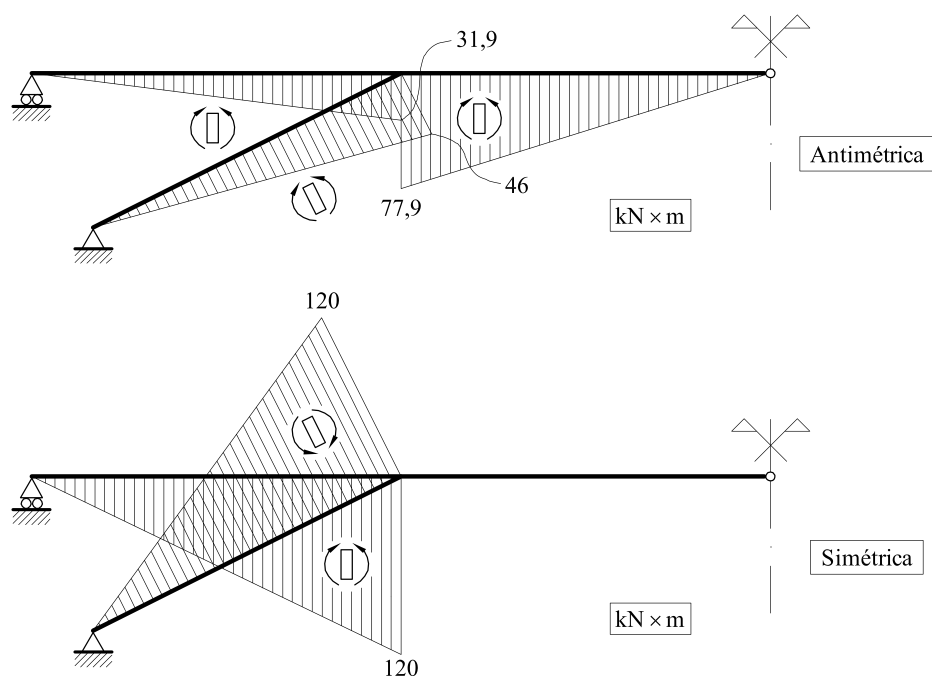


Fig. 6 Leyes de momentos flectores: a)Debidas a F. b) Debidas a la variación térmica.

Problema 11.49 *Hallar las leyes de momentos flectores en la estructura de la figura 1*

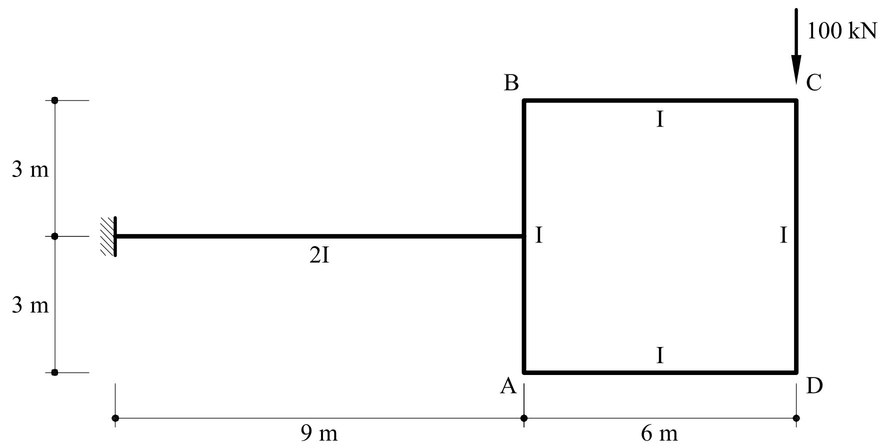


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 11.49

Solución

Aislando el cuadrado de la ménsula se obtiene la estructura representada en la figura 2 a). Dicha estructura puede descomponerse en suma de tres, tal como se señala en la misma figura: Estructura I, Estructura II, Estructura III

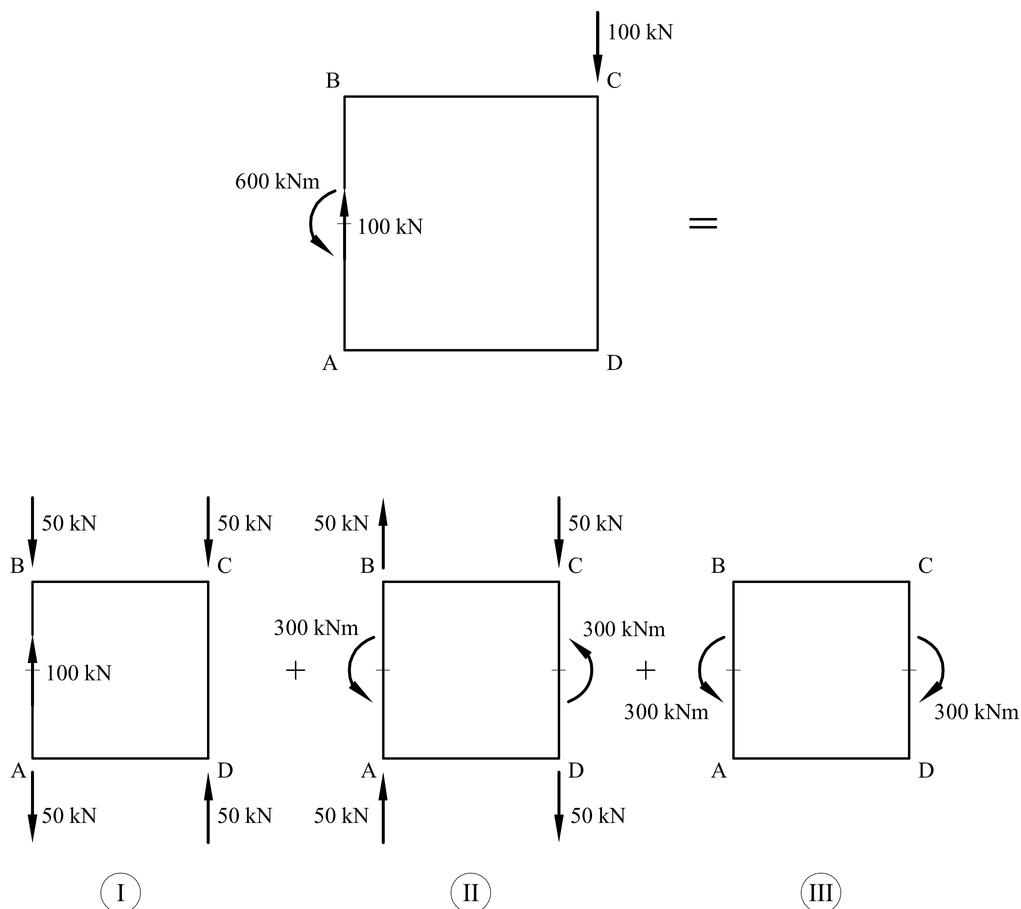


Fig. 2 Descomposición en diversos estados de carga

a) Estructura I

Esta estructura está sometida únicamente esfuerzos axiles de compresión en las piezas *CD* y *AB*. En la pieza *AB* el axil vale $50kN$ y es de compresión en su mitad superior y de tracción en su mitad inferior. En la pieza *CD* el axil es de compresión y vale $50\,kN$.

b) Estructura II

Al tener antimetría respecto a un eje horizontal y respecto a un eje vertical, la estructura puede descomponerse tal como se indica en la figura 3. Las leyes de esfuerzos son inmediatas.

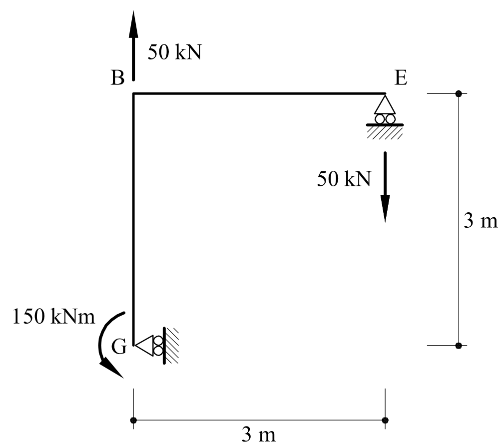


Fig. 3 Estructura II tenida en cuenta la antimetría

c) Estructura III

La estructura es simétrica respecto a un eje vertical y antimétrica respecto a un eje horizontal. Puede, por lo tanto, ser descompuesta tal como indica la figura 4. Dicha estructura resultante es una vez hiperestática. Utilizando las fórmulas de Navier-Bresse e imponiendo la condición de que el movimiento horizontal de *G* sea nulo, se obtiene

$$R_G = 56{,}25\,kN$$

A partir de este valor, las leyes de momentos flectores son inmediatas. En la figura 5 pueden verse representadas dichas leyes.

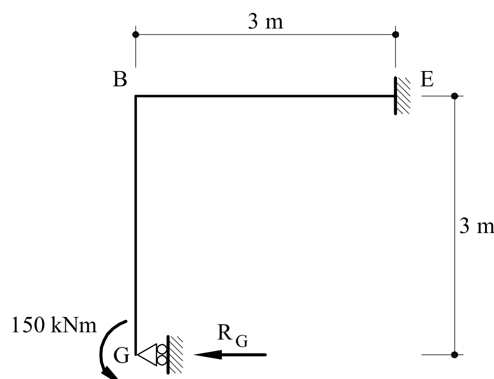


Fig. 4 Descomposición de la estructura III

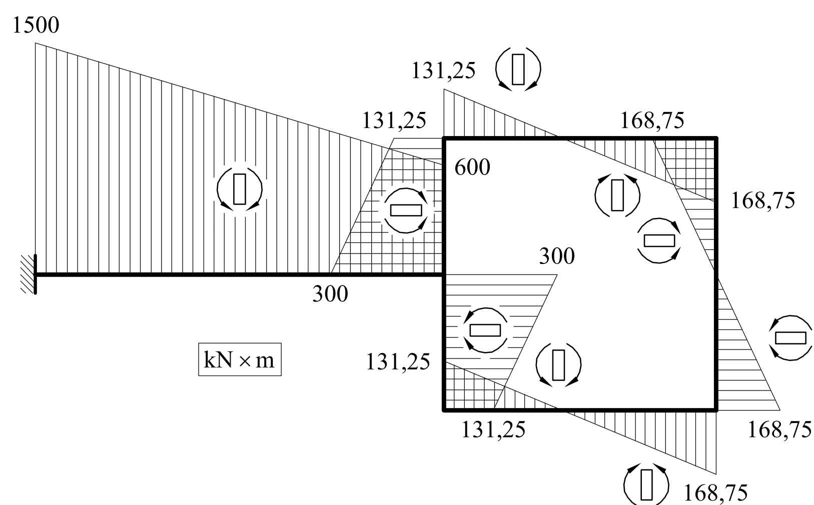


Fig. 5 Ley de momentos flectores

Problema 11.50 *En la estructura que se representa en la figura 1, la recta AB representa un cable de acero de 10 cm*^{2} *de sección. El resto de las piezas son de hormigón con un canto de 1 metro y una anchura de 0,5 metros. Previamente a la introducción de las cargas se da una tensión previa al cable AB de tal forma que una vez cargada la estructura el momento flector en la barra CD sea nulo en todos los puntos. Sabiendo que la relación entre los módulos de elasticidad del acero y del hormigón vale 6, hallar:*

- *Tensión previa que hay que dar al tirante.*
- *Esfuerzo final en el tirante.*
- *Ley de momentos flectores finales en la estructura.*

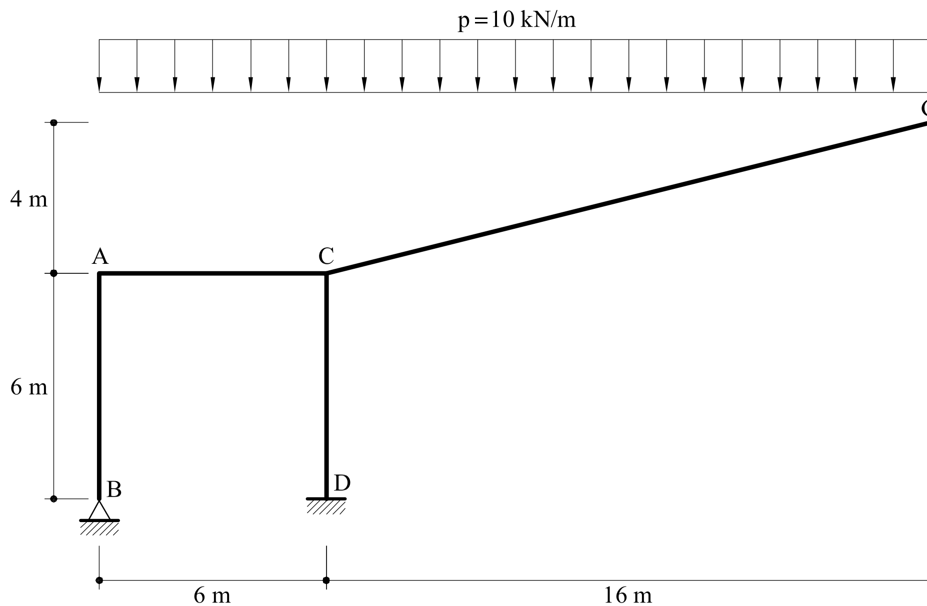


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 11.50

Solución

El área e inercia valen:

$$A = 0{,}001\, m^2$$

$$I = 0{,}04167\, m^4$$

y por lo tanto,

$$\frac{I}{A} = 41{,}67\, m^2$$

Sean:

F_f : Tensión final en el cable una vez introducidas las cargas.
F_i : Tensión inicial que hay que dar al tirante.
ΔF : Incremento de tensión que se produce en el tirante como consecuencia de aplicar las cargas.

Para que no haya momento en ningún punto de CD , es preciso que en A haya una fuerza de valor

$$6F_f = p \cdot (16+6) \cdot 5$$

$$F_f = p\frac{22 \times 5}{6} = 18{,}33\,p$$

* Cuando se coloca la carga (figura 2) el giro en C vale:

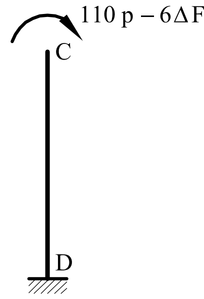


Fig. 2. Pilar CD

$$\varphi_C = \frac{(110\,p - 6\,\Delta F)6}{EI} = 660\frac{p}{EI} - \frac{36\,\Delta F}{EI}$$

El desplazamiento del punto A vale (positivo si hacia arriba)

$$\delta_A = \varphi_C \cdot 6 - \frac{p \cdot 6^4}{8\,EI} - \frac{\Delta F\,6^3}{3\,EI} = \frac{3\,960\,p}{EI} - \frac{216\,\Delta F}{EI} - \frac{162\,p}{EI} - \frac{72\,\Delta F}{EI} =$$
$$= \frac{3\,798\,p}{EI} - \frac{288\,\Delta F}{EI}$$

Igualando con el alargamiento del tirante

$$\frac{\Delta F \cdot 6}{E_t\,A_t} = \frac{3\,798\,p}{E\;I} - \frac{288\,\Delta F}{E_p\,I}$$

en donde E_t es el módulo de elasticidad del tirante y A_t el área de dicho tirante. Y teniendo en cuenta que

$$\frac{E\,I}{E_t\,A_t} = \frac{41{,}67}{6} = 6{,}945$$

$$\Delta F \cdot 6 = \frac{3\,798\,p}{6{,}945} - \frac{288}{6{,}945}\Delta F$$

$$\Delta F = 115{,}2\;\;kN$$

y como,

$$F_f = F_i + \Delta F$$

resulta,

$$F_i = F_f - \Delta F = 183{,}3 - 115{,}2 = 68{,}1 \ kN$$

Problema 11.51 *La estructura que se representa en la figura 1 tiene la forma de una parábola de segundo grado de eje vertical y tangente nula en el punto A. La inercia de la misma viene dada por $I(s)=I/\cos\theta$ siendo θ el ángulo que forma la tangente en cada punto con la horizontal. Bajo las cargas que se indican, determinar el valor del movimiento vertical del punto B.*

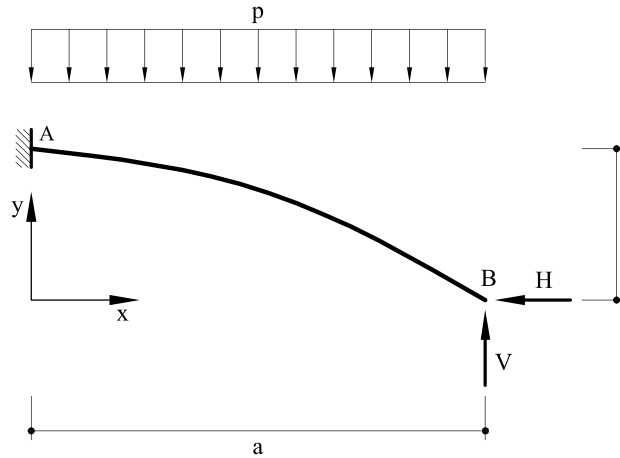


Fig.1 Arco correspondiente al problema 11.51

Solución

La ecuación de la parábola se escribe:

$$y=f\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$$

La ley de momentos flectores vale

$$M_f=V\left(a-x\right)-Hy-p\frac{\left(a-x\right)^2}{2}$$

El movimiento horizontal de *B* valdrá (positivo si hacia la derecha).

$$u_B=-\int_A^B M_f\,y\frac{ds}{EI\left(s\right)}=-\int_o^a M_f\,y\frac{dx}{EI}$$

Sustituyendo M_f e y por su expresión en función de x e integrando se obtiene

$$\overrightarrow{u_B}=\frac{f}{EI}\left[-\frac{3\,pa^3}{20}-\frac{8}{15}f\,a\,H+\frac{5}{12}a^2\,V\right]$$

Análogamente para el movimiento vertical (positivo si ascendente)

$$v_B = \int_A^B M_f\left(a-x\right)\frac{ds}{EI\left(s\right)} = \int_o^a M_f\left(a-x\right)\frac{dx}{EI}$$

Sustituyendo M_f por su expresión e integrando:

$$v_B = \frac{1}{EI}\left[-\frac{p\,a^4}{8} - \frac{5}{12}f\,a^2\,H + \frac{a^3\,V}{3}\right]$$

Problema 11.52 *El anillo circular de la figura 1 tiene radio* R *y sección rectangular de canto c. Su cara externa está sometida a un incremento térmico de valor t, mientras que en su cara interna la variación térmica es –t. El coeficiente de dilatación térmica lineal vale α y la rigidez a flexión EI. Hallar el valor del momento flector en el punto B.*

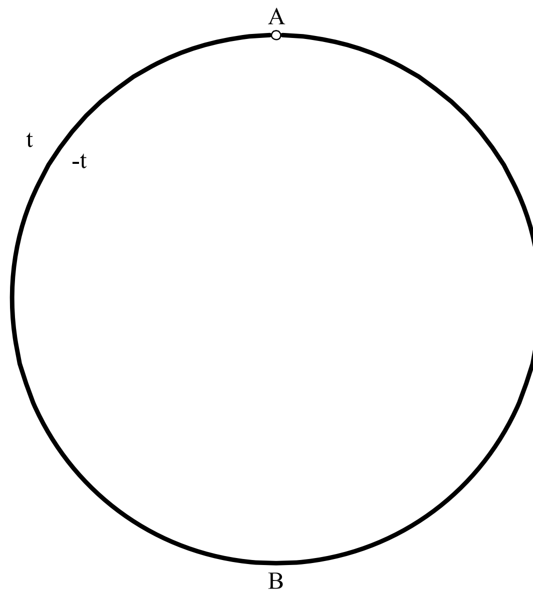


Fig. 1 Anillo correspondiente al problema 11.52

Solución

Por simetría respecto a un eje vertical el giro en *B* es nulo. Por lo tanto, cortando por el eje de simetría queda el semicírculo representado en la figura 2. El valor de *N* se obtendrá imponiendo la condición de que el movimiento horizontal de *A* es nulo.

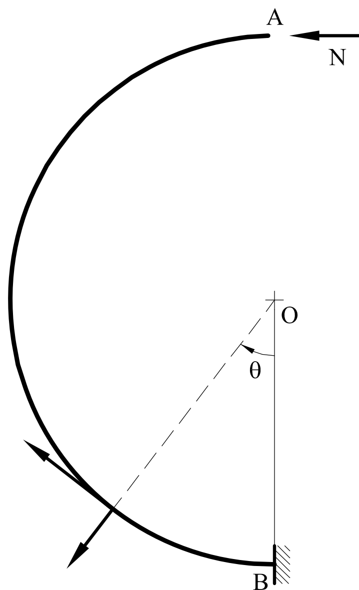


Fig. 2 Arco resultante después del corte

La ley de momentos flectores debida a *N* se escribe:

$$M_f = NR(1+\cos\theta)$$

La curvatura térmica en cualquier punto vale:

$$\chi^{nt} = -\frac{2\alpha t}{c}$$

Con lo que la curvatura total vale:

$$\chi^{t} = -\frac{2\alpha t}{c} + \frac{M_f}{EI} = -\frac{2\alpha t}{c} + \frac{HR(1+\cos\theta)}{EI}$$

La ley de momentos flectores debida a una fuerza unidad aplicada en *A* y con la misma dirección y sentido que *N* vale:

$$m_f = R(1+\cos\theta)$$

Con lo cual, aplicando el teorema de la fuerza unidad, el movimiento horizontal del punto a vale.

$$u_A = 0 = \int_0^{\pi} \chi^t m_f ds = \int_0^{\pi} \left[-\frac{2\alpha t}{c} + \frac{NR(1+\cos\theta)}{EI} \right] R(1+\cos\theta) R d\theta = \pi R^2 \left(-\frac{2\alpha t}{c} + 1,5\frac{NR}{EI} \right)$$

Es decir:

$$N = 1,3333\frac{EI\alpha t}{cR}$$

Con lo cual, el momento flector en B vale

$$M_{fB} = 2NR = 2,6667\frac{EI\alpha t}{c}$$

Problema 11.53 *En el anillo cerrado de la figura 1, sometido a dos fuerzas iguales y de sentido contrario* F*, hallar el valor del momento flector y del esfuerzo axil en el punto* A.

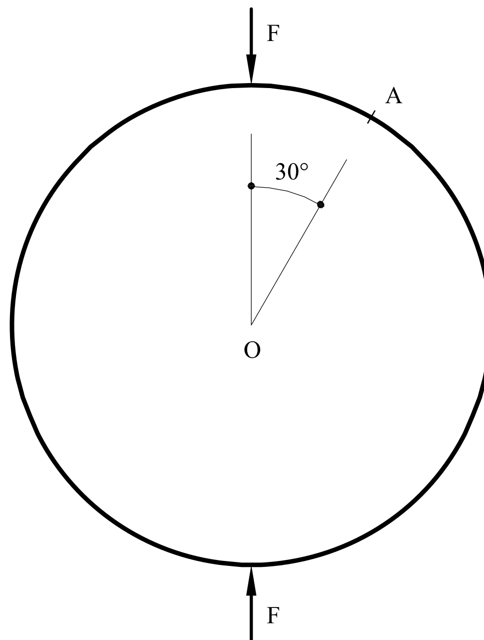


Fig. 1 Anillo correspondiente al problema 11.53

Solución

La estructura es simétrica respecto a un eje horizontal y repecto a un eje vertical. En consecuencia, es suficiente con considerar un cuarto de anillo (figura 2).

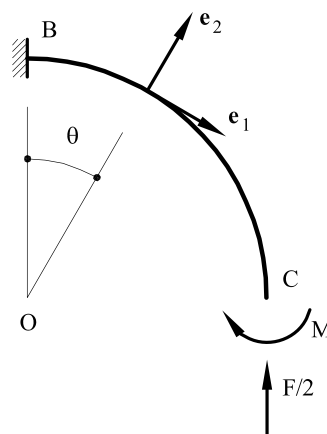


Fig. 2 Arco resultante con el momento hiperestático

El momento hiperestático M se obtendrá al imponer la nulidad del giro en el punto C. La ley de momentos flectores se escribe

$$M_f = \frac{F\,R}{2}\left(1-\sin\theta\right)-M$$

con lo cual, el giro en C vale:

$$\varphi_c = \int_0^{\pi/2} \frac{M_f \, R \, d\theta}{E I} = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{F R^2}{2} (1 - \sin\theta) - M R \right] \frac{d\theta}{E I} = \frac{1}{E I} \left(0{,}2854 R^2 F - 1{,}5708 M R \right) = 0$$

con lo cual,

$$M = 0{,}1817 F R$$

El momento en A vale:

$$M_{fA} = \frac{F R}{2} \frac{1}{2} - 0{,}1817 F R = 0{,}0683 F R$$

Problema 11.54 *El arco semicircular de la figura 1 tiene radio* R. *En la clave actúa una fuerza vertical, descendente de valor* F. *Se desea hallar el movimiento vertical de la clave.*

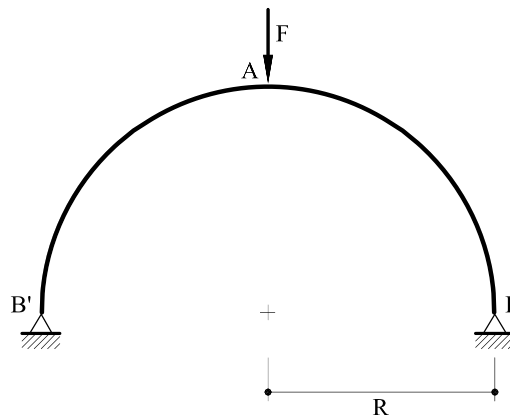


Fig. 1 Arco correspondiente al problema 11.54

Solución

La estructura es simétrica respecto a un eje vertical y una vez hiperestática. Se tomará como incógnita hiperestática la reacción horizontal en B y B'.
Dadas las condiciones de simetría puede considerarse únicamente media estructura, tal como se indica en la figura 2.

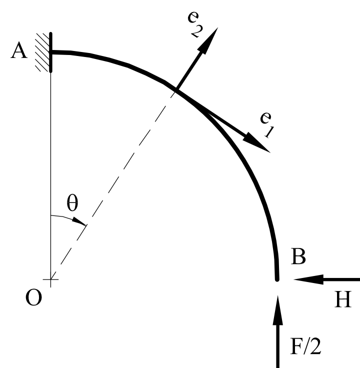


Fig. 2 Sistema de ejes locales

La ley de momentos flectores se escribe:

$$M_f = \frac{F}{2} R\left(1 - \sin\theta\right) - H\,R\cos\theta$$

El movimiento horizontal de B debe ser nulo:

$$E\,I\,u_B = \int_0^{\pi/2} M_f\, R\cos\theta\, R\, d\theta = \frac{F\,R^3}{4} - \frac{H\,R^3\pi}{4}$$

y como $u_B = 0$, resulta

$$H = \frac{F}{\pi} = 0{,}3183\,F$$

Lógicamente, el movimiento vertical de A en la estructura original es el mismo que el movimiento vertical de B en la estructura modificada de la figura 2, con lo cual

$$E\,I\,v_A = \int_0^{\pi/2} M_f\,R\left(1-\sin\theta\right)R\,d\theta = 0{,}0189423\,F\,R^3$$

Problema 11.55 *La estructura de la figura 1 está compuesta por un cuarto de círculo de radio R y un tirante AB. El arco es de sección rectangular y tiene espesor* h *y ancho unidad. El tirante tiene sección* ω *y el mismo módulo de elasticidad que el arco. Cuando el arco está sometido a una variación térmica de* $-t$ *grados en su cara externa y* t *grados en su cara interna, hallar el esfuerzo en el tirante.*

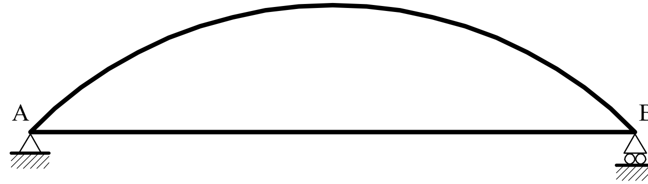


Fig.1 Estructura correspondiente al problema 11.55

Solución

Por motivos de simetría puede considerarse únicamente medio arco. Sea *T* el esfuerzo axil en el tirante (figura 2). La curvatura térmica vale

$$\chi^{nt} = \frac{2\alpha t}{h}$$

La ley de momentos flectores se escribe

$$M_f = -T\,R\left(\cos\theta - \cos\pi/4\right)$$

El movimiento horizontal de *B* valdrá

$$\overrightarrow{u_B} = \int_o^{\pi/4} \left(\chi^{nt} + \frac{M_f}{EI}\right) R\left(\cos\theta - \cos\frac{\pi}{4}\right) R\,d\theta = 0{,}15175\,R^2\,\chi^{nt} - 0{,}0354\frac{R^3\,T}{EI}$$

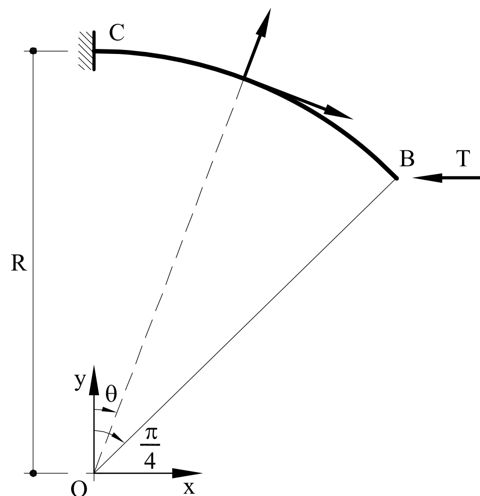


Fig. 2 Subestructura considerada

Igualando la expresión anterior al alargamiento de medio tirante:

$$0{,}15175\, R^2\, \chi^{nt} - 0{,}0354 \frac{R^3\, T}{EI} = \frac{T\, R \sin \pi/4}{E\omega}$$

y despejando *T*:

$$T = \frac{\alpha\, t}{h} \frac{R}{\dfrac{2{,}33}{E\omega} + \dfrac{0{,}1166\, R^2}{EI}}$$

Problema 11.56 *En el arco circular que se representa en la figura 1, se desea obtener el movimiento vertical en la clave así como las reacciones horizontales.*

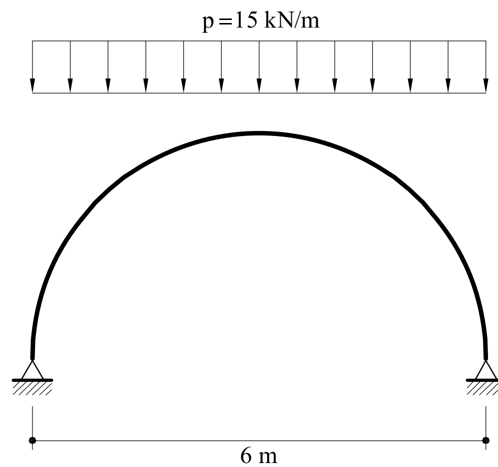


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 11.56

Solución

Se considera, por simetría, únicamente medio arco (figura 2). Las leyes de momentos flectores se escriben.

$$M_f = p\,a^2\left(1-\sin\theta\right) - H\,a\cos\theta - \frac{p\,a^2}{2}\left(1-\sin\theta\right)^2$$

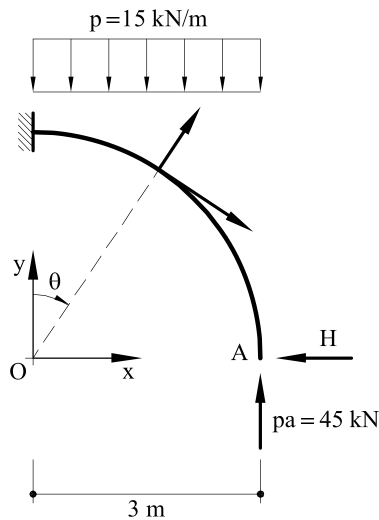


Fig. 2 Media estructura

El movimiento del punto *A* vale:

$$u_A = \frac{1}{EI}\int_o^{\pi/2} M_f\,a^2\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{EI}\left[\frac{p\,a^4}{3} - \frac{\pi\,a^3}{4}H\right] = 0$$

Es decir:

$$H = \frac{4}{3\pi} p\, a = \frac{4}{3\pi} \times 15 \times 3 = 19{,}1\ \ kN$$

El movimiento vertical de la clave será igual, en módulo, al movimiento vertical del punto *A* de la estructura de la figura 2.

$$v_A = \frac{1}{EI} \int_o^{\pi/2} M_f\, a^2 \left(1 - \sin\theta\right) d\theta = \frac{16{,}78}{EI}$$

Problema 11.57 *La directriz de un arco se indica esquemáticamente en la figura es una parábola de segundo grado, cuya inercia varía como* $I_c \cdot \sec\theta$*, donde* I_c *es la inercia en la clave, igual a* $10^5\ cm^4$ *y* θ *es el ángulo que forma la tangente a la directriz con el eje horizontal. Los extremos del arco se consideran perfectamente empotrados. El módulo de elasticidad del material es de* $10^4\ MPa$.

Se pide:

1. *Calcular las reacciones que aparecen en los extremos de la estructura debidas a las fuerzas que se indican.*
2. *Calcular los movimientos del punto A y de la clave.*

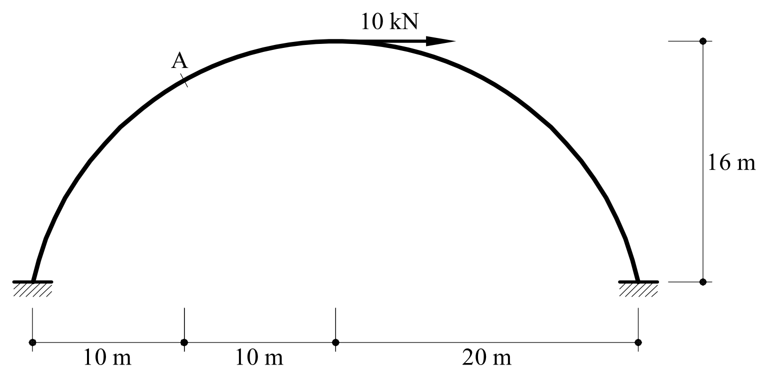


Fig. 1 Arco correspondiente al problema 11.57

Solución

La carga es antimétrica, por lo que puede considerarse únicamente media estructura (figura 2).

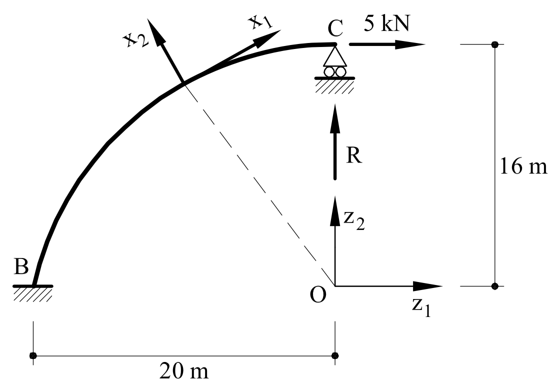


Fig. 2 Estructura simplificada

La ecuación de la parábola se escribe

$$z_2 = 16\left[1 - \left(\frac{z_1}{20}\right)^2\right]$$

La ley de momentos flectores se expresa:

$$M_f = -R\,z_1 - 5(16 - z_2)$$

El movimiento vertical del punto C debe ser nulo:

$$v_{2C} = \int_{-20}^{0} M_f\,(-z_1)\frac{dz_1}{EI_c} = -\frac{8\,000}{EI}\left(1-\frac{R}{3}\right) = 0$$

Es decir:

$$R = 3\,kN$$

Seguidamente se calculan los movimientos del punto A y de la clave C.

Las coordenadas del punto A valen:

$$z_{1A} = -10$$

$$z_{2A} = 16\left[1-\left(\frac{-10}{20}\right)^2\right] = 12$$

con lo cual:

$$v_{1A} = -\int_{-20}^{-10} M_f\,(z_{2A} - z_2)\frac{dz_1}{EI_c} = \frac{393{,}33}{EI_c} \quad (\textit{hacia la derecha})$$

$$v_{2A} = \int_{-20}^{-10} M_f\,(-10 - z_1)\frac{dz_1}{EI_c} = -\frac{333{,}33}{EI_c} \quad (\textit{hacia abajo})$$

$$v_{1C} = -\int_{-20}^{0} M_f\,(16 - z_2)\frac{dz_1}{EI_c} = \frac{320}{EI_c} \quad (\textit{hacia la derecha})$$

y como

$$I_c = 10^5\,cm^4 = 10^{-3}\,m^4$$

$$E = 10^4\,MPa = 10^7\,kN/m^2$$

$$EI_c = 10^4\,kN \times m^2$$

Por lo tanto:

$$v_{1A} = \frac{300}{10^4} = 0{,}0393\ \textit{metros}$$

$$v_{2A} = -0{,}03333 \; metros$$

$$v_{1C} = 0{,}032 \; metros$$

Problema 11.58 *La pieza de la figura 1 es una parábola de segundo grado de eje vertical. La inercia de un punto cualquiera vale* $I(s) = I/\cos\theta$ *siendo* θ *el ángulo que forma la tangente en cada punto con la horizontal. Por otra parte, el punto B tiene un apoyo elástico en dirección vertical y otro en dirección horizontal y tales que* $k = a^3/(2\,EI)$

Hallar:

- *Reacciones en B*
- *Movimiento horizontal y vertical de B*
- *Movimiento horizontal y vertical de A*

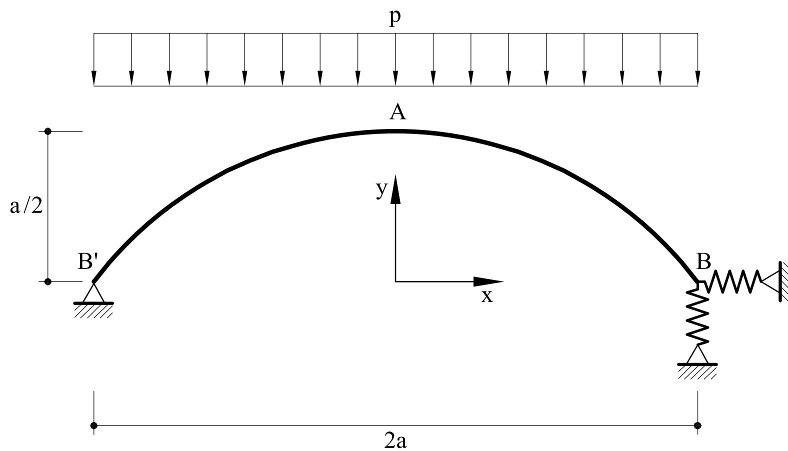


Fig. 1 Arco correspondiente al problema 11.58

Solución

La reacción vertical en *B* y *B'* es isostática y por lo tanto su valor es independiente de los movimientos de los apoyos.
La reacción horizontal en B es hiperestática y, por lo tanto, su valor depende de la constante del muelle. Si se libera el apoyo horizontal en *B* y se sustituye por una fuerza *H*, el movimiento de *B* vale (ver problema correspondiente).

$$EI\,u_B = 2\left[-\frac{3\,p\,a^4}{2\times 20} - \frac{8}{15}\left(\frac{a}{2}\right)a\,H + \frac{5}{12}a^2\,\frac{a}{2}\,p\,a\right] = 0{,}2667\,p\,a^4 - 0{,}2667\,H\,a^3$$

y como al mismo tiempo

$$u_B = \frac{a^3}{2\,EI}H$$

Igualando los valores de u_B resulta

$$H = 0{,}3478\,p\,a$$

y el movimiento horizontal de *B*

$$u_B = 0{,}1739 \frac{p\,a^4}{EI}$$

El movimiento vertical de *A* valdrá:

$$EI\,v_A = -\frac{p\,a^4}{8} - \frac{5}{12}\left(\frac{a}{2}\right) a^2 \times 0{,}3478\,p\,a + \frac{a^3}{3}\,p\,a + \frac{a^3}{2}\,p\,a\frac{1}{2} = 0{,}3859\frac{p\,a^4}{EI}$$

Problema 11.59 *En la estructura que se representa en la figura 1 la recta BB' representa un tirante inextensible. La pieza curva es medio arco de círculo con la misma inercia que los pilares. Se pide: Hallar las reacciones horizontales en los apoyos así como el esfuerzo axil en el tirante.*

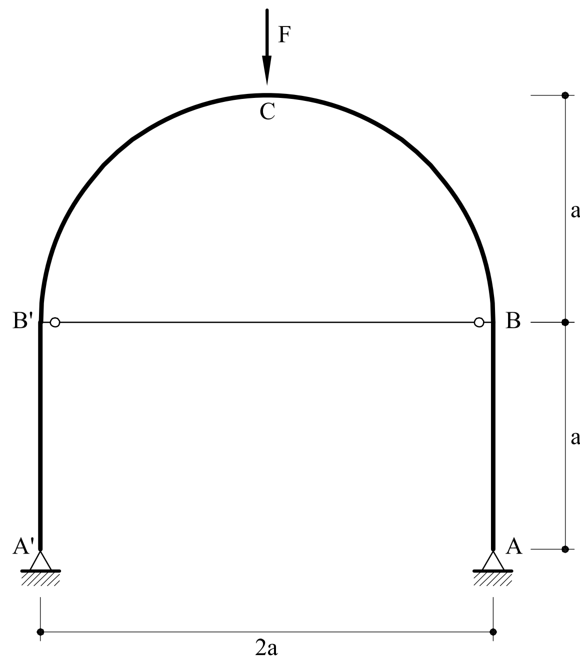


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 11.59

Solución

Si N es el esfuerzo axil en el tirante, y H es la reacción horizontal en A, los movimientos horizontales de los puntos A y B (figura 2) deben ser nulos.

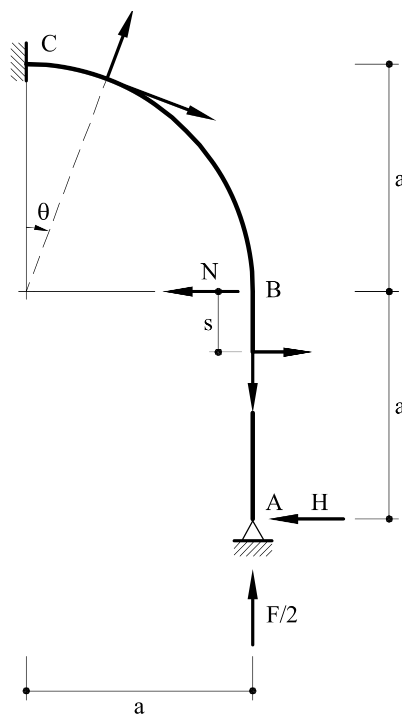


Fig. 2 Ejes locales

Las leyes de momentos flectores se escriben:

$$M_f\Big|_B^C = \frac{F}{2}a\left(1-\sin\theta\right) - H\,a\left(1+\cos\theta\right) - N\,a\cos\theta$$

$$M_f\Big|_A^B = -H\left(a-s\right)$$

El movimiento horizontal de *A* es nulo

$$u_{1A} = 0 = \int_0^a M_f\Big|_A^B \left(a-s\right)\frac{ds}{EI} + \int_0^{\pi/2} M_f\Big|_B^C \, a\left(\cos\theta+1\right)\frac{a\,d\theta}{EI} =$$

$$= 0{,}5354\frac{F\,a^3}{EI} - 4{,}6895\frac{H\,a^3}{EI} - 1{,}7854\frac{N\,a^3}{EI}$$

Análogamente, el movimiento horizontal de *B* debe ser nulo:

$$u_{1B} = 0 = \int_0^{\pi/2} M_f\Big|_B^C \, a\cos\theta\frac{a\,d\theta}{EI} = 0{,}25\frac{F\,a^3}{EI} - \frac{1{,}7854\,H\,a^3}{EI} - \frac{0{,}7854\,N\,a^3}{EI} = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$H = -0{,}052165\,F$$

$$N = 0{,}437\,F$$

Problema 11.60 *Dado F*, *r*, *E* e *I*, de la estructura que se representa en la figura 1.

Determinar el desplazamiento vertical de la sección *C*.

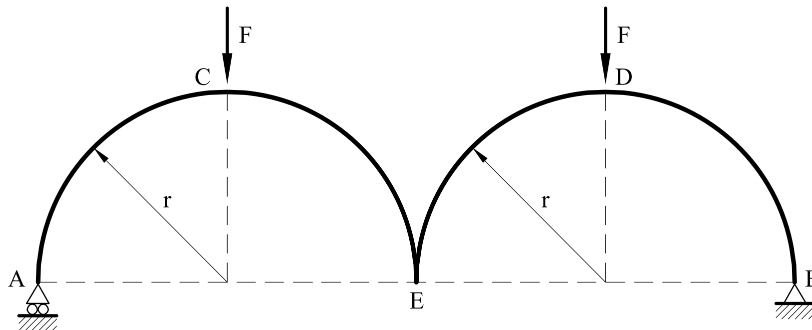


Fig. 1. Estructura correspondiente al problema 11.60

Solución

Al ser la estructura simétrica respecto a un eje vertical que pasa por *E*, el movimiento vertical de *C* será igual a la derivada respecto a F de la energía elástica de media estructura. Es decir

$$v_{2C} = \frac{\partial W}{\partial F}$$

Para calcular la derivada anterior es preciso, en primer lugar, hallar la ley de momentos flectores (figura 2).

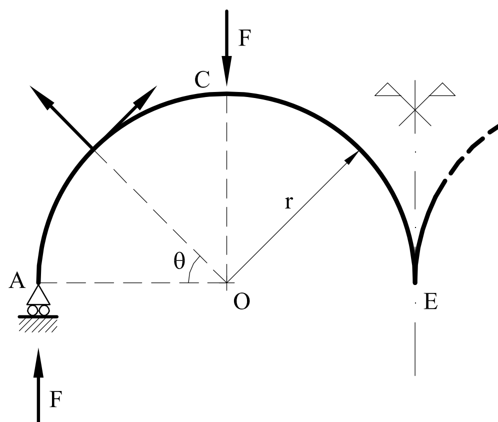


Fig. 2. Coordenadas locales

$$M_f\Big|_A^C = F\, r\left(1-\cos\theta\right)$$

$$M_f\Big|_C^E = F\, r\left(1-\cos\theta\right) - F\, r \sin\left(\theta - \pi/2\right)$$

$$\frac{\partial M_f\big|_A^C}{\partial F} = r(1-\cos\theta)$$

$$\frac{\partial M_f\big|_C^E}{\partial F} = r(1-\cos\theta) - r\sin(\theta - \pi/2)$$

Aplicando el segundo teorema de Castigliano

$$v_{2C} = \int_0^{\pi/2} M_f\big|_A^C \frac{\partial M_f\big|_A^C}{\partial F} r\,d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} M_f\big|_C^E \frac{\partial M_f\big|_C^E}{\partial F} r\,d\theta = 1{,}927\frac{F\,r^3}{EI}$$

Problema 11.61 *La estructura semicircular de la figura 1 está sometida a las cargas que se indican. Se pide determinar las reacciones en A.*

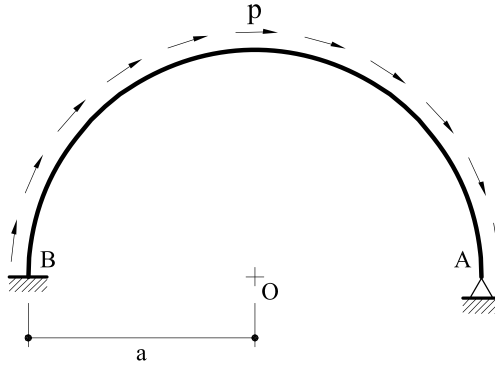


Fig. 1 Estructura correspondiente al problema 11.61

Solución

La estructura es dos veces hiperestática. Se tomarán como incógnitas hiperestáticas las reacciones en *A* (figura 2).

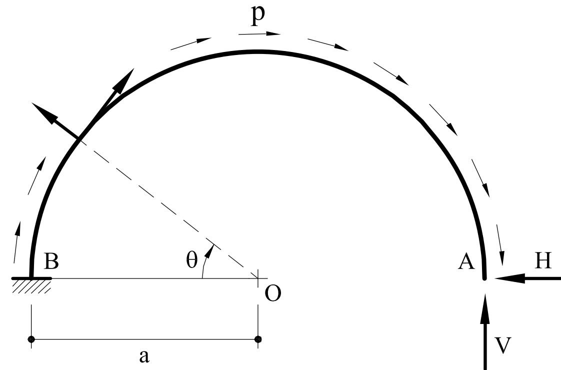


Fig. 2 Reacciones y ejes locales

La ley de momentos flectores se escribe

$$M_f = V\,a\left(1+\cos\theta\right) - H\,a\sin\theta + p\,a^2\left(\theta+\sin\theta-\pi\right)$$

Las incógnitas hiperestáticas *H* y *V* se obtendrán al anular los movimientos horizontal y vertical de *A*.

$$u_{1A} = \int_0^{\pi} M_f\ a\sin\theta\frac{ad\theta}{EI} = -\frac{a^3}{2EI}(\pi H - 4V + \pi ap) = 0$$

$$u_{2A} = \int_0^{\pi} M_f\ a(1+\cos\theta)\frac{ad\theta}{EI} = -\frac{a^3}{2EI}(4H - 3\pi V + \pi^2 ap) = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior,

$$H = 0{,}7252\ ap$$
$$V = 1{,}355\ ap$$

Problema 11.62 *Dada la estructura de la figura, en la que su radio es igual a 10 cm con una rótula en A, despreciando la influencia de los esfuerzos axiles, hallar:*

- *Ley de momentos flectores*

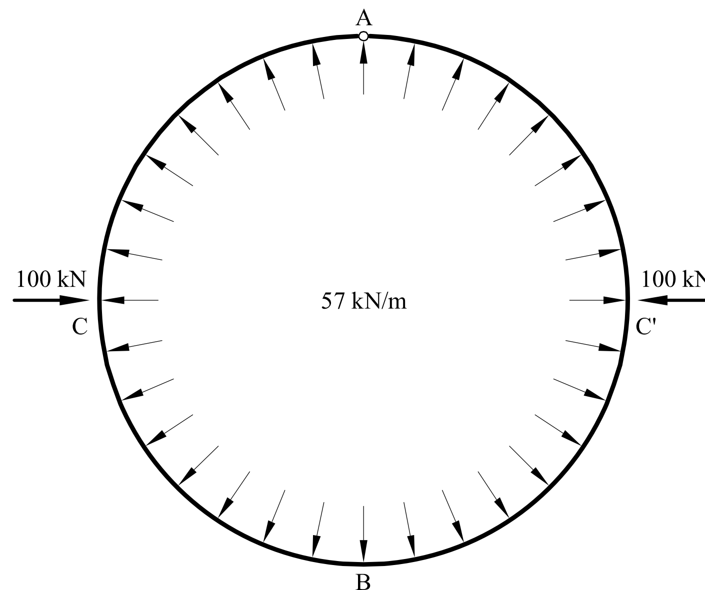


Fig. 1 Anillo correspondiente al problema 11.62

Solución

La carga uniformemente distribuida produce únicamente tracción en el anillo de acuerdo con la fórmula de los tubos delgados. En consecuencia, puede prescindirse de esta carga para determinar la ley de momentos flectores. En el punto A, por simetría, no hay esfuerzos cortantes y en B no hay giro. Basta, por lo tanto, considerar media estructura tal y como se indica en la figura 2. La incógnita hiperestática N se obtendrá al imponer la condición de que el desplazamiento horizontal de A sea nulo.

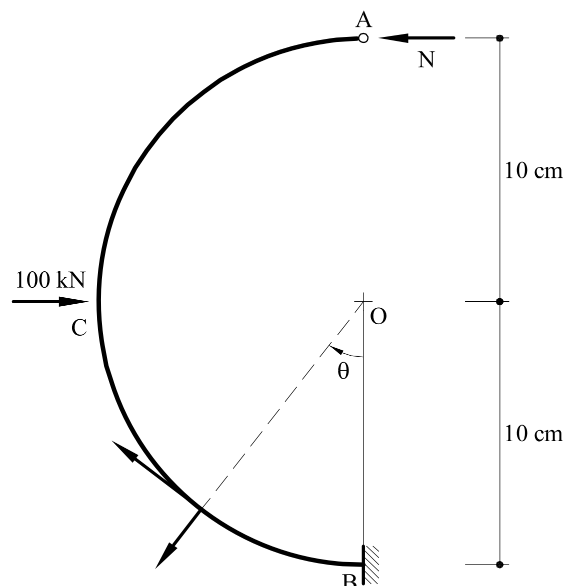


Fig. 2 Estructura cortada por la mitad

La ley de momentos flectores se escribe

$$M_f\Big|_C^A = N \times 10 \times (1+\cos\theta)$$

$$M_f\Big|_B^C = 10\,N(1+\cos\theta) - 100 \times 10\cos\theta$$

El movimiento horizontal de *A* se escribe

$$u_{1A} = 0 = \int_0^{\pi/2} M_f\Big|_B^C \times 10 \times (1+\cos\theta)\frac{10\,d\theta}{EI} + \int_{\pi/2}^{\pi} M_f\Big|_A^C \times 10 \times (1+\cos\theta)\frac{10\,d\theta}{EI} =$$

$$= \frac{500}{EI}(-357{,}08 + 9{,}42478\,N)$$

De donde se obtiene

$$N = \frac{357{,}08}{9{,}42478} = 37{,}89\,kN$$

Problema 11.63 *Utilizando las fórmulas de Navier-Bresse, hallar la reacción horizontal en el arco circular biapoyado de la figura 1.*

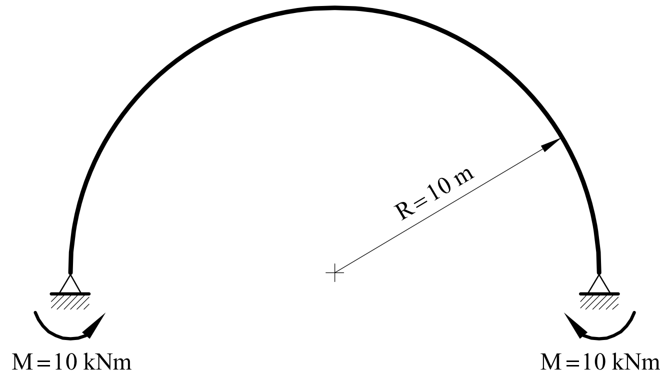


Fig. 1. Arco correspondiente al problema 11.63

Solución

Por simetría basta con considerar medio arco (figura 2). La incógnita hiperestática *H* se obtendrá a partir de anular el movimiento horizontal de *A*.

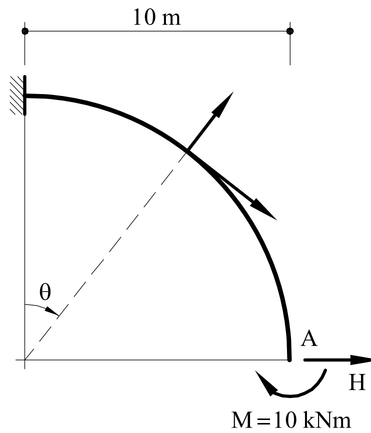


Fig. 2. Estructura a analizar

La ley de momentos flectores se escribe

$$M_f = -M + H\,R\cos\theta$$

El movimiento horizontal del punto *A* vale

$$\overrightarrow{u_A} = 0 = \int_0^{\pi/2} \frac{M_f}{EI} R\cos\theta\, R\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[-M + H\,R\cos\theta\right] R\cos\theta\; R\, d\theta =$$

$$= \frac{R^2}{4}\left(-4M + \pi\, R\, H\right) = 0$$

Con lo cual se obtiene

$$H = \frac{4M}{\pi R} = \frac{4}{\pi} = 1{,}273\, kN$$

Problema 11.64 *El anillo circular de la figura 1 tiene radio R y está sometido a dos momentos M. Hallar el valor del momento flector en el punto A*

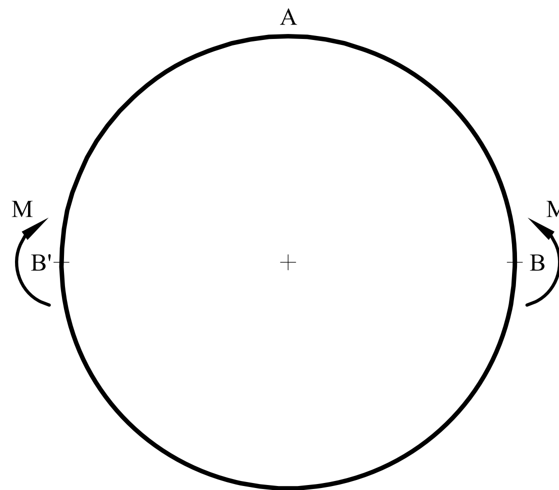


Fig.1 Estructura correspondiente al problema 11.64

Solución

Por consideraciones de simetría y antimetría, la estructura puede reducirse al cuarto de círculo que se representa en la figura 2

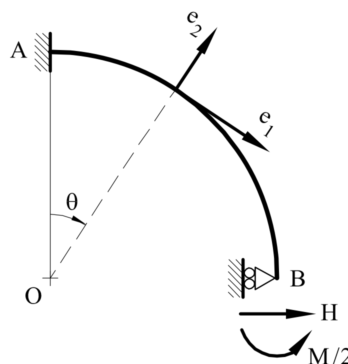


Fig. 2. Estructura después de realizados los cortes. Ejes locales

La reacción *H* se obtendrá imponiendo la condición de movimiento horizontal nulo en el punto *B*.

La ley de momentos flectores se escribe:

$$M_f = \frac{M}{2} + HR\cos\theta$$

Y derivando respecto a *H*

$$\frac{\partial M_f}{\partial H} = R\cos\theta$$

Por lo tanto, el movimiento horizontal del punto *A* se escribe:

$$u_A = 0 = \int_0^{\pi/2} M_f \frac{\partial M_f}{\partial H}\frac{Rd\theta}{EI} = \int_0^{\pi/2} (\frac{M}{2} + HR\cos\theta)R\cos\theta\frac{Rd\theta}{EI} = \frac{MR^2}{2} + HR^3\frac{\pi}{4}$$

De donde:

HR = - 0,63662 M

Con lo cual, el momento flector en el punto A valdrá

M_{fA} *= - 0,13662 M*

Problema 11.65 *Dada la estructura de inercia constante, que se representa en la figura 1, hallar las leyes de esfuerzos en el pilar*

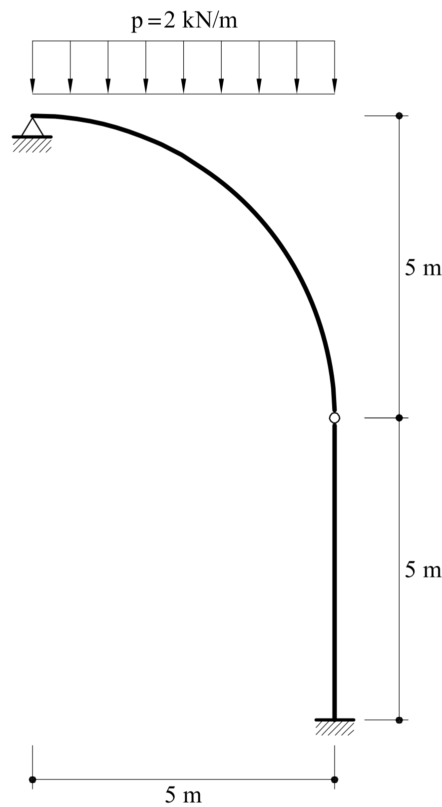


Fig.1 Estructura correspondiente al problema 11.65

Solución

Se corta por la rótula, separando el arco del pilar (ver la figura 2)

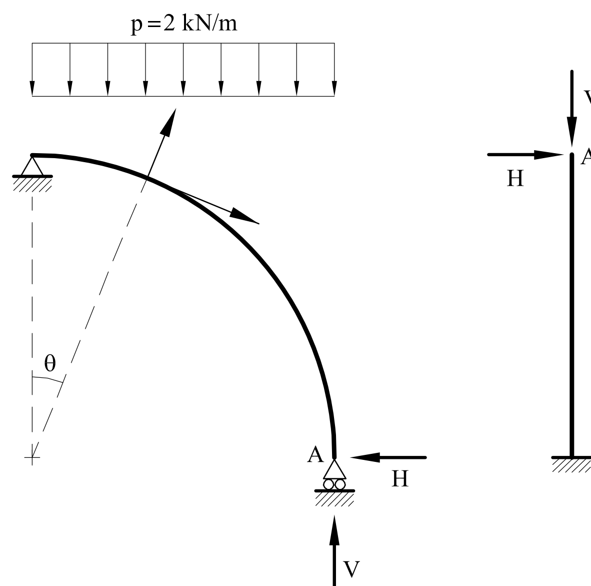


Fig.2 Descomposición de la estructura en arco y pilar

Por equilibrio en el arco:

$$V = H + 5$$

El valor de la fuerza H se obtendrá igualando el movimiento horizontal en el arco y en el pilar.

La ley de momentos flectores en el arco se escribe

$$M_f = 5V(1-\sin\theta) - 5H\cos\theta - \frac{2\left[5\times(1-\sin\theta)\right]^2}{2} = 5(H+5)(1-\sin\theta) - 5H\cos\theta -$$
$$-25(1-\sin\theta)^2$$

$$\frac{\partial M_f}{\partial H} = 5(1-\sin\theta) - 5\cos\theta$$

Aplicando el teorema de Castigliano se obtendrá el movimiento horizontal de A (positivo si hacia la izquierda)

$$u_A^a = \int_0^{\pi/2} M_f \frac{\partial M_f}{\partial H}\frac{5\,d\theta}{EI} = \frac{17{,}7H - 44{,}25}{EI}$$

En el pilar, el movimiento horizontal de A vale (positivo si hacia la izquierda):

$$u_A^P = -\frac{H\times 5^3}{3EI} = -\frac{41{,}67\,H}{EI}$$

Igualando ambos valores

$$H = 0{,}75\,kN$$

En la figura 3 pueden verse las leyes de esfuerzos en el pilar

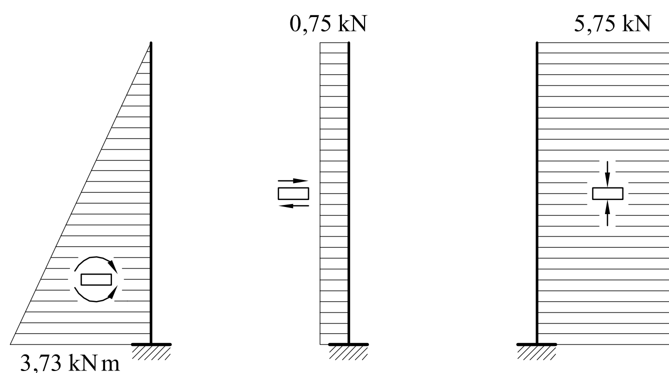


Fig.3. Leyes de esfuerzos: a) Momento flector. B) Esfuerzo cortante. C) Esfuerzo axil.

Problema 11.66 *En la estructura que se representa en la figura 1, hallar las reacciones en los apoyos*

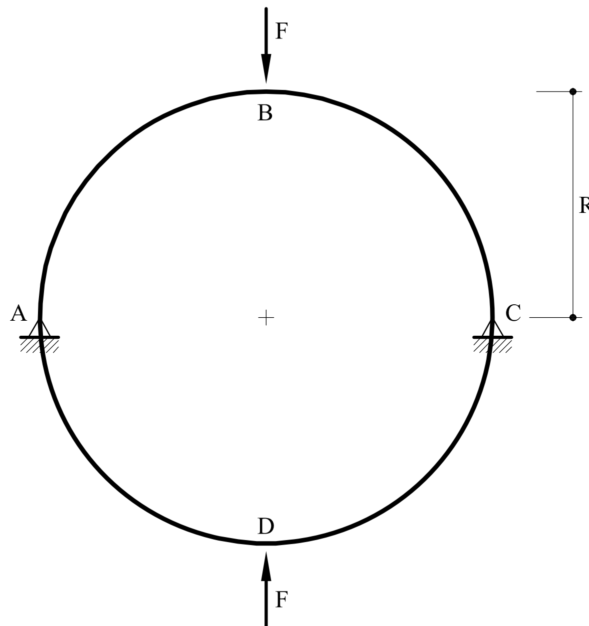


Fig.1 Estructura correspondiente al problema 11.66

Solución

Debido a la doble simetría, los giros en los puntos *A, B, C* y *D* son nulos. Si se corta la estructura por los ejes de simetría se obtendrá el arco representado en la figura 2

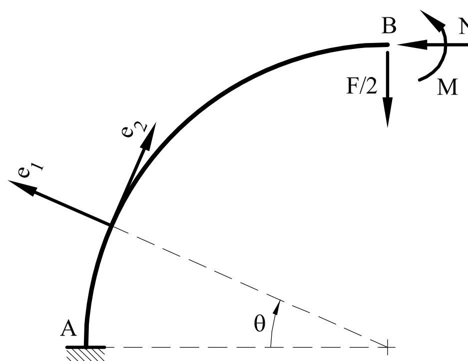


Fig.2 Cuarto de círculo

Nótese que las reacciones verticales en *A* y *C* serán nulas y que las reacciones horizontales valdrán 2*N*.

A partir de la figura 2, las leyes de momentos flectores se escriben

$$M_f = M + NR(1 - \sin\theta) - \frac{F}{2} R \cos\theta$$

Los valores de M y N se obtendrán imponiendo las condiciones de giro y desplazamiento horizontal nulos en el punto B.

Para aplicar el teorema de Castigliano, se deriva el momento flector respecto de M y de N

$$\frac{\partial M_f}{\partial M} = 1$$

$$\frac{\partial M_f}{\partial N} = R(1 - \sin\theta)$$

Con lo cual:

$$u_{1B} = 0 = \int_0^{\pi/2} M_f \frac{\partial M_f}{\partial N} \frac{R\,d\theta}{EI} = (0{,}5708\,M + 0{,}3562\,N\,R - 0{,}25\,F\,R)\frac{R^2}{EI}$$

$$\varphi_B = 0 = \int_0^{\pi/2} M_f \frac{\partial M_f}{\partial M} \frac{R\,d\theta}{EI} = (1{,}5708\,M + 0{,}5708\,N\,R - 0{,}5\,F\,R)\frac{R}{EI}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$M = 0{,}1515\,F\,R$$
$$N = 0{,}4591\,F$$

Con lo cual, las reacciones horizontales en A y C valen:

$$H_A = H_C = 2\,N = 0{,}9182\,F$$

Problema 11.67 *En el arco semicircular de radio a que se representa en la figura 1, hallar:*

- *Momento flector en el punto B*
- *Giro en el punto A*

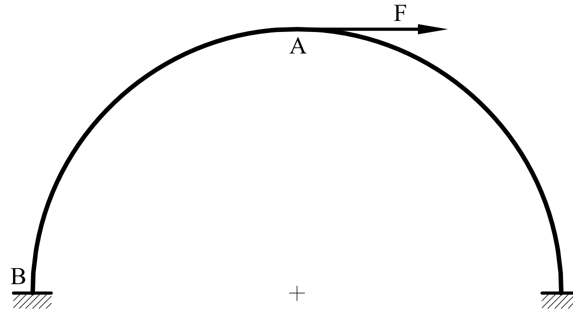


Fig.1 Arco correspondiente al problema 11.67

Solución

La estructura es antimétrica respecto a un eje vertical y puede considerarse únicamente la mitad (figura 2). La incógnita hiperestática R se obtendrá imponiendo la condición de desplazamiento vertical nulo en el punto *A*

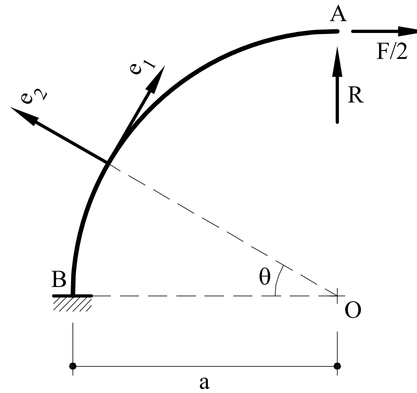


Fig.2 Estructura reducida

La ley de momentos flectores se escribe

$$M_f = R\,a\,\cos\theta - \frac{F}{2}a\left(1-\sin\theta\right)$$

El movimiento vertical de *A* es nulo:

$$E\,I\,\upsilon_A = 0 = \int_0^{\pi/2}\left[R\,a\,\cos\theta - \frac{F}{2}a\left(1-\sin\theta\right)\right]a\cos\theta\;a\;d\theta = R\frac{a^3\,\pi}{4} - \frac{F\,a^3}{4} = 0$$

Es decir:

$$R = 0{,}3183\,F$$

Con lo cual, el momento flector en *B* vale:

$$M_{fB} = a\,R - \frac{a\,F}{2} = 0{,}1817\;a\,F$$

Por otro lado, el giro del punto A valdrá

$$E\,I\,\varphi_A = \int_0^{\pi/2} \left[R\,a\;\;\cos\theta - \frac{F}{2}a\left(1-\sin\theta\right) \right] a\;d\,\theta = R\,a^2 - \frac{F\,a^2}{2}\left(-1 + \frac{\pi}{2} \right) = 0{,}0329\,a^2\;F$$

Problema 11.68 *Calcular la tensión inicial del tirante $A-A'$ del arco semicircular de la figura 1 para que al actuar la sobrecarga uniforme de intensidad p, el momento flector en la clave sea nulo.*

Datos: - Sección del arco $EI = constante$

-Sección del tirante $E\omega = 3\frac{EI}{R^2}$

No se considera la deformación por cortante ni axil en el arco.

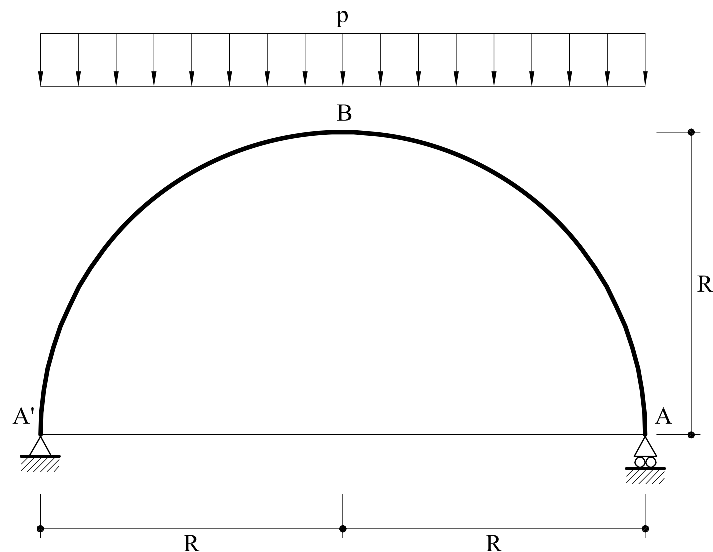


Fig. 1. Arco correspondiente al problema 11.68

Solución

Dada la simetría es suficiente considerar la mitad del arco (figura 2)

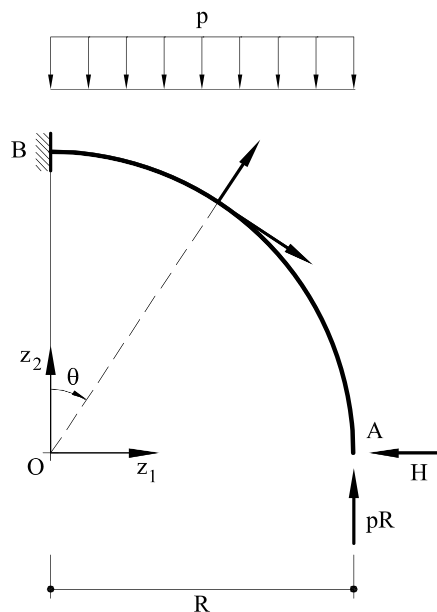


Fig. 2. Estructura a analizar

Cuando *H* sea igual al esfuerzo final del tirante $T_f \left(N = T_f\right)$, el momento en *B* debe ser nulo, es decir:

$$M_{fB} = pR^2 - T_f R - p\frac{R^2}{2} = 0$$

$$T_f = \frac{p\,R}{2}$$

Por otro lado, (y llamando T_i al esfuerzo inicial del tirante), al cargar la estructura con las cargas repartidas p, se producirá un incremento de esfuerzo de valor ΔT que podrá obtenerse compatibilizando el movimiento del punto *A* en el arco con el movimiento de A en el tirante.

Se verificará que:

$$T_i = T_f - \Delta T$$

En el arco de la figura 2, la ley de momentos flectores se escribe

$$M_f = p\,R^2(1-\sin\theta) - H\,R\cos\theta - p\frac{R^2}{2}(1-\sin\theta)^2$$

El movimiento horizontal del punto *A* vale:

$$u_{1A} = \int_0^{\pi/2} M_f\; R\cos\theta\;\frac{R\,d\theta}{EI} = \frac{0{,}3333\,pR^4 - 0{,}785398\,H\,R^3}{EI}$$

Si *H* es el incremento de esfuerzo en el tirante, puede sustituirse *H* por ΔT y compatibilizar u_{1A} con el movimiento del cable en *A*:

$$\frac{0{,}3333\,pR^4 - 0{,}785398\,\Delta T\,R^3}{EI} = \frac{\Delta T\,R}{E\omega}$$

Es decir:

$$\Delta T = \frac{0{,}3333\,pR}{0{,}785398 + 0{,}3333} = 0{,}298\,pR$$

con lo cual

$$T_i = p\frac{R}{2} - \Delta T = 0{,}5\,pR - 0{,}298\,pR = 0{,}202\,pR$$

♣**Problema 11.69** *La estructura de la figura 1 está formada por un círculo de radio a y un pilar. Bajo las cargas que se indican, determinar las leyes de momentos flectores.*

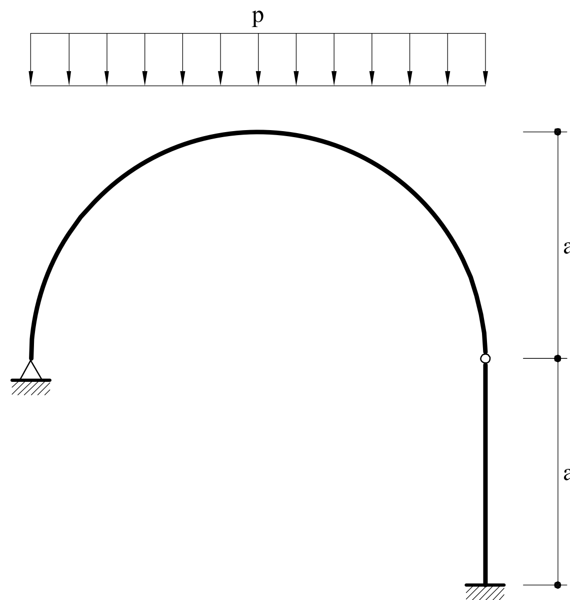


Fig. 1. Estructura correspondiente al problema 11.69

Solución

Se separa el arco del pilar (figura 2). Aparece una reacción hiperestática *H* cuyo valor se obtendrá compatibilizando el movimiento del arco con el del pilar.

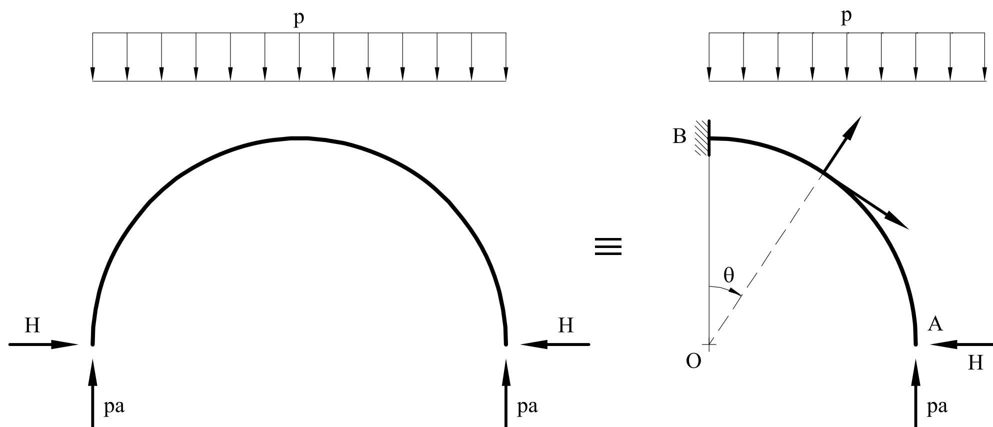


Fig. 2. Arco

La ley de momentos flectores, en el arco, se escribe

$$M_f = p\,a^2\left(1-\sin\theta\right) - H\,a\cos\theta - p\frac{a^2}{2}\left(1-\sin\theta\right)^2$$

La mitad del movimiento horizontal del punto *A* del arco vale

$$\frac{u_A}{2} = \frac{1}{EI}\int_0^{\pi/2} M_f\, a^2 \cos\theta\, d\theta = \frac{1}{EI}\left[\frac{p\,a^4}{3} - \frac{\pi\, a^3}{4} H\right] = \frac{a^3}{EI}\left(\frac{p\,a}{3} - \frac{\pi}{4} H\right)$$

Por otro lado para el pilar

$$u_\Delta = \frac{1}{3}\frac{H\,a^3}{EI}$$

Igualando:

$$\frac{H}{3} = 2\left(\frac{p\,a}{3} - \frac{\pi}{4} H\right)$$

$$H = 0{,}35\, p\,a$$

Problema 11.70 *La estructura que se representa en la figura 1 está compuesta por un arco circular de rigidez* EI *y por un tirante AA' de rigidez* $E\omega = EI/R^2$ *.Determinar el esfuerzo T en el tirante cuando en el punto A actúa la fuerza F. Se pide hallar el esfuerzo en el tirante.*

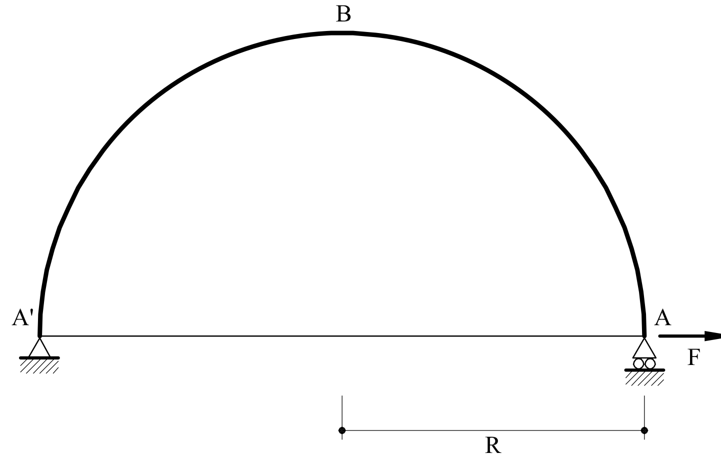


Fig. 1. Estructura correspondiente al problema 11.70

Solución

Dada la simetría es suficiente con analizar medio arco (figura 2)

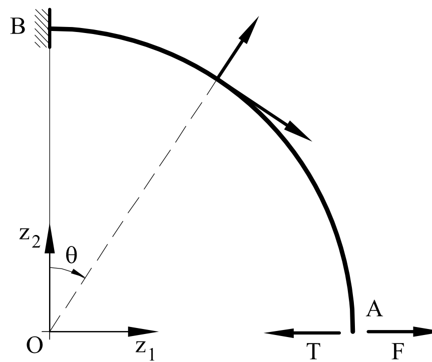


Fig. 2. Estructura a analizar. Ejes locales.

La ley de momentos flectores se escribe

$$M_f = (F - T) R \cos\theta$$

y el movimiento horizontal de *A*:

$$u_{1A} = \int_0^{\pi/2} M_f \, R\cos\theta \frac{R\,d\theta}{EI} = \frac{\pi}{4}\frac{(F-T)R^3}{EI}$$

Por otro lado:

$$u_{1A} = \frac{T\,R}{E\omega}$$

Igualando:

$$\frac{\pi}{4}\frac{\left(F-T\right)R^3}{EI} = \frac{T\,R}{E\,\omega}$$

y despejando T

$$T = 0{,}44\,F$$

Problema 11.71 *La estructura de la figura 1 está compuesta por un arco parabólico de eje vertical y dos soportes. Sobre el arco actúa una carga uniformemente repartida por unidad de proyección horizontal. El arco está asimismo sometido a una variación térmica de valor t. Se desea saber el valor de dicha variación térmica para que el arco permanezca antifunicular.*

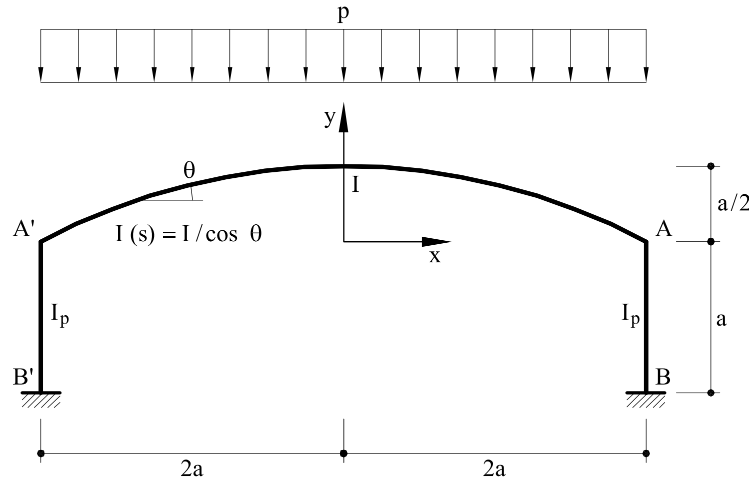


Fig.1. Estructura correspondiente al problema 11.71

Solución

La ecuación del arco se escribe

$$y = \frac{a}{2}\left[1 - \left(\frac{x}{2a}\right)^2\right]$$

Para que el arco sea antifunicular es preciso que en cada punto del mismo sólo exista esfuerzo axil. Por lo tanto, si se corta por el punto *A* el único esfuerzo que existe es tangente al arco (figura 2), y como su componente vertical, por equilibrio, vale $2pa$, su componente horizontal debe valer

$$H = \frac{V}{\tan\alpha} = \frac{2pa}{1/2} = 4pa$$

Por equilibrio, en el pilar *AB* debe actuar esta fuerza *F*, que dará un movimiento horizontal de valor:

$$u_A = \frac{H\,a^3}{3EI_p} = \frac{4pa^4}{3EI_p}$$

Este movimiento horizontal debe estar producido por la variación térmica, es decir

$$u_A = 2a\,\alpha\,t$$

Igualando:

$$t = \frac{2pa^3}{3EI_p\alpha}$$

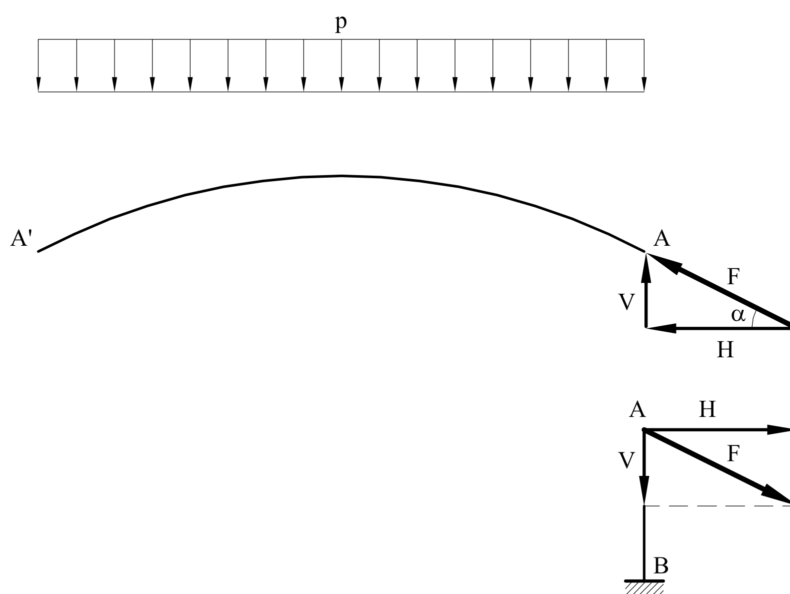


Fig. 2. Fuerzas en el nudo A

Problema 11.72 *El arco de la estructura de la figura 1 es parabólico de eje vertical. La inercia en la clave es* I_o *mientras que en un punto cualquiera vale* $I(s) = I_o / \cos\theta$ *siendo* θ *el ángulo que forma la directriz del arco con la horizontal. La inercia de los dos pilares es la misma e igual a* $I = I_o / \cos\theta_A$.

Determinar las leyes de esfuerzos en toda la estructura.

Determinar asimismo el giro y el desplazamiento horizontal del punto B.

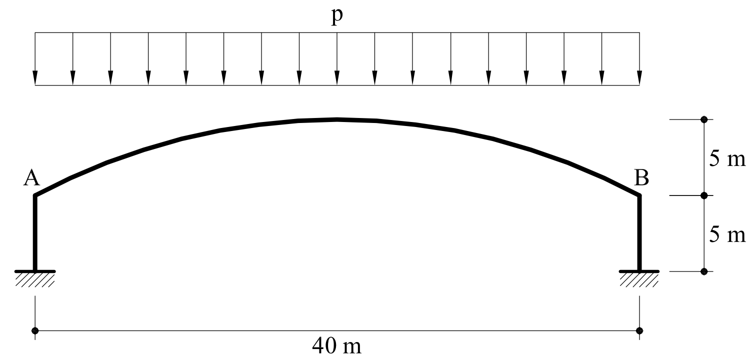


Fig. 1. Estructura correspondiente al problema 11.72

Solución

Se corta por el punto B, separando el arco de los pilares (fig.2)

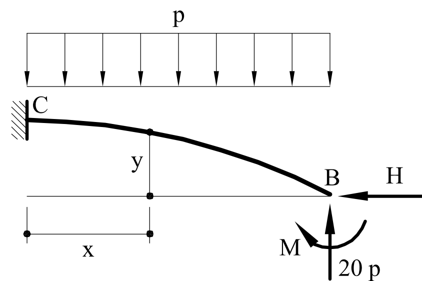


Fig. 2. Arco

La ley de momentos se escribe

$$M_f(x) = (20 - x)20p - p\frac{(20 - x)^2}{2} - Hy - M = \frac{20^2 - x^2}{2}p - H\left(5 - \frac{x^2}{80}\right) - M$$

El giro en B vale

$$EI\,\varphi_B = \int_0^{20}\left[\frac{20^2 - x^2}{2} - H\left(5 - \frac{x^2}{80}\right) - M\right]dx = \left(200p - 5H - M\right)20 +$$

$$+\left(-\frac{p}{2} + \frac{H}{80}\right)\frac{20^3}{3} = \frac{8\,000}{3}p - \frac{200}{3}H - 20M$$

y el desplazamiento en B

$$EI\,\delta = \int_0^{20} M(x)\,y\,dx = \int_0^{20}\left[\left(\frac{20^2 - x^2}{2}p - H\left(5 - \frac{x^2}{80}\right) - M\right)\left(5 - \frac{x^2}{80}\right)\right]dx =$$

$$= \frac{32\,000}{3}p - \frac{800}{3}H - \frac{200}{3}M$$

Seguidamente, es preciso hallar estos mismos giros y desplazamientos en el extremo B del pilar

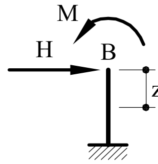


Fig. 3. Pilar

La ley de momentos se escribe:

$$M_f(z) = M - Hz$$

$$EI_A\varphi_B = \int_0^5 (M - Hz)dz = 5M - \frac{25H}{2}$$

$$EI_A\delta = -\int_0^5 (M - Hz)zdz = -\frac{25}{2}M + \frac{125}{3}H$$

Igualando ambas expresiones de φ_B y δ, habida cuenta de que $I_A = I_B = \frac{\sqrt{5}}{2}I$ queda:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{8\,000}{3}p - \frac{200}{3}H - 20M = \frac{2\sqrt{5}}{5}\left(5M - \frac{25H}{2}\right) \\ &\frac{32\,000}{3}p - \frac{800}{3}H - \frac{200}{3}M = \frac{2\sqrt{5}}{5}\left(-\frac{25}{2}M + \frac{125}{3}H\right) \end{aligned}\right\}$$

de donde

$$H = 26\,p$$

$$M = 50\,p$$

Con estos dos valores se dibuja sin ninguna dificultad las leyes de *N, M, Q*.

Problema 11.73 *La pieza curva, de directriz circular de 4m. de radio, representada en la figura 1, tiene sección constante de* $EI = 2\times 10^5\, kN\, m^2$.

El apoyo de la derecha A, tiene un corrimiento horizontal, hacia la derecha de valor $\delta_A = 8\,cm$ *mientras que el apoyo izquierdo, tiene un corrimiento horizontal, hacia la izquierda de valor* $\delta_B = 4\,cm$.

Se pide:

1. *Leyes de esfuerzos referidas a la directriz de la pieza.*
2. *Movimientos de la clave C.*

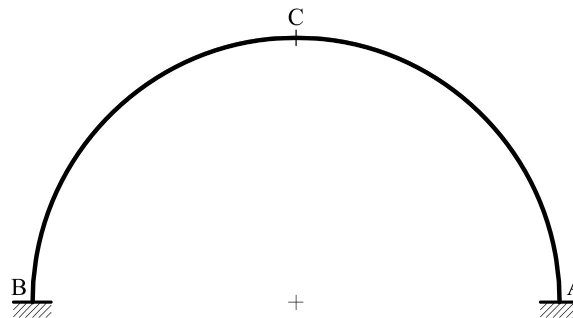


Fig. 1. Arco correspondiente al problema 11.73

Solución

El movimiento relativo del apoyo A respecto al B vale $\Delta_{AB} = \delta_A + \delta_B = 8 + 4 = 12\,cm$. Por lo tanto, y como la estructura es simétrica, puede realizarse la descomposición que se indica en la figura 2. Las incógnitas hiperestáticas *H* y *M* se obtendrán imponiendo las condiciones:

- Giro en *C* igual a cero.
- Movimiento horizontal de *C* igual a $\frac{\Delta_{AB}}{2} = 6\,cm$

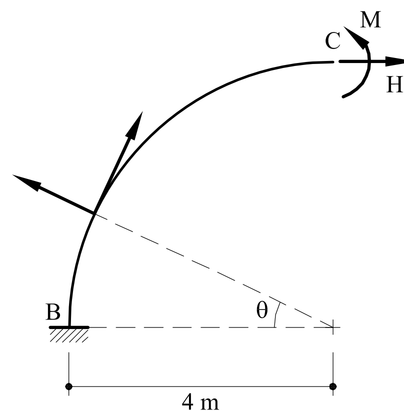


Fig. 2. Descomposición de la estructura original

La ley de momentos flectores se escribe

$$M_f = M - H \times 4 \times (1 - \sin\theta)$$

El giro en C es nulo:

$$\varphi_C = 0 = \int_0^{\pi/2} M_f \times 4 \frac{d\theta}{EI} = \frac{1}{EI}\left[(16 - 8\pi)H + 2\pi M\right]$$

El desplazamiento horizontal de C vale $0{,}06\,m$:

$$u_c = 0{,}06 = -\frac{1}{EI}\int_0^{\pi/L} M_f \times 4 \times (1 - \sin\theta) 4 d\theta = \frac{8}{EI}\left[-M(\pi - 2) - H(16 - 6\pi)\right]$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$H = 1\,260 \;\; kN$$

$$M = 1\,831{,}12 \;\; kNm$$

Problema 11.74 *En la estructura que se representa en la figura 1 la pieza curva B'CB es un semicírculo de radio* $R = 5\ metros$ *. Todas las piezas tienen la misma inercia. Bajo las cargas que se indican, determinar:*

- *Reacciones y leyes de esfuerzos en todas las piezas rectas.*
- *Valor numérico del Momento Flector en A y del esfuerzo cortante en la pieza AB.*

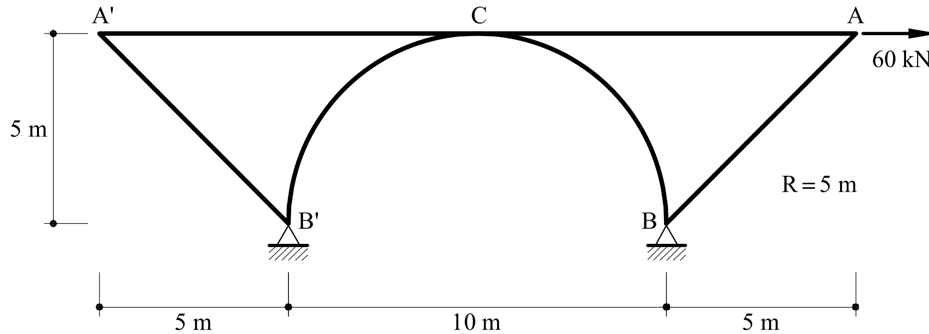


Fig. 1. Estructura correspondiente al problema 11.74

NOTAS:
- *No se considerará la deformación por esfuerzo axil ni por esfuerzo cortante.*
- *En los puntos B y B' las piezas están articuladas entre sí.*

Solución

La estructura puede descomponerse en su parte simétrica (que únicamente provoca una tracción de $30\,kN$ en el dintel) y en su parte antimétrica (figura 2). Esta última puede simplificarse como se indica en la figura 2.

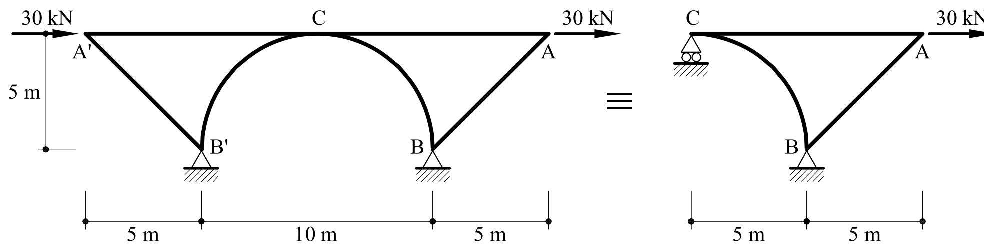


Fig. 2. Estructura antimétrica

A partir de la estructura simplificada de la figura 2 se separa el arco del resto (fig. 3). Las incógnitas *H* y *M* se obtendrán de imponer igualdad de giros y desplazamiento horizontal.

a) *Estudio del arco*

Por equilibrio:

$$R_c^c = \frac{M}{R} - H = \frac{M}{5} - H$$

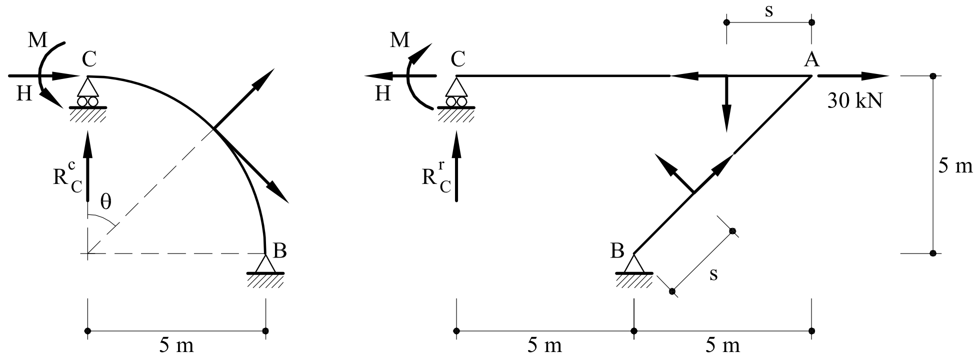


Fig. 3. Separación del arco del resto de la estructura

La ley de flectores se escribe

$$M_f = -M + HR(1-\cos\theta) + R_c^c\, R\sin\theta = -M(1-\sin\theta) - 5H(\sin\theta + \cos\theta - 1)$$

$$\frac{\partial M_f}{\partial M} = -(1-\sin\theta)$$

$$\frac{\partial M_f}{\partial H} = -5(\sin\theta + \cos\theta - 1)$$

El giro en C vale:

$$EI\,\varphi_c = \int_0^{\pi/2} M_f \frac{\partial M_f}{\partial M} 5\,d\theta = 1{,}781M + 3{,}59514H$$

y el desplazamiento horizontal de C:

$$EI\,u_c = \int_0^{\pi/2} M_f \frac{\partial M_f}{\partial H} 5\,d\theta = 3{,}59514M + 17{,}6991H$$

b) *Piezas rectas*

Por equilibrio:

$$R_c^r = -\frac{M}{5} + H - 30$$

La ley de momentos flectores se escribe:

$$M_f\Big|_A^C = -M - (10-s)R_c^r = M - \frac{M}{5}s - (10-s)H - 6s + 300$$

$$\frac{\partial M_f\Big|_A^C}{\partial M} = 1 - \frac{s}{5}$$

$$\frac{\partial M_f\Big|_A^C}{\partial H} = s - 10$$

$$M_f\Big|_A^B = (H - 30)\left(5 - \frac{s\sqrt{2}}{2}\right) - M - R_c^r\left(5 + s\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$
$$= 42{,}4264\,s - 1{,}41421\,H\,s + 0{,}141421\,M\,s$$

$$\frac{\partial M_f\Big|_A^B}{\partial M} = 0{,}141421\,s$$

$$\frac{\partial M_f\Big|_A^B}{\partial H} = -1{,}41421\,s$$

El giro de C vale:

$$EI\,\varphi_C = \int_0^{10} M_f\Big|_A^C \frac{\partial M_f\Big|_A^C}{\partial M} ds + \int_0^{5\sqrt{2}} M_f\Big|_A^B \frac{\partial M_f\Big|_A^B}{\partial M} ds =$$
$$= 1\,207{,}11 - 40{,}2369\,H + 5{,}69036\,M$$

El desplazamiento horizontal de C:

$$EI\,u_c = \int_0^{10} M_f\Big|_A^C \frac{\partial M_f\Big|_A^C}{\partial H} ds + \int_0^{5\sqrt{2}} M_f\Big|_A^B \frac{\partial M_f\Big|_A^B}{\partial H} ds =$$
$$= -17\,071{,}05 + 569{,}036\,H - 40{,}2369\,M$$

Con lo cual, las condiciones de compatibilidad se escriben

$$-1{,}781\,M - 3{,}59514\,H = 5{,}69036\,M - 40{,}2369\,H + 1\,207{,}11$$

$$-3{,}59514\,M - 17{,}6991\,H = -40{,}2369\,M + 569{,}036\,H - 17\,071{,}05$$

y resolviendo el sistema:

$$H = 27{,}40\,kN$$

$$M = -27{,}2\,kN$$

Problema 11.75 *Dada la estructura representada en la figura 1, determinar el valor del momento flector en A y C así como el esfuerzo cortante en B.*

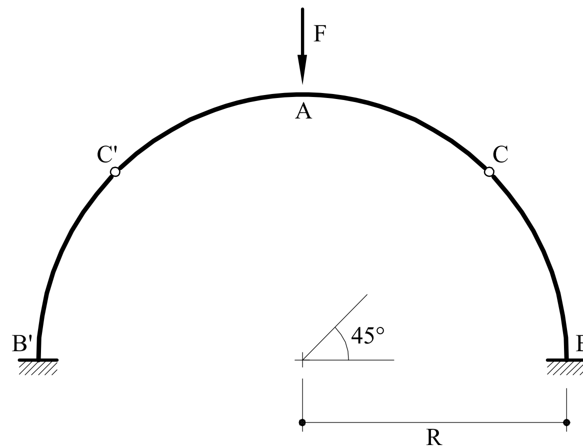


Fig. 1. Estructura correspondiente al problema 11.75

Solución

Se corta la estructura por *C* y *C'* (figura 2). La incógnita hiperestática *H* se obtendrá imponiendo la igualdad de movimientos en *C* (o en *C'*) a ambos labios del corte.

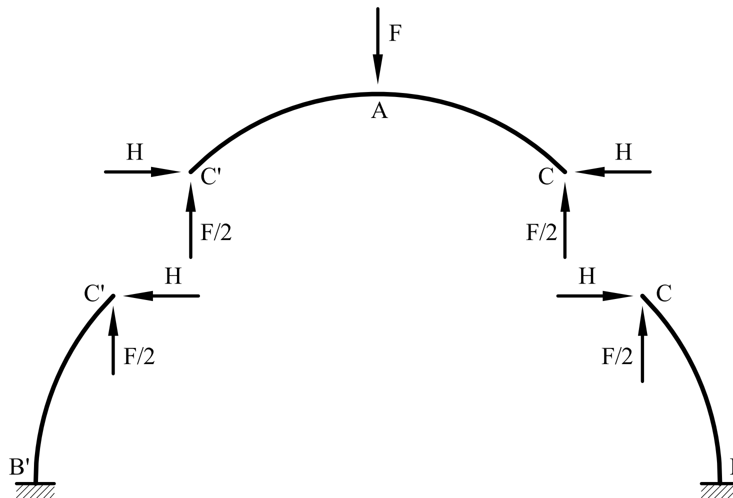


Fig. 2. Descomposición de la estructura primitiva

- *Movimiento horizontal del punto C de la pieza C'AC*

Por simetría respecto a un eje vertical que pasa por *A* basta considerar la mitad (figura 3 a)

La ley de momentos flectores se escribe

$$M_f = \frac{F\,R}{2}(\sin 45 - \sin\theta) - H\,R(\cos\theta - \cos 45)$$

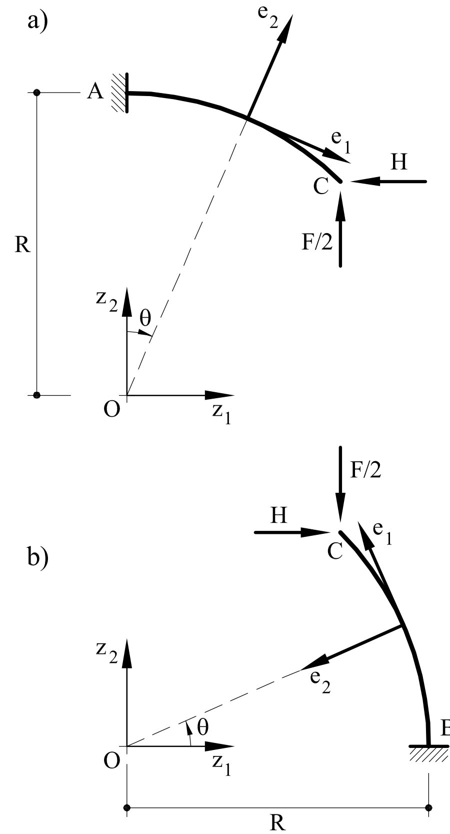


Fig. 3. Piezas AC y CB

Por lo que el movimiento horizontal de C valdrá

$$u_c = \frac{1}{EI}\int_0^{\pi/4}\left[\frac{F\,R}{2}\left(\sin 45 - \sin\theta\right) - H\,R\left(\cos\theta - \cos 45\right)\right]R\left(\cos\theta - \cos 45\right)R\,d\theta =$$

$$= 0{,}0322\frac{F\,R^3}{EI} - 0{,}0354\frac{H\,R^3}{EI}$$

- *Movimiento horizontal del punto C de la pieza CB.*

La ley de momentos flectores se escribe

$$M_f = \frac{F\,R}{2}\left(\cos\theta - \cos 45\right) - H\,R\left(\sin 45 - \sin\theta\right)$$

con lo que

$$u_c = -\frac{1}{EI}\int_0^{\pi/4}\left[\frac{F\,R}{2}\left(\cos\theta - \cos 45\right) - H\,R\left(\sin 45 - \sin\theta\right)\right]R\left(\sin 45 - \sin\theta\right)R\,d\theta =$$

$$= -0{,}0322\frac{F\,R^3}{EI} + 0{,}1212\frac{H\,R^3}{EI}$$

Igualando:

$$H = 0{,}411\,F$$

El momento flector en A valdrá

$$\left(M_f\right)_A = 0{,}474\,F\,R$$

y en el punto B

$$\left(M_f\right)_B = -0{,}144\,F\,R$$

El cortante en C se obtendrá proyectando la suma vectorial de H más $F/2$ sobre la tangente a la directriz de la pieza

$$Q_c = 0{,}0629\,F$$

Problema 11.76 *En la estructura que se representa en la figura 1 el arco es una parábola de segundo grado de eje vertical. La inercia de dicho arco vale* $I(s)=I_0/\cos\theta$ *siendo* I_0 *la inercia en la clave y* θ *el ángulo que forma la directriz con la horizontal.*
Hallar las leyes de momentos flectores.

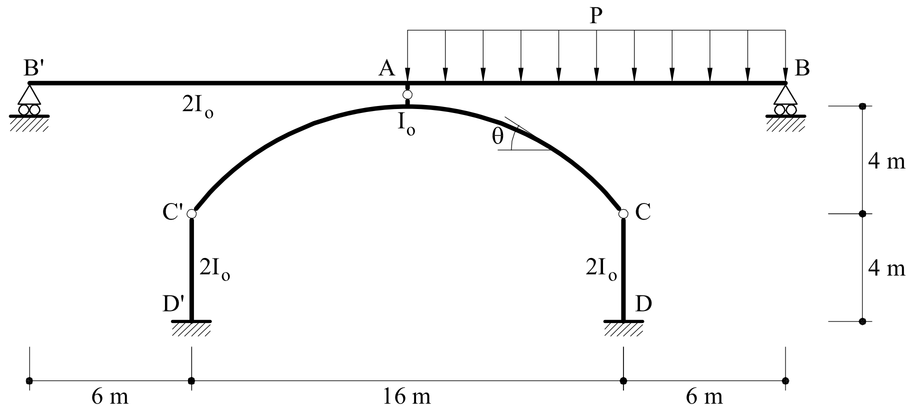


Fig. 1. Estructura correspondiente al problema propuesto 11.76

Solución

La rótula existente entre el arco y la viga *BAB'* únicamente transmite una fuerza vertical. La estructura se puede descomponer, por tanto, según se indica en la figura 2.

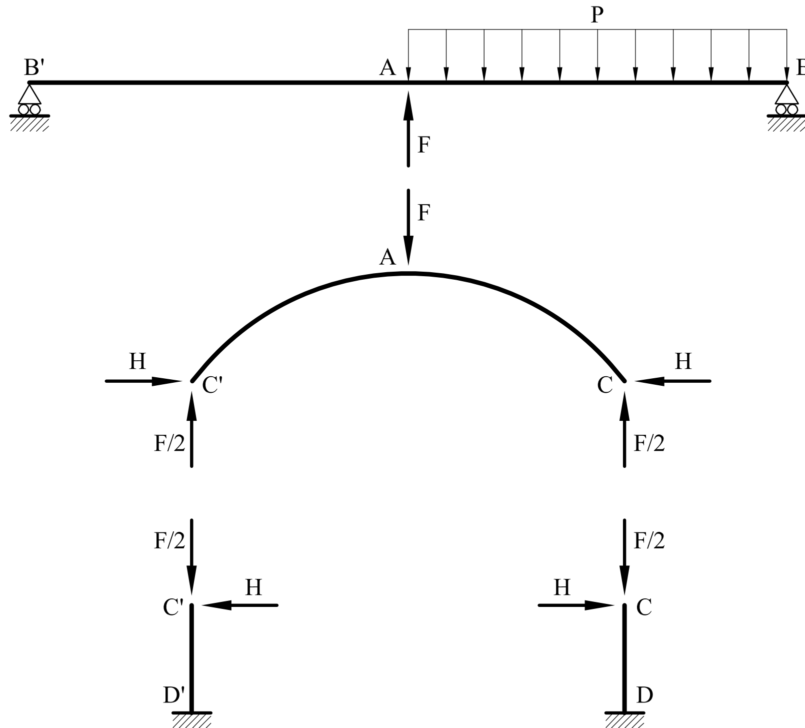


Fig. 2. Descomposición de la estructura

Las dos incógnitas hiperestáticas *F* y *H* se obtendrán igualando el movimiento vertical en *A* y el movimiento horizontal en *C*, respectivamente

- *Movimiento vertical de A de la pieza BAB'*

$$v_A = 2\,000{,}83\frac{p}{EI_0} - 228{,}67\frac{F}{EI_0}$$

- *Movimiento vertical de A y horizontal de C en la pieza C A C'.*

  Utilizando las fórmulas de Navier-Bresse, y teniendo en cuenta que el movimiento vertical de *A* es igual al movimiento vertical de *C* si se considera *A* fijo

$$v_A = -106{,}67\frac{H}{EI_0} + 85{,}33\frac{F}{EI_0}$$

$$u_C = -68{,}27\frac{H}{EI_0} + 53{,}33\frac{F}{EI_0}$$

- *Movimiento horizontal en C de la barra CD*

$$u_C = \frac{H \times 4^3}{3 \times E2I_0} = 10{,}667\frac{H}{EI_0}$$

Igualando los movimientos:

$$-106{,}67\,H + 314\,F = 2\,000{,}83\,p$$

$$-78{,}94\,H + 53{,}33\,F = 0$$

Resolviendo el sistema

$$H = 5{,}59\,p$$

$$F = 8{,}27\,p$$

En la figura 3 se dibuja la ley de momentos flectores

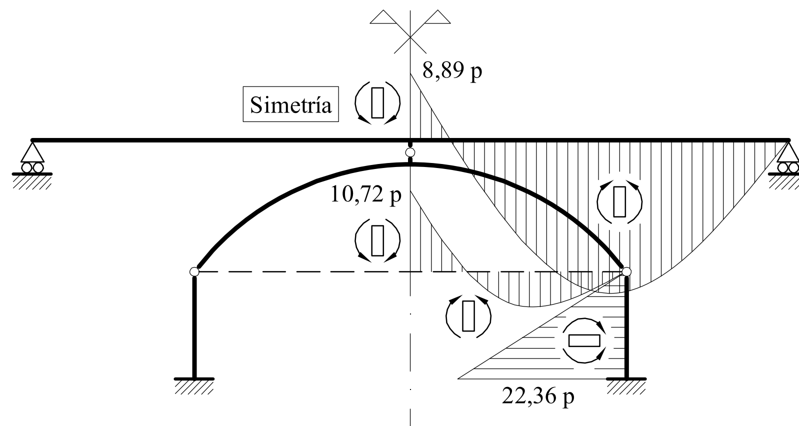


Fig. 3 Ley de momentos flectores. La ley en el arco se dibuja sobre la cuerda CC'

Problema 11.77 *Se considera la misma estructura propuesta en el problema 11.76, sometida a un descenso del apoyo D de valor* δ *. Determinar la ley de momentos flectores.*

Solución

Al ser la estructura simétrica de forma, se puede descomponer en simétrica y antimétrica:

- *Estructura simétrica*
  La estructura tendrá un descenso de apoyo $\delta/2$ en *D* y un descenso $\delta/2$ en *D'*.

- *Estructura antimétrica*
  La estructura tendrá un descenso de apoyo $\delta/2$ en *D* y un levantamiento de apoyo $\delta/2$ en *D'*. En este caso no se producen esfuerzos.

- *Resolución de la estructura simétrica*
  En la figura 1 puede verse el esquema de desplazamientos de la estructura (el valor de v es incógnita) y en la figura 2 el esquema de fuerzas.

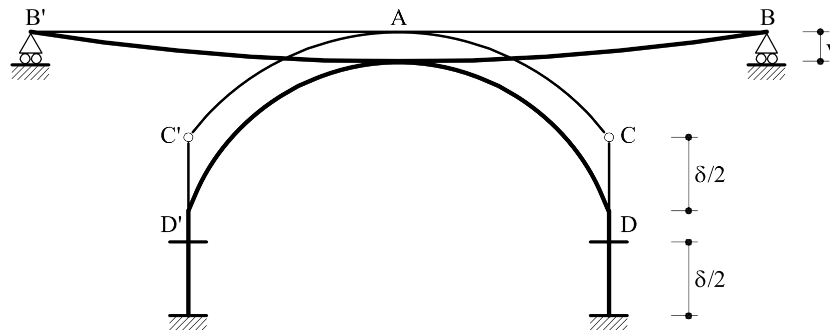


Fig. 1. Esquema de movimientos

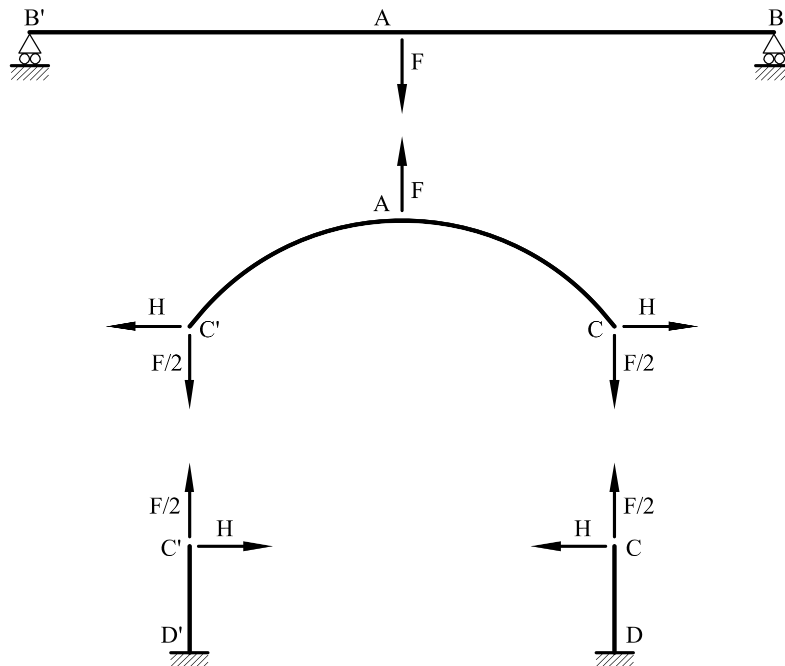


Fig. 2. Esquema de fuerzas

El movimiento vertical v en la viga *BAB'* vale

$$v = 228{,}67 \frac{F}{EI_0} \tag{a}$$

El movimiento vertical del punto *C* respecto al punto *A* en el arco valdrá $\delta/2 - v$ y se escribirá en función de *F* y *H*.

$$\frac{\delta}{2} - v = -106{,}67 \frac{H}{EI_0} + 85{,}33 \frac{F}{EI_0} \tag{b}$$

Introduciendo en (b) el valor de v dado por (a) se obtiene la primera ecuación.

$$-106{,}67 \frac{H}{EI_0} + 314 \frac{F}{EI_0} = \delta/2 \tag{c}$$

La segunda ecuación proviene de igualar movimientos horizontales en *C*. De acuerdo con el problema 11.56 dicha ecuación se escribe

$$-78{,}94\, H + 53{,}33\, F = 0 \tag{d}$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (c) y (d)

$$H = 0{,}0014\, EI_0 \delta$$

$$F = 0{,}00207\, EI_0 \delta$$

A partir de estos resultados las leyes de esfuerzos se obtienen como anteriormente.

Problema 11.78 *En la estructura que se representa en la figura 1 la curva representa una parábola de segundo grado de eje vertical. Se desea obtener el momento flector en la clave del arco.*

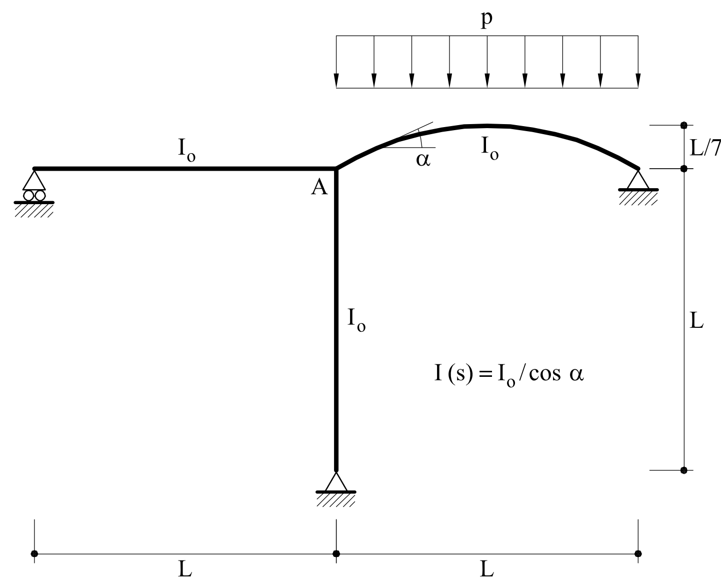


Fig. 1. Estructura correspondiente al problema 11.78

Solución

Se separa el arco de las piezas rectas (figura 2)

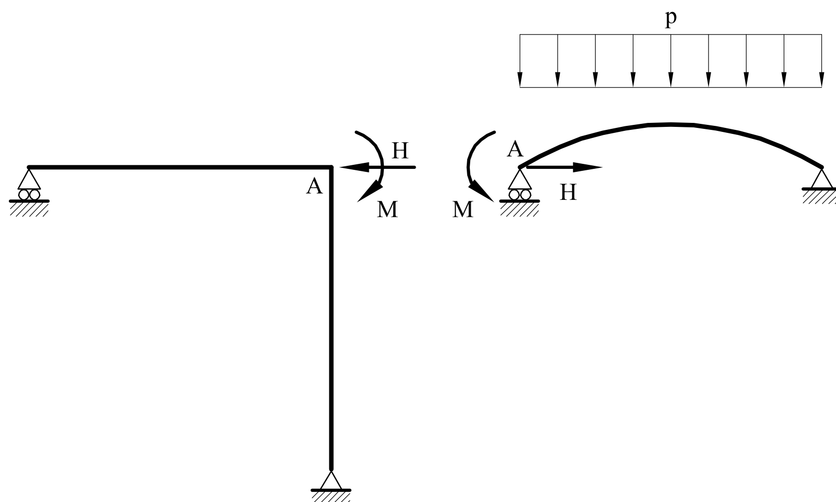


Fig. 2. Separación del arco del resto de la estructura

Los valores de las incógnitas hiperestáticas *H* y *M* se obtendrán de igualar el giro y el desplazamiento horizontal del punto *A*.

a) *Estudio del arco*
   Por cualquiera de los métodos de cálculo de movimientos puede obtenerse que:

   - Giro del punto *A*

$$EI_0\varphi_A = -\frac{p\,L^3}{24\,EI_0} + \frac{M\,L}{3\,EI_0} + \frac{H\,L^2}{21\,EI_0}$$

- Desplazamiento horizontal del punto A

$$EI_0\,u_A = -\frac{p\,L^4}{105\,EI_0} + \frac{M\,L^2}{21\,EI_0} + \frac{8\,H\,L^3}{735\,EI_0}$$

b) Estudio de las piezas rectas

- El giro en A vale:

$$\varphi_A = \frac{(-M + H\,L)L}{3\,EI_0}$$

- El movimiento horizontal de A vale:

$$EI_0\,u_A = -\frac{M\,L^2}{3\,EI_0} + \frac{2H\,L^3}{3EI_0}$$

Igualando se obtienen los valores de H y M

$$M = 0{,}08363\,p\,L^2$$

$$H = 0{,}04932\,p\,H$$

El momento en la clave del arco vale:

$$M_C = \frac{p\,L^2}{8} - \frac{M}{2} - H\frac{L}{7} = 0{,}0761\,p\,L^2$$

Problema 11.79 *En el anillo circular de radio R, que se representa en la figura 1, hallar el momento flector en los puntos A y B, así como el acercamiento de los puntos A y A'.*

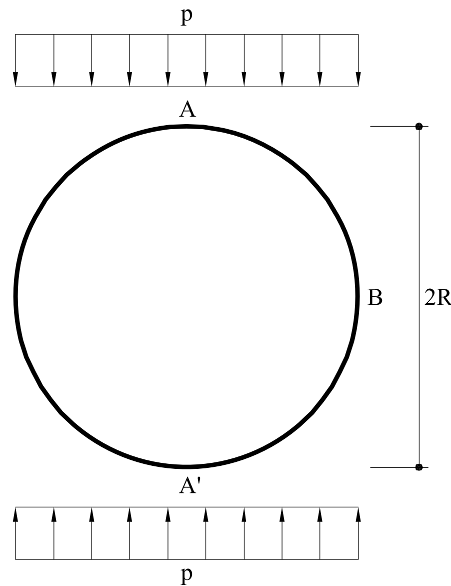


Fig. 1. Anillo correspondiente al problema 11.79

Solución

Al ser el anillo simétrico respecto a un eje horizontal y respecto a un eje vertical, los giros en *A* y *B* (y también en *A'*) serán nulos. También será nulo el esfuerzo cortante. Se puede, por lo tanto, considerar únicamente un cuarto de círculo (ver figura 2). La incógnita será el momento M_B.

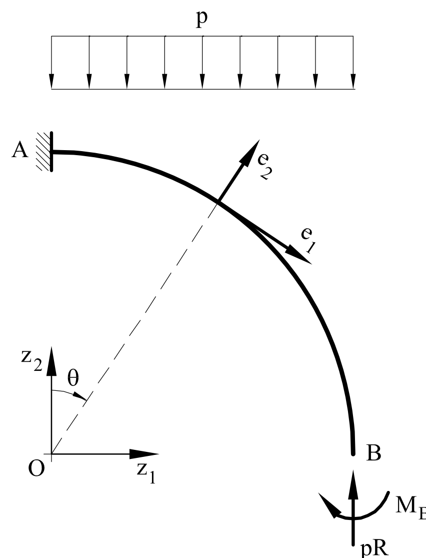


Fig. 2. Reducción de la estructura propuesta

El valor del momento M_B se obtendrá imponiendo la condición de que el giro en *B* sea cero. Para ello se utilizarán las fórmulas de Navier-Bresse.

La ley de momentos flectores se escribe

$$M_f = -M_B + pR^2\left(1-\sin\theta\right) - p\frac{R^2}{2}\left(1-\sin\theta\right)^2$$

El giro en *B* valdrá

$$\varphi_B = 0 = \frac{1}{EI}\int_0^{\pi/2} M_f\, R\, d\theta = \frac{R}{EI}\left(-1{,}5708\, M_B + 0{,}3927\, pR^2\right)$$

$$M_B = 0{,}25\, pR^2$$

y también

$$\left(M_f\right)_A = 0{,}25\, pR^2$$

El acercamiento entre *A* y *A'* será el doble del movimiento vertical del punto *B* en el arco de la figura 2, es decir

$$\Delta = \frac{2}{EI}\int_0^{\pi/2} M_f\left(R - R\sin\theta\right) R\, d\theta = 0{,}1667\,\frac{p\,R^4}{EI}$$

Problema 11.80 *En la estructura de la figura 1, todas las piezas tienen la misma inercia. Determinar, bajo las cargas que se indica, las leyes de esfuerzos.*

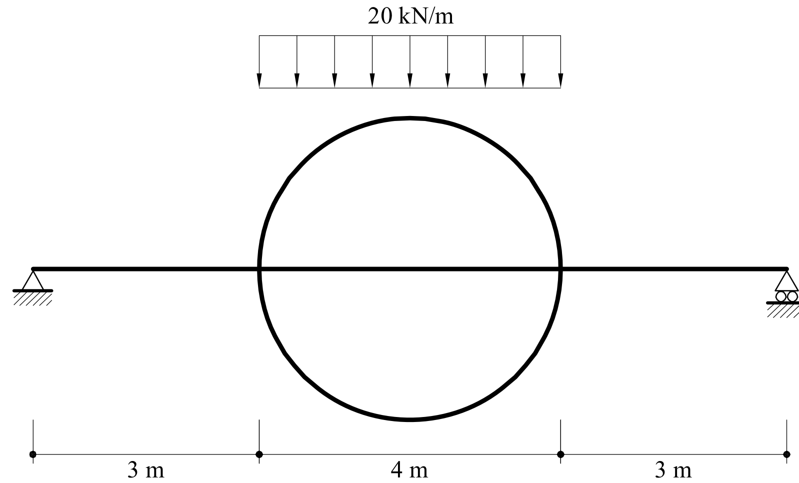


Fig. 1. Estructura correspondiente al problema 11.80

Solución

Dado que los apoyos son isostáticos puede considerarse únicamente la parte de la estructura que se indica en la figura 2. A su vez, dicha estructura puede descomponerse en su parte simétrica y en la antimétrica.

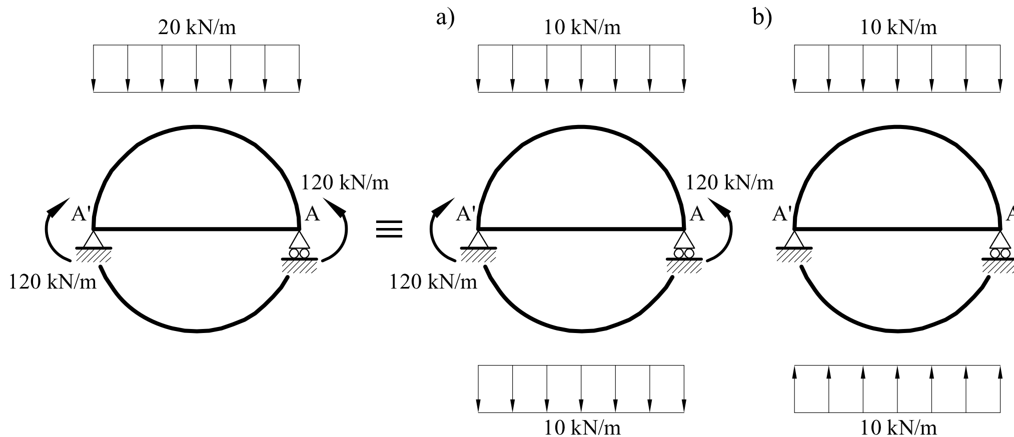


Fig. 2. Descomposición en simétrica y antimétrica: a) Parte antimétrica. b) Parte simétrica.

a) Estructura antimétrica

La estructura antimétrica puede simplificarse cortando por un eje horizontal (figura 3). La estructura resultante puede cortarse tal como se indica también en la figura 3.

En el arco, la ley de momentos flectores se escribe

$$M_f = 20 \times 2 \times (1 - \sin\theta) + M - 2H\cos\theta - \frac{10}{2} \times 2^2 \times (1 - \sin\theta)^2$$

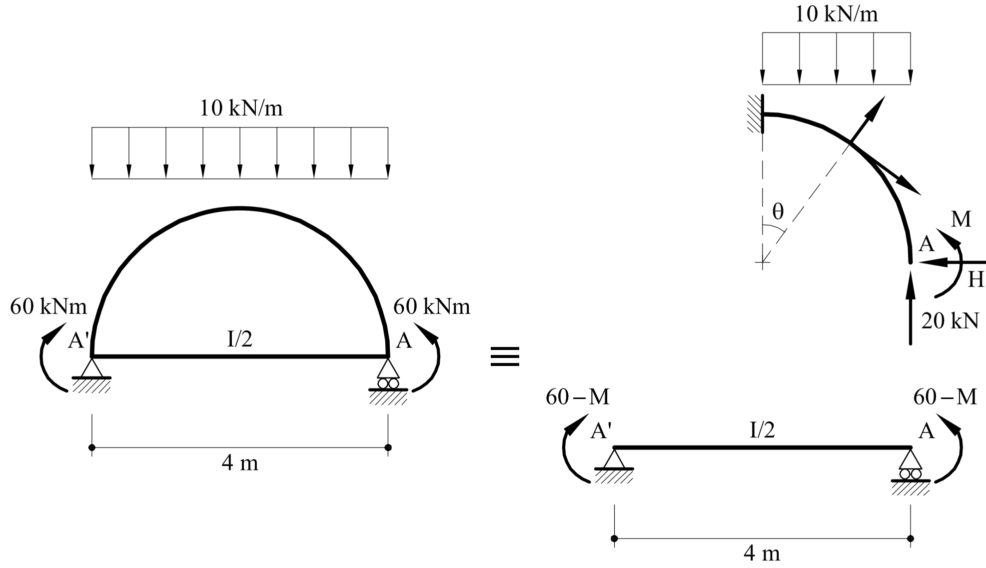


Fig. 3. Descomposición de la estructura antimétrica

El giro de A vale

$$EI\,\varphi_A = \int_0^{\pi/2} M_f \; 2d\theta = \pi M - 4H + 10\pi$$

El desplazamiento horizontal de A debe ser nulo, y vale

$$EI\,u_A = \int_0^{\pi/2} M_f \times 2 \times \cos\theta \times 2d\theta = 4M - 2\pi H + \frac{160}{3} = 0$$

lo cual proporciona la primera ecuación.

El giro de A en la viga AA' vale:

$$\varphi_A = \frac{(60 - M)\times 4}{3E(I/2)} = \frac{8}{3EI}(60 - M)$$

Igualando se obtiene la segunda ecuación

$$5{,}808M - 4H = 128{,}58$$

Resolviendo el sistema:

$$M = 49{,}83 \;\; kN\,m$$

$$H = 40{,}21 \;\; kN$$

b) Estructura simétrica

La estructura simétrica puede descomponerse tal como indica la figura 4.

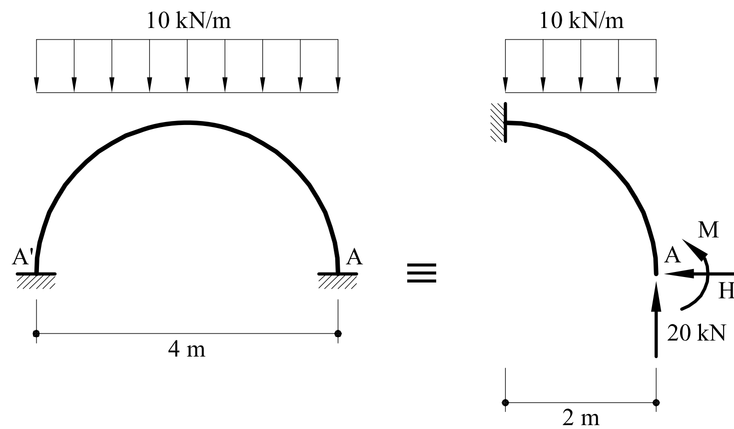


Fig. 4. Descomposición de la estructura simétrica

Las incógnitas hiperestáticas H y M se obtendrán al imponer giro y desplazamiento horizontal de A igual a cero. Es decir:

$$\pi M - 4H + 10\pi = 0$$

$$4M - 2\pi H + \frac{160}{3} = 0$$

Resolviendo el sistema

$$M = 40,25 \ \ kN\, m$$

$$H = 11,2 \ \ kN$$

Problema 11.81 *Se considera la estructura representada en la figura 1. Determinar el valor de las incógnitas hiperestáticas.*

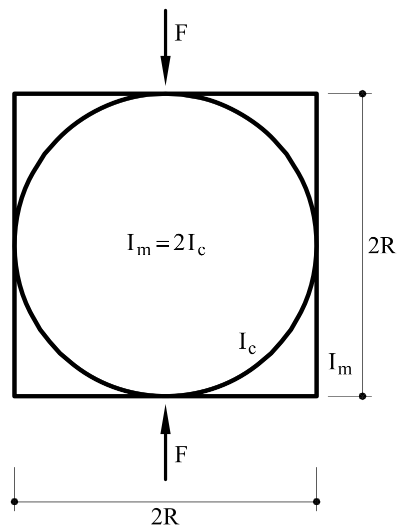


Fig. 1.Estructura correspondiente al problema 11.81

Solución

Se separa el círculo del cuadrado (figura 2).

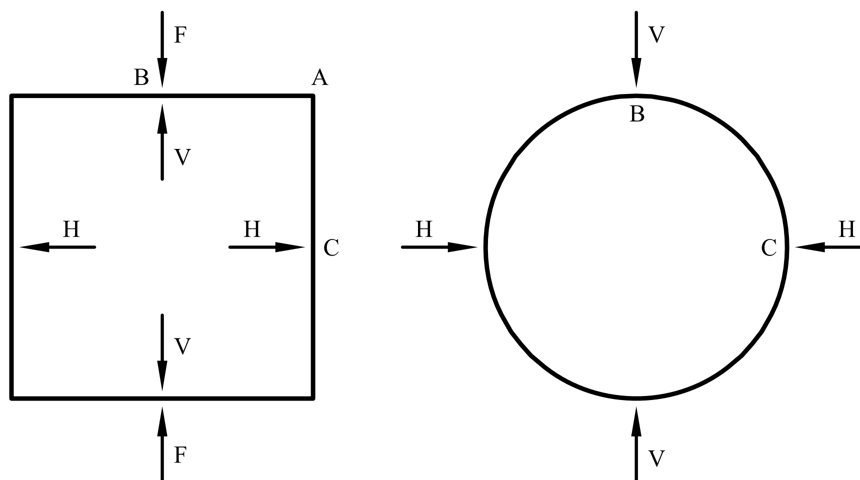


Fig. 2. Separación del cuadrado y el círculo

Se resuelve en primer lugar el cuadrado. Hay que determinar los movimientos en los puntos de aplicación de las cargas.

Se igualan los giros en el punto *A* (figura 3).

$$\frac{(F-V)(2R)^2}{16\,EI_m}-\frac{M\cdot 2R}{2\,EI_m}=\frac{H(2R)^2}{16\,EI_m}+\frac{M\cdot 2R}{2\,EI_m}$$

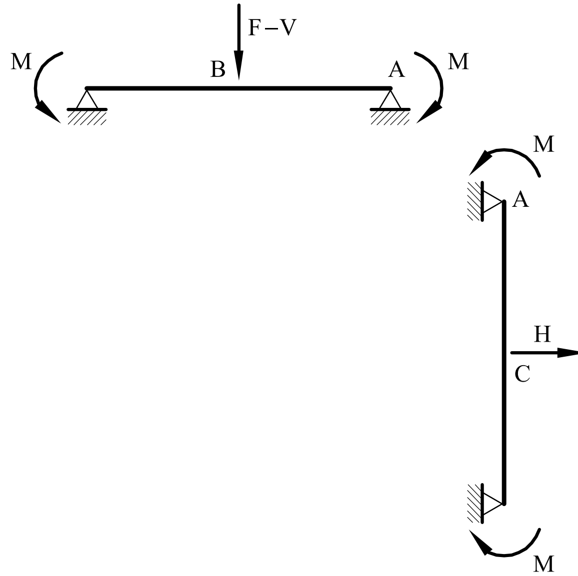


Fig. 3. Descomposición en vigas simples

$$M = \frac{F - V - H}{8} R$$

El movimiento del punto *B* vale (positivo si va hacia el interior)

$$u_B = \frac{(F - V)(2R)^3}{48\, EI_m} - \frac{M\, R^2}{2\, EI_m} = \frac{R^3}{EI_m}(0{,}1042\, F - 0{,}1042\, V + 0{,}0625\, H)$$

El movimiento del punto *C* valdrá

$$u_C = -\frac{H\,(2\,R)^3}{48\, EI_m} - \frac{M\, R^2}{2\, EI_m} = \frac{-\,R^3}{EI_m}(0{,}0625\, F - 0{,}0625\, V + 0{,}1042\, H)$$

Por lo que respecta al círculo, puede verse que

$$u_B = 0{,}0372 \frac{V\, R^3}{EI_C} - 0{,}0342 \frac{H\, R^3}{EI_C}$$

$$u_C = 0{,}0372 \frac{H\, R^3}{EI_C} - 0{,}0342 \frac{V\, R^3}{EI_C}$$

Igualando los movimientos del círculo a los del cuadrado

$$\frac{1}{I_m}(0{,}1042\, F - 0{,}1042\, V + 0{,}0625\, H) = \frac{1}{I_C}(0{,}0372\, V - 0{,}0342\, H)$$

$$\frac{1}{I_m}\left(-0{,}0625\,F+0{,}0625\,V-0{,}1042\,H\right)=\frac{1}{I_C}\left(-0{,}0342\,V+0{,}0372\,H\right)$$

y teniendo en cuenta que $I_m = 2\,I_C$, se obtiene

$$\left.\begin{array}{l}0{,}0655\,V-0{,}0893\,H=0{,}0313\,F\\0{,}0893\,V-0{,}0655\,H=0{,}0521\,F\end{array}\right\}$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones

$$V = 0{,}7064\,F$$

$$H = 0{,}1676\,F$$

Problema 11.82 *En la estructura representada en la figura 1, la recta BB' representa un tirante. Hallar el valor del esfuerzo en dicho tirante.*

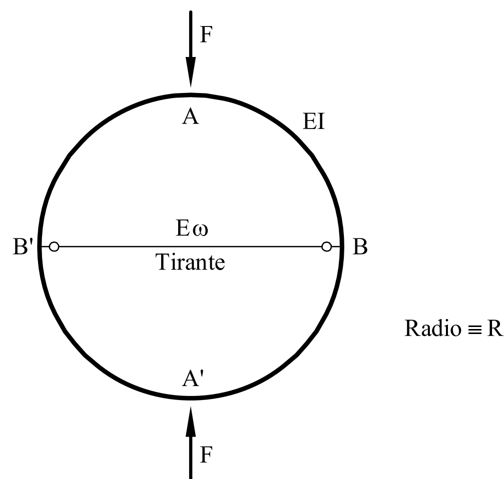


Fig. 1. Estructura correspondiente al problema 11.82

Solución

Se sustituye el tirante por una fuerza *T* (figura 2)

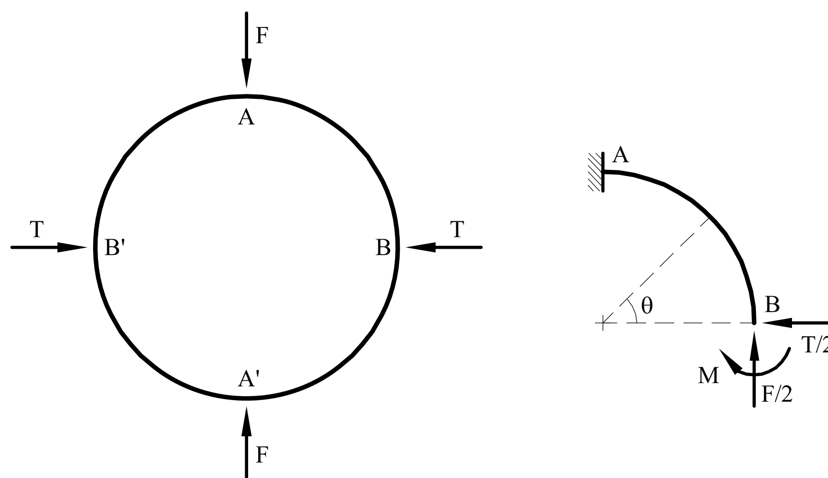


Fig. 2. Descomposición del anillo

El anillo es doblemente simétrico y los giros en *A, A', B* y *B'* son nulos.

La ley de momentos se escribe

$$M_f = -M - \frac{TR}{2}\sin\theta + \frac{FR}{2}(1-\cos\theta)$$

$$\frac{\partial M_f}{\partial M} = -1$$

El giro en *B* es nulo, y vale:

$$EI\,\varphi_B = 0 = \int_0^{\pi/2} M_f \frac{\partial M_f}{\partial M} ds = \int_0^{\pi/2} \left[-M - \frac{T\,R}{2}\sin\theta + \frac{F\,R}{2}(1-\cos\theta) \right](-1) R\,d\theta =$$

$$= -R\left[-M\,\theta + \frac{T\,R}{2}\cos\theta + \frac{F\,R}{2}\theta - \frac{F\,R}{2}\sin\theta \right]_0^{\pi/2} = -R\left[-M\frac{\pi}{2} + \frac{T\,R}{2}(-1) + \frac{F\,R}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{F\,R}{2} \right] \Rightarrow$$

$$M = 0{,}1817\,F\,R - 0{,}3183\,T\,R$$

El movimiento horizontal del punto B vale (positivo hacia la derecha)

$$EI\,u_B = -\int_0^{\pi/2} M_f \frac{\partial M_f}{\partial (T/2)} R\,d\theta = -\int_0^{\pi/2} \left[-M - \frac{T\,R}{2}\sin\theta + \frac{F\,R}{2}(1-\cos\theta) \right]\left(-\frac{R\sin\theta}{2} \right) R\,d\theta =$$

$$= -\left[\frac{M\,R^2}{2} + \frac{\pi}{16}T\,R^3 - \frac{F\,R^3}{4} + \frac{F\,R^3}{8} \right] = -R^2\left[\frac{M}{2} + \frac{\pi}{16}T\,R - \frac{1}{8}F\,R \right] =$$

$$= -R^2\left[0{,}5(0{,}1817\,F\,R - 0{,}3183\,T\,R) + 0{,}1963\,T\,R - 0{,}125\,F\,R\right] = -0{,}0372\,T\,R^3 + 0{,}0342\,F\,R^3$$

$$EI\,u_B = -0{,}0372\,T\,R^3 + 0{,}0342\,F\,R^3$$

Igualando el desplazamiento u_B al alargamiento de medio tirante:

$$-0{,}0372\,T\,R^3 + 0{,}0342\,F\,R^3 = T\,R\frac{EI}{E\omega}$$

Llamando $\alpha\,R^2 = I/\omega$

$$(0{,}0372 + \alpha)T = 0{,}0342\,F$$

$$T = \frac{0{,}0342}{0{,}0372 + \alpha}F$$

Problema 11.83 *En la estructura que se representa en la figura 1, hallar los momentos de extremo de barra, así como las leyes de esfuerzos*

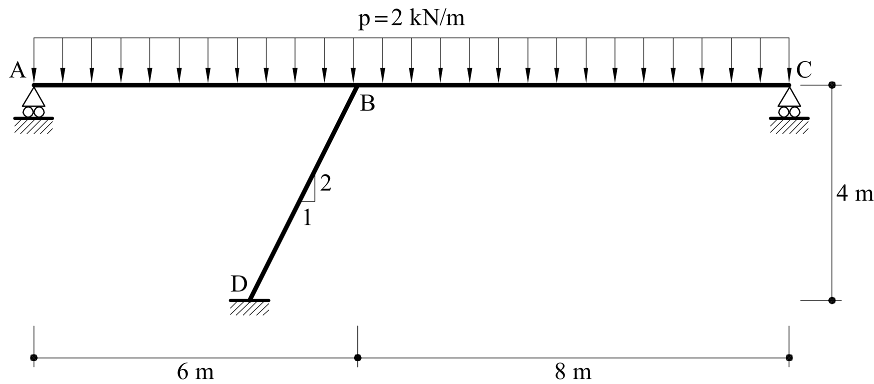


Fig.1 Pórtico correspondiente al problema 11.83

Solución

El pórtico es una vez traslacional. Supóngase que el movimiento horizontal de A vale δ. En la figura 2 pueden verse los movimientos del resto de los nudos

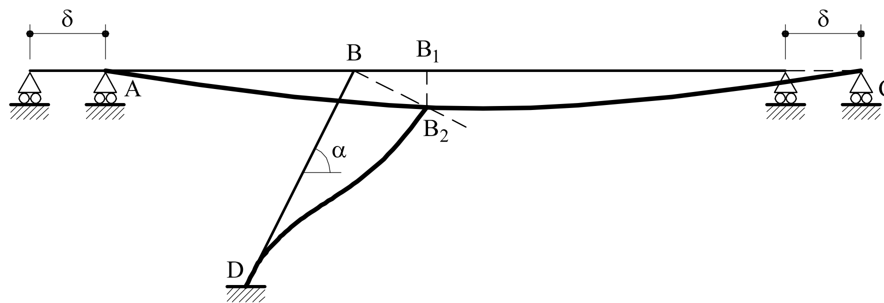


Fig.2 Movimientos

Es evidente que, dado que $BB_1 = \delta$,

$$\delta_{bd} = BB_2 = \delta / \sin\alpha = 1{,}12\,\delta$$
$$\delta_{ba} = \delta_{bc} = B_1B_2 = \delta / \tan\alpha = 0{,}5\,\delta$$

Se escriben las ecuaciones elásticas:

$$m_{ba} = \frac{3EI}{6}\varphi_b - \frac{2\times 6^2}{8} + \frac{6\,EI\,\delta_{ba}}{6^2} = 0{,}5\,EI\,\varphi_b - 9 + 0{,}083333\,\delta$$

$$m_{bc} = \frac{3EI}{8}\varphi_b + \frac{2\times 8^2}{8} - \frac{6\,EI\,\delta_{bc}}{8^2} = 0{,}375\,EI\,\varphi_b + 16 - 0{,}046875\,\delta$$

$$m_{bd} = \frac{2EI}{\sqrt{20}}\left(2\varphi_b + \varphi_d\right) + 0 + \frac{6\,EI\,\delta_{bd}}{20} = 0{,}8944\,EI\,\varphi_b + 0{,}336\,\delta$$

$$m_{db} = \frac{2EI}{\sqrt{20}}\left(\varphi_b + 2\varphi_d\right) + 0 + \frac{6\,EI\,\delta_{bd}}{20} = 0{,}4472\,EI\,\varphi_b + 0{,}336\,\delta$$

Por equilibrio:

$$m_{ba} + m_{bc} + m_{bd} = 0$$

Es decir:

$$1{,}7694\, EI\, \varphi_b + 0{,}3725\, \delta + 7 = 0$$

lo cual constituye la primera ecuación. La segunda ecuación se obtendrá del equilibrio de esfuerzos cortantes (figura 3)

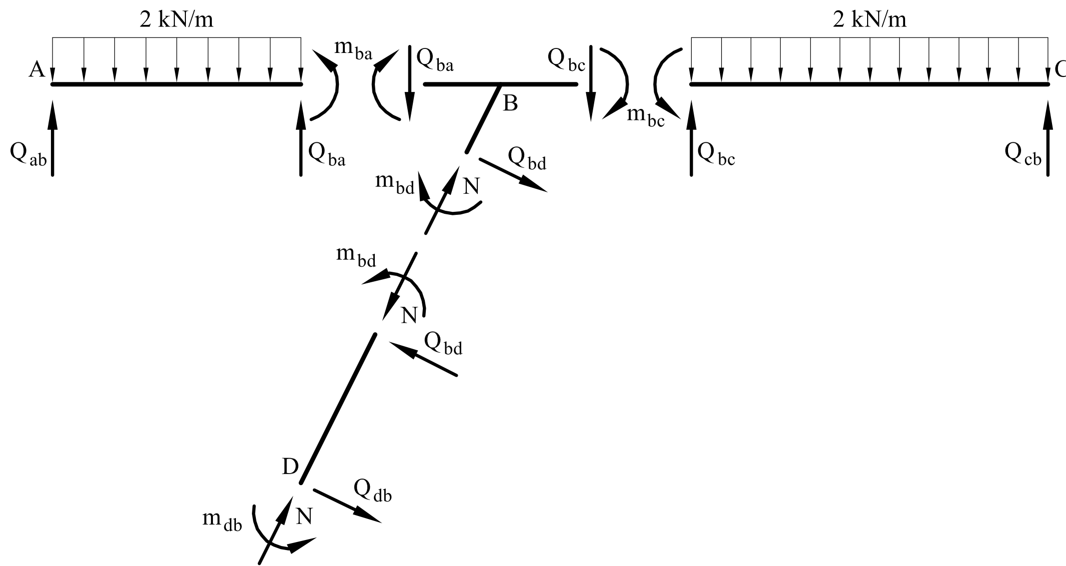


Fig.3 Esfuerzos en el nudo B

Proyectando todas las fuerzas que actúan en el nudo *B*, en la dirección perpendicular a *BD* se obtiene la ecuación

$$\left(Q_{ba} + Q_{bc}\right)\cos\alpha + Q_{bd} = 0$$

y por otro lado:

$$Q_{ba} = 6 - \frac{m_{ba}}{6} = 4{,}5 - 0{,}08333\, E\, I\, \varphi_b - 0{,}013888\, E\, I\, \delta$$

$$Q_{bc} = 8 + \frac{m_{bc}}{8} = 10 + 0{,}046875\, E\, I\, \varphi_b - 0{,}00586\, E\, I\, \delta$$

$$Q_{bd} = -\frac{m_{bd} + m_{db}}{\sqrt{20}} = -0{,}3\, E\, I\, \varphi_b - 0{,}15026\, E\, I\, \delta$$

Y sustituyendo en la expresión anterior, se obtiene la segunda ecuación:

$$-0{,}316303\, E\, I\, \varphi_b - 0{,}15909\, E\, I\, \delta + 6{,}4844 = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$E\,I\,\varphi_b = -21,562$$
$$E\,I\,\delta = 83,6289$$

Y sustituyendo en las expresiones de los momentos se obtienen los momentos de extremo de barra

$$m_{ba} = 0,5\times(-21,562) - 9 + 0,08333\times 83,6289 = -12,81\,kN\,m$$
$$m_{bc} = 0,375\times(-21,562) + 16 - 0,046875\times 83,6289 = 3,99\,kN\,m$$
$$m_{bd} = 0,8944\times(-21,562) + 0,336\times 83,6289 = 8,81\,kN\,m$$
$$m_{db} = 0,4472\times(-21,562) + 0,336\times 83,6289 = 18,46\,kN\,m$$

Las leyes de esfuerzos pueden verse representadas en las figuras 4, 5 y 6.

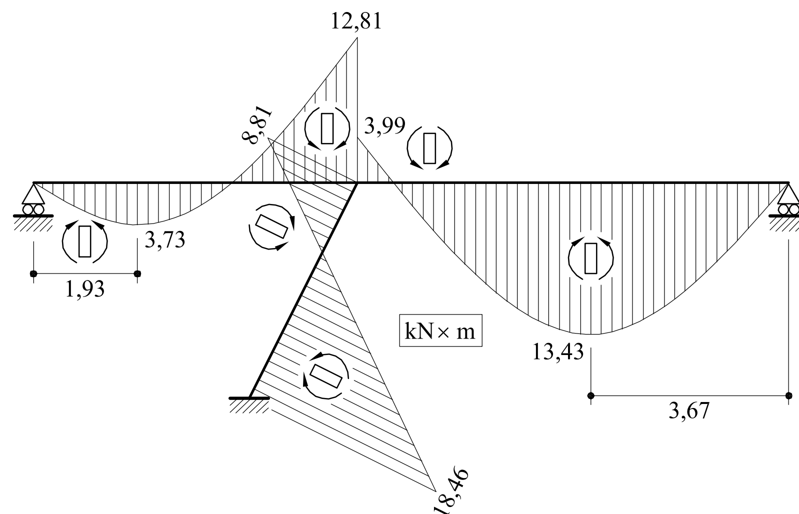


Fig.4 Ley de momentos flectores

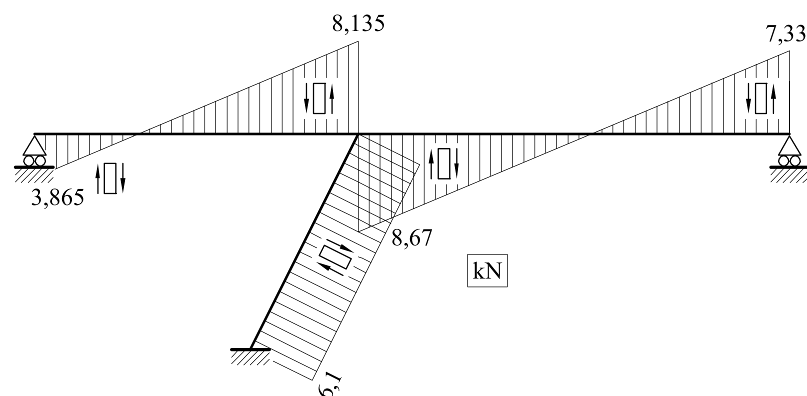


Fig.5 Ley de esfuerzos cortantes

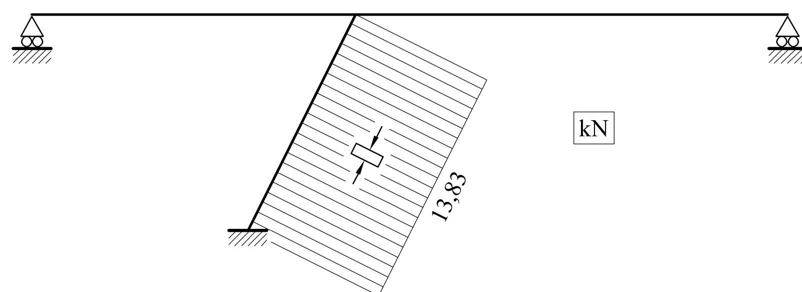


Fig.6 Ley de esfuerzos axiles

Problema 11.84 *En el pórtico que se representa en la figura 1, hallar los esfuerzos de extremo de barra*

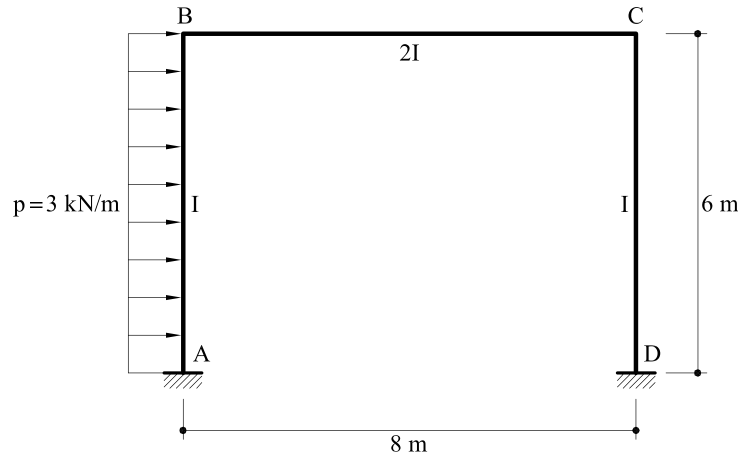


Fig.1 Pórtico correspondiente al problema 11.84

Solución

Se utilizará el método de las ecuaciones elásticas. La estructura es una vez traslacional, y en la figura 2 pueden verse los movimientos

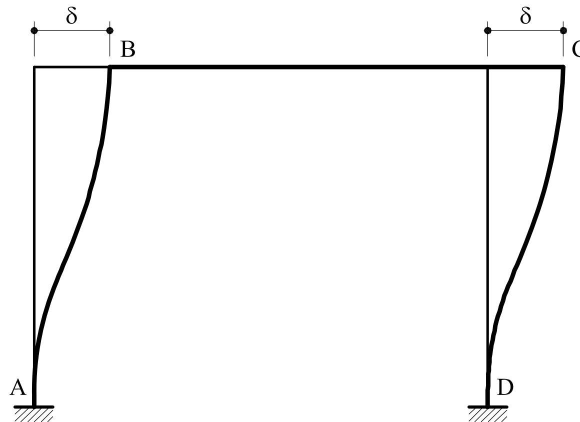


Fig.2 Movimientos

Escribiendo las ecuaciones elásticas para cada extremo de barra:

$$m_{ab} = \frac{2EI}{6}(2\varphi_a + \varphi_b) + \hat{m}_{ab} + \frac{6EI\delta}{6^2} = 0{,}3333\,EI\,\varphi_b + 9 + 0{,}16667\,EI\,\delta$$

$$m_{ba} = \frac{2EI}{6}(2\varphi_b + \varphi_a) + \hat{m}_{ba} + \frac{6EI\delta}{6^2} = 0{,}66667\,EI\,\varphi_b - 9 + 0{,}16667\,EI\,\delta$$

$$m_{bc} = \frac{2E(2I)}{8}(2\varphi_b + \varphi_c) = EI\,\varphi_b + 0{,}5\,EI\,\varphi_c$$

$$m_{cb} = \frac{2E(2I)}{8}(\varphi_b + 2\varphi_c) = 0{,}5\,EI\,\varphi_b + EI\,\varphi_c$$

$$m_{cd} = \frac{2EI}{6}\left(2\varphi_c + \varphi_d\right) + \frac{6EI\delta}{6^2} = 0,6667EI\varphi_c + 0,16667EI\delta$$
$$m_{dc} = \frac{2EI}{6}\left(\varphi_c + 2\varphi_d\right) + \frac{6EI\delta}{6^2} = 0,3333EI\varphi_c + 0,16667EI\delta$$

Por equilibrio en los nudos *B* y *C*

$$m_{ba} + m_{bc} = 0$$
$$m_{cb} + m_{cd} = 0$$

Es decir:

$$1,6667EI\varphi_b + 0,5EI\varphi_c + 0,16667EI\delta - 9 = 0$$
$$0,5EI\varphi_b + 1,66667EI\varphi_c + 0,16667EI\delta = 0$$

En la figura 3 pueden verse las fuerzas y momentos de extremo de barra

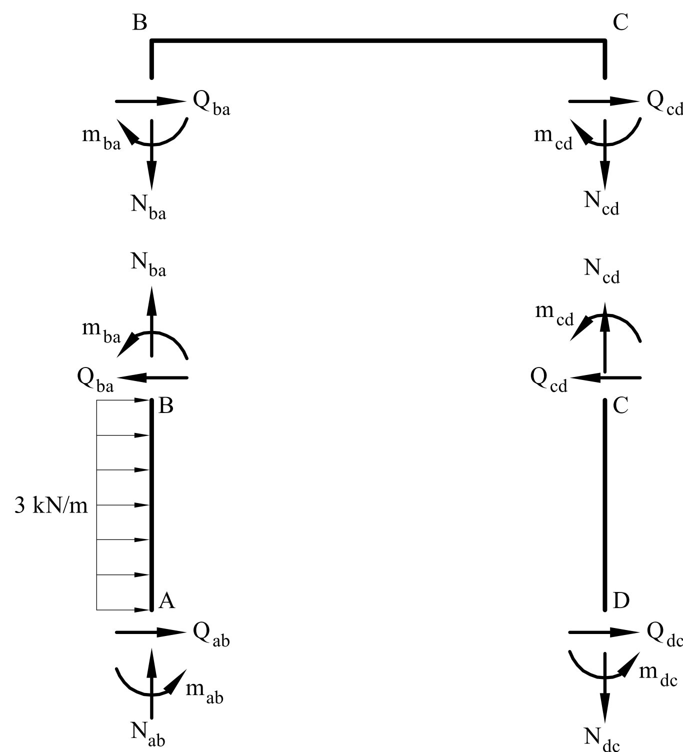


Fig.3 Fuerzas y momentos de extremo de barra

Por equilibrio en el dintel:

$$Q_{ba} + Q_{cd} = 0$$

y como

$$Q_{ba} = 9 - \frac{m_{ab} + m_{ba}}{6} = 9 - 0{,}16667 E\,I\,\varphi_b - 0{,}055556\,E\,I\,\delta$$

$$Q_{cd} = -\frac{m_{cd} + m_{dc}}{6} = -\,0{,}16667 E\,I\,\varphi_c - 0{,}055556\,E\,I\,\delta$$

Sustituyendo se obtiene la tercera ecuación

$$0{,}16667\,EI\,\varphi_b + 0{,}166667 E\,I\,\varphi_c + 0{,}11111 E\,I\,\delta - 9 = 0$$

Resolviendo el sistema:

$EI\,\varphi_b = -1{,}5429$ $\qquad$ $EI\,\varphi_c = -9{,}2571$ $\qquad$ $EI\,\delta = 97{,}20$

En la figura 4 pueden verse las fuerzas y momentos de extremo de barra

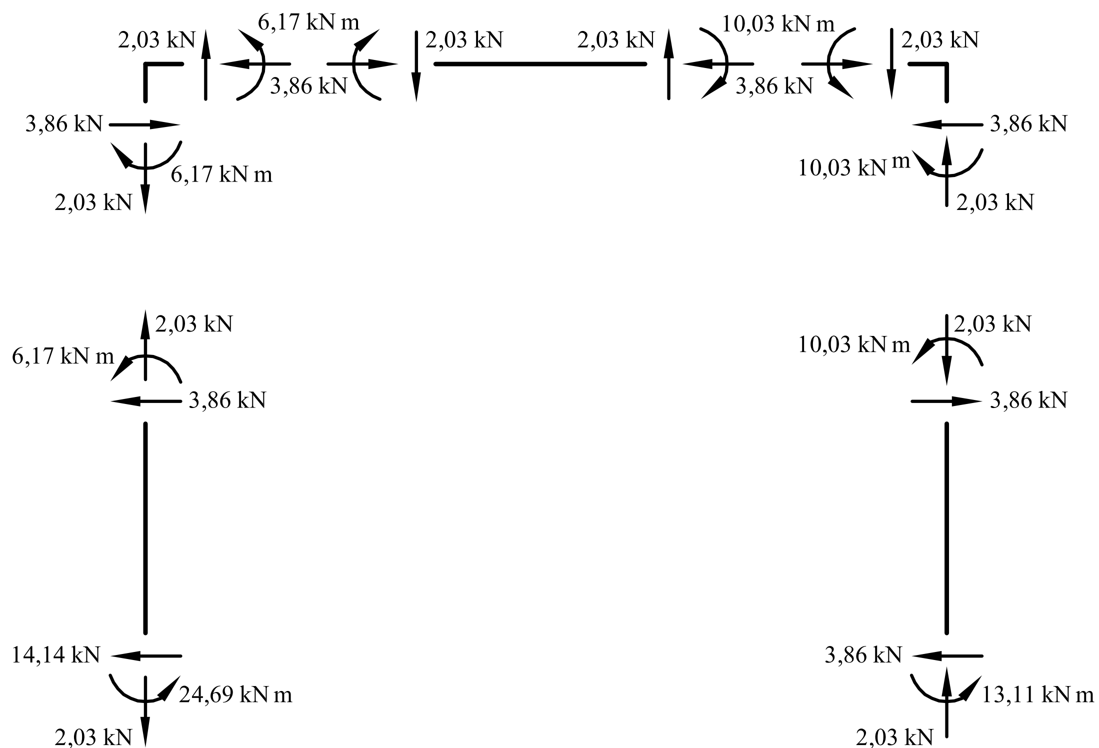


Fig.4 Fuerzas y momentos de extremo de barra

Problema 11.85 *En la estructura que se representa en la figura 1, hallar los momentos de extremo de barra*

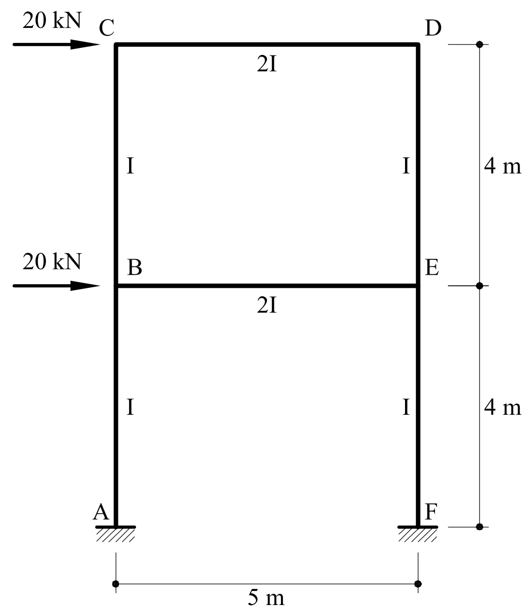


Fig.1 Estructura correspondiente al problema 11.85

Solución

El pórtico es dos veces traslacional, verificándose además que el giro en *C* es igual al giro en *D* y el giro en *B* igual al giro en *E*. Sean δ_1 y δ_2 los desplazamientos horizontales de los puntos *D* y *E* tal como se indica en la figura 2

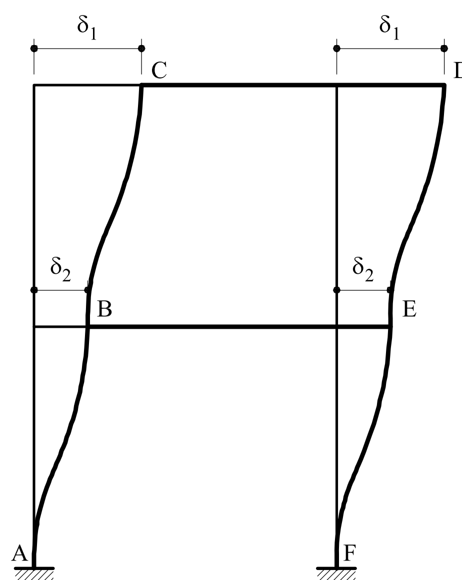


Fig.2 Desplazamientos de los nudos

Se escriben las ecuaciones elásticas para las barras que concurren en los nudos *B* y *C*

$$m_{ab} = \frac{2EI}{4}\left(2\varphi_a + \varphi_b\right) + \frac{6EI}{4^2}\delta_2 = 0{,}5\,EI\,\varphi_b + 0{,}375\,EI\,\delta_2$$
$$m_{ba} = \frac{2EI}{4}\left(2\varphi_b + \varphi_a\right) + \frac{6EI}{4^2}\delta_2 = EI\,\varphi_b + 0{,}375\,EI\,\delta_2$$
$$m_{be} = \frac{2E(2I)}{5}\left(2\varphi_b + \varphi_e\right) = 2{,}4\,EI\,\varphi_b$$
$$m_{bc} = \frac{2EI}{4}\left(2\varphi_b + \varphi_c\right) + \frac{6EI}{4^2}\left(\delta_1 - \delta_2\right) = EI\,\varphi_b + 0{,}5\,EI\,\varphi_c + 0{,}375\,EI\left(\delta_1 - \delta_2\right)$$
$$m_{cb} = \frac{2EI}{4}\left(2\varphi_c + \varphi_b\right) + \frac{6EI}{4^2}\left(\delta_1 - \delta_2\right) = 0{,}5\,EI\,\varphi_b + EI\,\varphi_c + 0{,}375\,EI\left(\delta_1 - \delta_2\right)$$
$$m_{cd} = \frac{2E(2I)}{5}\left(2\varphi_c + \varphi_d\right) = 2{,}4\,EI\,\varphi_c$$

Por equilibrio en los nudos *B* y *C*

$$m_{ba} + m_{be} + m_{bc} = 0$$
$$m_{cb} + m_{cd} = 0$$

Y sustituyendo se obtienen las dos primeras ecuaciones

$$4{,}4\,EI\,\varphi_b + 0{,}5\,EI\,\varphi_c + 0{,}375\,EI\,\delta_1 = 0$$

$$0{,}5\,EI\,\varphi_b + 3{,}4\,EI\,\varphi_c + 0{,}375\,EI\,\delta_1 - 0{,}375\,EI\,\delta_2 = 0$$

En la figura 3 se representan las fuerzas y momentos de extremo de barra en los dinteles.

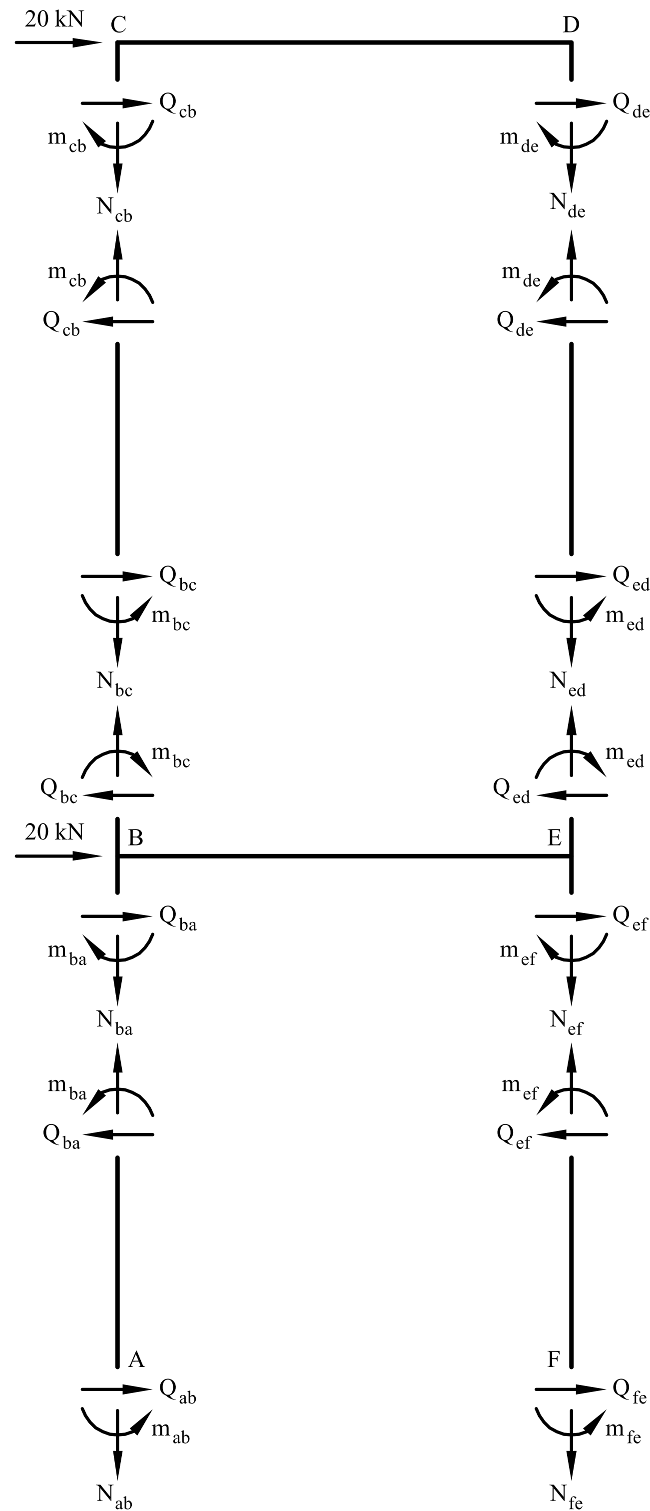


Fig.3 Fuerzas y momentos de extremo de barra en los dinteles

Teniendo en cuenta que:

$m_{cb} = m_{de}$ $\qquad$ $m_{bc} = m_{ed}$ $\qquad$ $m_{ba} = m_{ef}$

$Q_{cb} = Q_{de}$ $\qquad$ $Q_{bc} = Q_{ed}$ $\qquad$ $Q_{ba} = Q_{ef}$

Se establece el equilibrio de fuerzas horizontales en cada dintel:

$$2Q_{cb} + 20 = 0$$
$$2(Q_{ba} - Q_{bc}) + 20 = 0$$

Es decir:

$Q_{bc} = -10$ $\qquad$ $Q_{ba} = -20$

O sea, tomando momentos en los pilares *CB* y *BA*

$$\frac{m_{bc} + m_{cb}}{4} + Q_{bc} = 0$$
$$\frac{m_{ba} + m_{ab}}{4} + Q_{ba} = 0$$

y sustituyendo:

$$1{,}5\,EI\,\varphi_b + 1{,}5\,EI\,\varphi_c + 0{,}75\,EI\,(\delta_1 - \delta_2) = 40$$
$$1{,}5\,EI\,\varphi_b + 0{,}75\,EI\,\delta_2 = 80$$

que forman las otras dos ecuaciones con las que se completa el sistema. Resolviendo:

$EI\,\varphi_b = -21{,}5153$ $\qquad$ $EI\,\varphi_c = -9{,}5769$

$EI\,\delta_1 = -265{,}2148$ $\qquad$ $EI\,\delta_2 = 149{,}6972$

Con lo cual, los momentos de extremo de barra valen:

$m_{ab} = 45{,}38\,kNm$ $\qquad$ $m_{ba} = 34{,}62\,kNm$ $\qquad$ $m_{be} = -51{,}64\,kNm$

$m_{bc} = 17{,}02\,kNm$ $\qquad$ $m_{cb} = 22{,}98\,kNm$ $\qquad$ $m_{cd} = -22{,}98\,kNm$

Problema 11.86 *Dada la estructura que se representa en la figura 1, se desea hallar las leyes de esfuerzos, utilizando el método de las ecuaciones elásticas.*

Fig.1 Estructura correspondiente al problema 11.86

Solución

La estructura es una vez traslacional. Supóngase que el punto C se mueve una cantidad δ hacia la derecha. La deformada (sin giro) debida a este desplazamiento δ puede verse en la figura 2.

Fig.2. Deformada sin giro

De acuerdo con la figura 2:

$$\delta_{BC} = \delta$$

$$\delta_{AB} = \delta\sqrt{2}$$

Con lo cual, si se escriben las ecuaciones elásticas:

$$m_{ba} = \frac{2EI}{4\sqrt{2}}(2\varphi_b + 0) + \frac{6EI\delta\sqrt{2}}{\left(4\sqrt{2}\right)^2} - \frac{12\times 4^2}{12} = 0,7071\,EI\varphi_b + 0,26517\,EI\delta - 16$$

$$m_{bc} = \frac{3EI}{4}\varphi_b - \frac{3EI\delta}{16} + \frac{12\times 4^2}{8} = 0,75\,EI\varphi_b - 0,1875\,EI\delta + 24$$

Sumando e igualando a cero

$$1,4571\,EI\varphi_b + 0,07767\,EI\delta + 8 = 0 \qquad \text{(a)}$$

Lo cual constituye la primera ecuación.

Además,

$$m_{ab} = \frac{2EI}{4\sqrt{2}}\varphi_b + \frac{6EI\delta\sqrt{2}}{\left(4\sqrt{2}\right)^2} + \frac{12\times 4^2}{12} = 0,3536EI\varphi_b + 0,26517EI\delta + 16$$

Aislando la pieza *BC* y tomando momentos respecto a *O* (figura 3):

$$Q_{ba}4\sqrt{2} + m_{bc} + 12\times\frac{4^2}{2} = 0$$

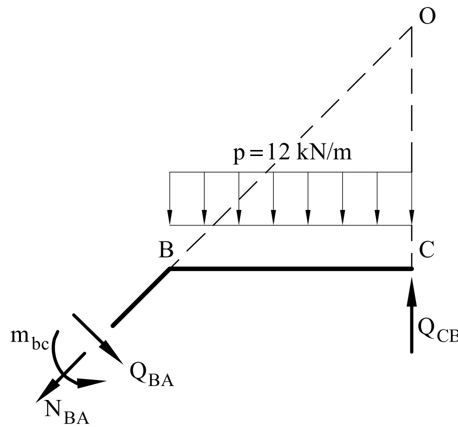


Fig. 3. Equilibrio de la barra BC

Teniendo en cuenta que por equilibrio de la barra *AB*

$$Q_{BA}4\sqrt{2} + m_{ab} + m_{ba} - 48\times 2 = 0$$

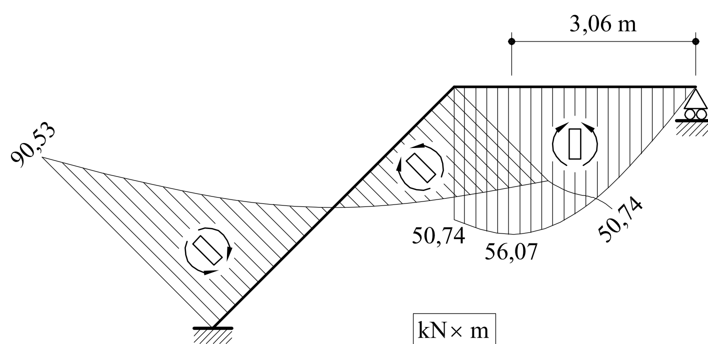
Se obtiene la segunda ecuación:

$$0,3107EI\varphi_b + 0,71784EI\delta - 216 = 0 \qquad \text{(b)}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (a) y (b) se obtiene:

m_{ba} *= 50,74 kNm ;* m_{bc} *= -50,74 kNm ;* m_{ab} *= 90,53 kNm*

En la figura 4 pueden verse representadas las leyes de momentos flectores



Problema 11.87 *Dada la estructura que se representa en la figura 1, se desea hallar las leyes de esfuerzos.*

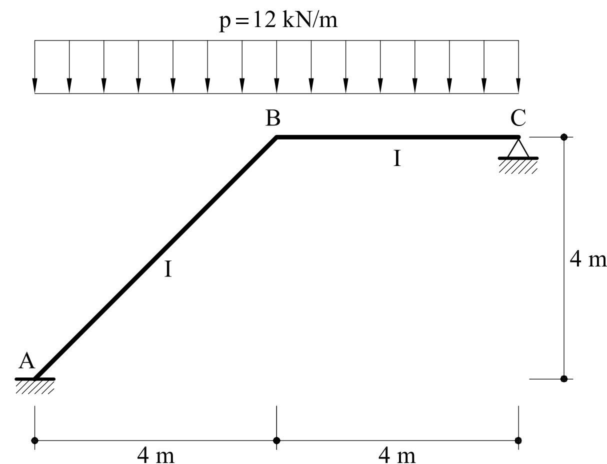


Fig.1 Pórtico correspondiente al problema 11.87

Solución

La estructura es intraslacional, por lo que si se utiliza el método de las ecuaciones elásticas, la única incógnita será el giro en B

$$m_{ba} = \frac{2EI}{4\sqrt{2}}\left(2\varphi_b + 0\right) - \frac{12\times 4^2}{12} = 0,7071EI\,\varphi_b - 16$$
$$m_{bc} = \frac{3EI}{4}\,\varphi_b + \frac{12\times 4^2}{8} = 0,75\,EI\,\varphi_b + 24$$

Sumando e igualando a cero:

$$1,4571EI\,\varphi_b + 8 = 0$$
$$EI\,\varphi_b = -5,4904$$

y sustituyendo

$$m_{ba} = -0,7071\times 5,4904 - 16 = -19,88\,kNm$$
$$m_{bc} = -0,75\times 5,4904 + 24 = 19,88\,kNm$$

y además:

$$m_{ab} = \frac{2EI}{4}\varphi_b + \frac{12\times 4^2}{12} = 13,25\;\;kNm$$

En las figuras 2, 3 y 4 pueden verse representadas las leyes de esfuerzos.

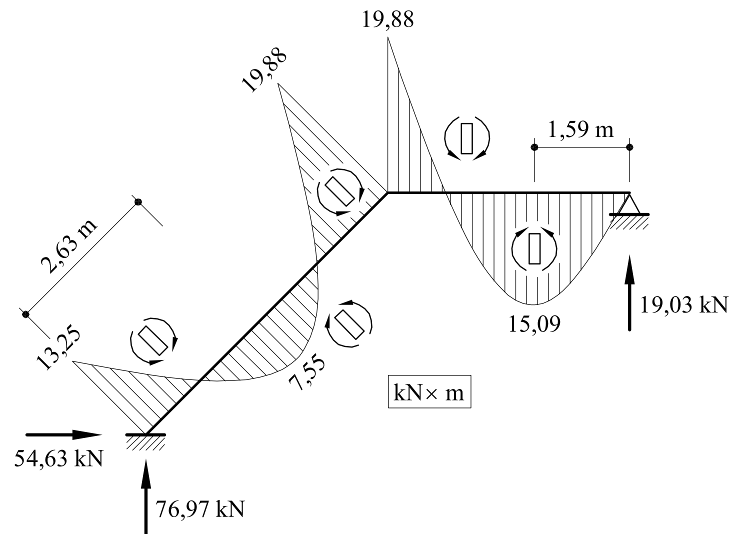


Fig.2. Ley de momentos flectores y reacciones

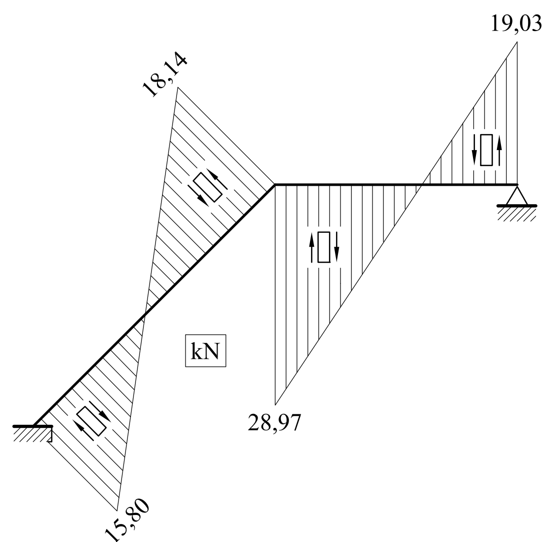


Fig.3. Ley de esfuerzos cortantes

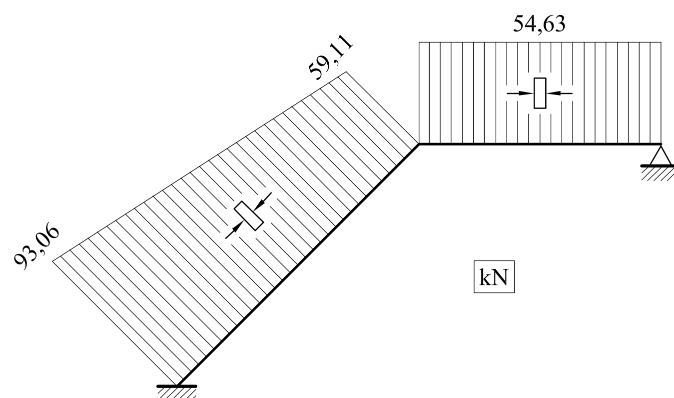


Fig.4. Ley de esfuerzos axiles

Problema 11.88 *La estructura que se representa en la figura 1, está sometida a un incremento de temperatura* t *en sus fibras exteriores y* $-t$ *en sus fibras interiores. Tanto para la pieza AB como para la BC las secciones son rectangulares de ancho* b *y* $2b$ *respectivamente y canto* h *en ambas vigas. Se supone que la variación térmica es lineal en el interior de la sección recta. Conociendo el coeficiente de dilatación lineal* α *se desea hallar las leyes de esfuerzos.*



Fig.1 Estructura correspondiente al problema resuelto 11.88

Solución

Para una viga biempotrada sometida a una variación térmica como la indicada en la figura *2.a* el momento de empotramiento perfecto vale:

$$\hat{m} = \frac{2EI\alpha t}{h}$$

Para un viga empotrada y apoyada el momento de empotramiento valdrá

$$\breve{m} = \frac{3EI\alpha t}{h}$$

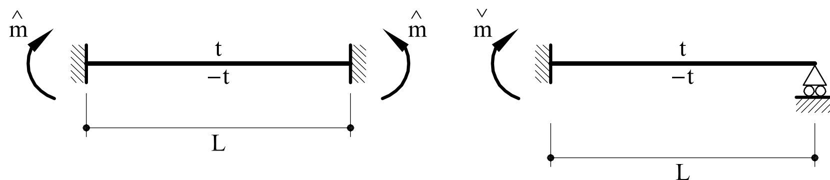


Fig.2 Vigas biempotrada y empotrada y apoyada sometida a variación térmica.

Escribiendo las ecuaciones elásticas para las vigas *AB* y *BC* que concurren al punto *B*:

$$m_{ba} = \frac{2EI}{a}\left(2\varphi_b + 0\right) + \hat{m}_{ba} = \frac{4EI}{a}\varphi_b + \frac{2EI\alpha t}{h}$$

$$m_{bc} = \frac{3E\left(2I\right)}{2a}\varphi_b - \breve{m}_{bc} = \frac{3EI}{a}\varphi_b - \frac{3E(2I)\alpha t}{h}$$

Sumando e igualando a cero:

$$\frac{7EI}{a}\varphi_b - \frac{4EI\alpha t}{h} = 0$$

Es decir:

$$\frac{EI}{a}\varphi_b = 0,5714\frac{EI\alpha t}{h}$$

Y sustituyendo:

$$m_{ba} = \left(4\times 0,5714+2\right)\frac{EI\alpha t}{h} = 4,29\ \frac{EI\alpha t}{h}$$
$$m_{bc} = \left(3\times 0,5714-6\right)\frac{EI\alpha t}{h} = -4,29\ \frac{EI\alpha t}{h}$$
$$m_{ab} = \frac{2EI}{a}\varphi_b - \frac{2EI\alpha t}{h} = -0,8572\ \frac{EI\alpha t}{h}$$

En la figura 3 pueden verse dibujadas las leyes de momentos flectores

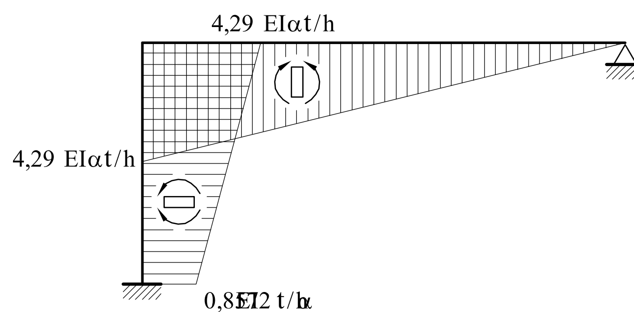


Fig.3 Ley de momentos flectores

Problema 11.89 *La estructura que se representa en la figura 1, está sometida a un incremento de temperatura t en sus fibras exteriores y $-t$ en sus fibras interiores. Tanto para la pieza AB como para la BC las secciones son rectangulares de ancho b y $2b$ respectivamente y canto h en ambas vigas. Se supone que la variación térmica es lineal en el interior de la sección recta. Conociendo el coeficiente de dilatación lineal α se desea hallar las leyes de esfuerzos.*

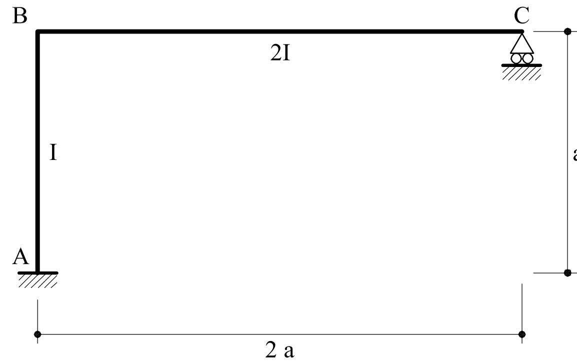


Fig.1 Estructura correspondiente al problema resuelto 11.89

Solución

Para una viga biempotrada sometida a una variación térmica, el momento de empotramiento perfecto vale:

$$\hat{m} = \frac{2EI\alpha t}{h}$$

Para un viga empotrada y apoyada el momento de empotramiento valdrá

$$\breve{m} = \frac{3EI\alpha t}{h}$$

Por otra parte, el punto B se moverá horizontalmente. Supóngase que una cantidad δ hacia la izquierda.

Escribiendo las ecuaciones elásticas para las vigas AB y BC que concurren al punto B:

$$m_{ba} = \frac{2EI}{a}(2\varphi_b + 0) - \frac{6EI}{a^2}\delta + \hat{m}_{ba} = \frac{4EI}{a}\varphi_b - \frac{6EI}{a^2}\delta + \frac{2EI\alpha t}{h}$$

$$m_{bc} = \frac{3E(2I)}{2a}\varphi_b - \breve{m}_{bc} = \frac{3EI}{a}\varphi_b - \frac{3E(2I)\alpha t}{h}$$

Sumando e igualando a cero, se obtiene la primera ecuación

$$\frac{7EI}{a}\varphi_b - \frac{6EI}{a^2}\delta - \frac{4EI\alpha t}{h} = 0 \qquad \text{(a)}$$

Por otra parte, el esfuerzo cortante en *AB* debe ser nulo, es decir:

$$m_{ba} + m_{ab} = 0$$

Y como

$$m_{ab} = \frac{2EI}{a}\varphi_b - \frac{6EI}{a^2}\delta - \frac{2EI\alpha t}{h}$$

resulta:

$$\varphi_b = \frac{2\delta}{a}$$

Y sustituyendo en la expresión (a) y resolviendo:

$$\frac{EI}{a}\varphi_b = \frac{EI\alpha t}{h}$$

$$\frac{EI}{a^2}\delta = 0,5\ \frac{EI\alpha t}{h}$$

Con lo cual,

$$m_{ba} = (4 - 6\times 0,5 + 2)\ \frac{EI\alpha t}{h} = 3\frac{EI\alpha t}{h}$$

$$m_{bc} = (3 - 6)\ \frac{EI\alpha t}{h} = -3\frac{EI\alpha t}{h}$$

$$m_{ab} = (2 - 6\times 0,5 - 2)\frac{EI\alpha t}{h} = -3\ \frac{EI\alpha t}{h}$$

En la figura 2 pueden verse dibujadas las leyes de momentos flectores

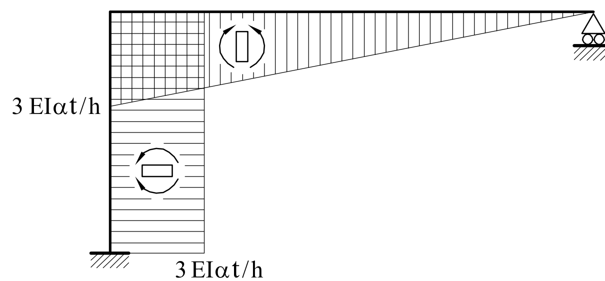


Fig.2 Ley de momentos flectores

Problema 11.90 *La estructura que se representa en la figura 1, está sometida a un incremento de temperatura térmico uniforme de valor t. Si α es el coeficiente de dilatación lineal, se pide*

- *Hallar las leyes de esfuerzos.*
- *Giro en B y en C.*

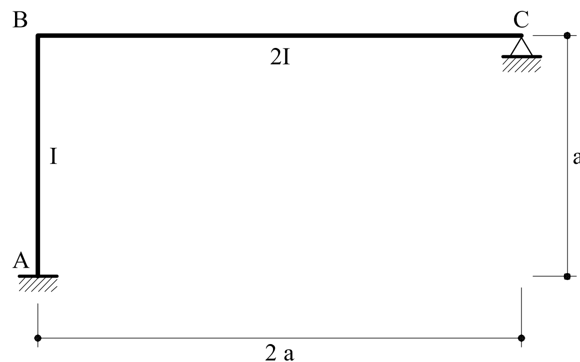


Fig.1 Estructura correspondiente al problema resuelto 11.90

Solución

La estructura es intraslacional, por lo que las traslaciones del punto *B* son conocidas.

$$\Delta L_{AB} = \alpha L_{AB}\, t = \alpha\, at = k$$
$$\Delta L_{BC} = \alpha L_{BC}\, t = 2\alpha\, at = 2k$$

siendo $k = \alpha\, at$

Por efecto de la temperatura, el punto *B* se moverá tal como indica la figura 2

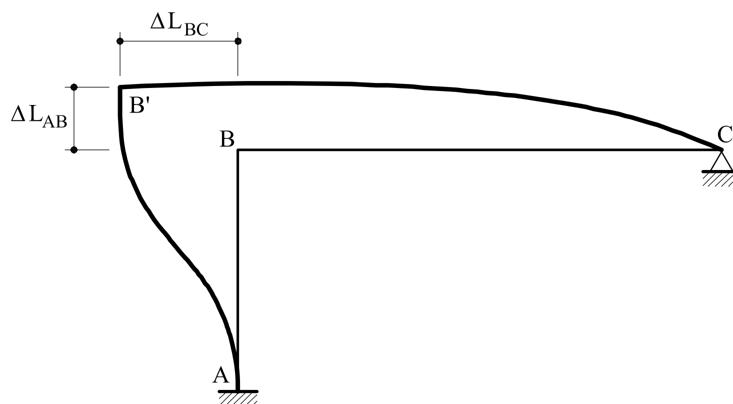


Fig. 2 Deformada (sin giro de la estructura)

Aplicando el método de las ecuaciones elásticas:

$$m_{ba} = \frac{2EI}{a}\left(2\varphi_b + 0\right) - \frac{6EI\delta_{AB}}{a^2} = \frac{4EI}{a}\varphi_b - \frac{12EIk}{a^2}$$
$$m_{bc} = \frac{3E(2I)}{2a}\varphi_b + \frac{3E(2I)\delta_{BC}}{(2a)^2} = \frac{3EI}{a}\varphi_b + \frac{3EIk}{2a^2}$$

Sumando e igualando a cero

$$0 = \frac{7EI}{a}\varphi_b - \frac{10{,}5EIk}{a^2}$$

Es decir,

$$\varphi_b = 1{,}5\,\frac{k}{a}$$

Con lo cual, los momentos de extremo de barra valdrán:

$$m_{ba} = \frac{4EI}{a}\times 1{,}5\frac{k}{a} - \frac{12EIk}{a^2} = -\frac{6EIk}{a^2}$$
$$m_{ab} = \frac{2EI\varphi_b}{a} - \frac{12EIk}{a^2} = -\frac{9EIk}{a^2}$$
$$m_{bc} = \frac{3EI}{a}\times 1{,}5\frac{k}{a} + 1{,}5\frac{EIk}{a^2} = \frac{6EIk}{a^2}$$

En las figuras 3,4 y 5 pueden verse dibujadas, respectivamente, las leyes de momentos flectores, esfuerzos cortantes y esfuerzos axiles.

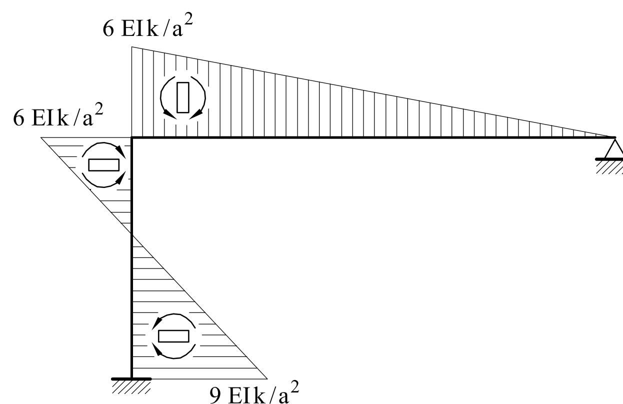


Fig. 3 Ley de momentos flectores

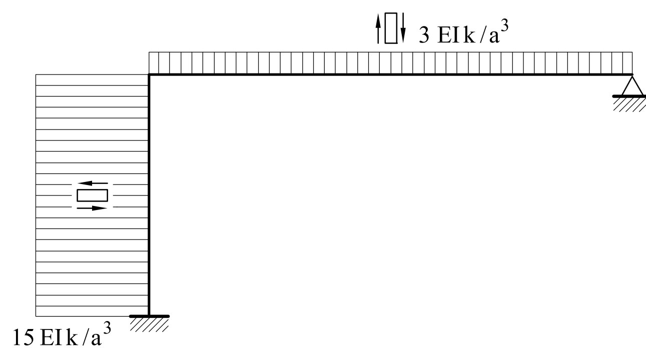


Fig. 4 Ley de esfuerzos cortantes

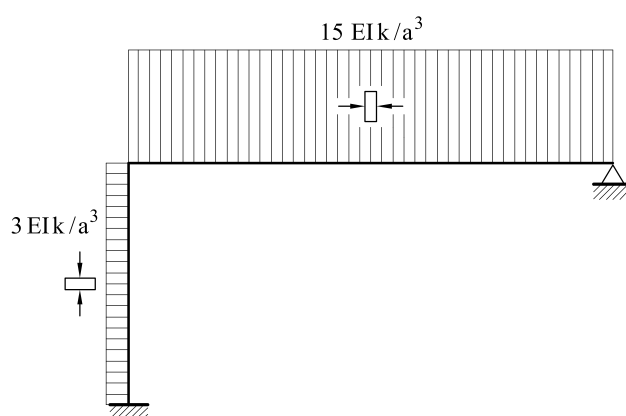


Fig. 5 Ley de esfuerzos axiles

Problema 11.91 *Determinar las leyes de esfuerzos en la estructura que se representa en la figura 1*

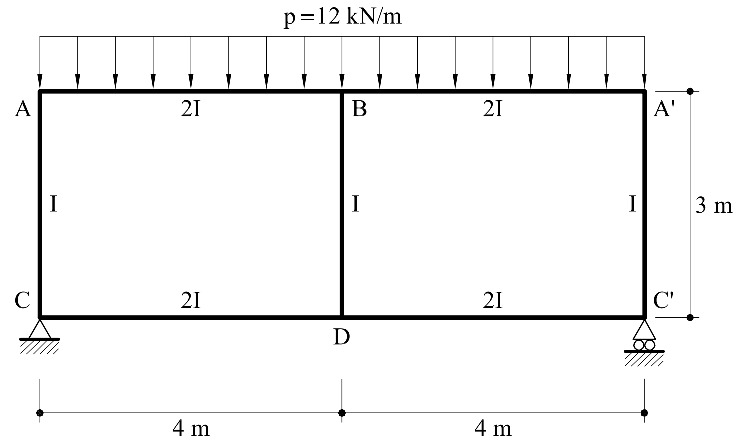


Fig.1 Estructura correspondiente al problema resuelto 11.91

Solución

Se resolverá utilizando el método de las ecuaciones elásticas.

Se observa que la estructura es una vez trasnacional, siendo *B* y *D* los inicios nudos que pueden trasladarse, siendo esta traslación en dirección vertical. Además, por simetría

$$\varphi_A = -\varphi_{A'} \quad ; \quad \varphi_C = -\varphi_{C'} \quad ; \quad \varphi_B = \varphi_D = 0$$

Se escriben, en primer lugar las expresiones de los momentos de extrema de barra de las piezas que concurren en *A*:

$$m_{ab} = \frac{2E(2I)}{4}(2\varphi_a + 0) + \frac{12\times 4^2}{12} + \frac{6E(2I)}{4^2}\delta_{ab} = 2EI\varphi_a + 0{,}75EI\delta + 16$$

$$m_{ac} = \frac{2EI}{3}(2\varphi_a + \varphi_C) = 1{,}3333EI\varphi_a + 0{,}66667EI\varphi_C$$

Sumando e igualando a cero se obtiene la primera ecuación

$$3{,}3333EI\varphi_a + 0{,}66667EI\varphi_c + 0{,}75EI\delta + 16 = 0 \qquad \text{(a)}$$

Para las barras que concurren en *C* se escribe

$$m_{ca} = \frac{2EI}{3}(2\varphi_c + \varphi_a) = 0{,}66667EI\varphi_a + 1{,}3333EI\varphi_c$$

$$m_{cd} = \frac{2E(2I)}{4}(2\varphi_c + 0) + \frac{6E(2I)}{4^2}\ \delta_{cd} = 2EI\varphi_c + 0{,}75EI\delta$$

Sumando e igualando a cero se obtiene la segunda ecuación

$$0{,}66667\, EI\, \varphi_a + 3{,}3333\, EI\, \varphi_c + 0{,}75\, EI\, \delta = 0 \qquad \text{(b)}$$

Puede observarse que en las expresiones anteriores se ha escrito

$$\delta_{ab} = \delta_{cd} = \delta$$

La tercera ecuación se obtendrá realizando el equilibrio de esfuerzos cortantes (figura 2)

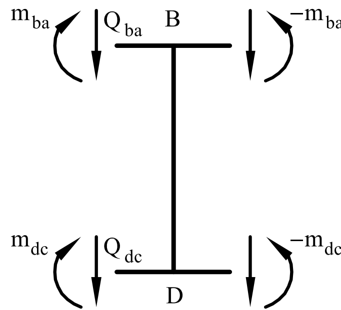


Fig.2 Equilibrio de esfuerzos cortantes

Por equilibrio:

$$Q_{ba} + Q_{dc} = 0 \qquad \text{(c)}$$

Por equilibrio de las barras *AB* y *CD*:

$$Q_{ba} = 24 - \frac{m_{ab} + m_{ba}}{4} = 24 - 0{,}75\, EI\, \varphi_a - 0{,}375\, EI\, \delta \qquad \text{(d1)}$$

$$Q_{dc} = -\frac{m_{dc} + m_{cd}}{4} = -0{,}75\, EI\, \varphi_c - 0{,}375\, EI\, \delta \qquad \text{(d2)}$$

Sustituyendo en (c) se obtiene la tercera ecuación

$$EI\, \varphi_a + EI\, \varphi_c + EI\, \delta = 32 \qquad \text{(e)}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$EI\, \varphi_a = -15{,}8$$
$$EI\, \varphi_c = -9{,}8$$
$$EI\, \delta = 57{,}6$$

Con lo cual, los momentos de extremo de barra valen:

$m_{ab} = 27,6\,kN\,m$ $\qquad m_{ba} = 11,4\,kN\,m$

$m_{ac} = -27,6\,kN\,m$ $\qquad m_{ca} = -23,6\,kN\,m$

$m_{cd} = 23,6\,kN\,m$ $\qquad m_{dc} = 33,4\,kN\,m$

En las figuras 3, 4 y 5 pueden verse dibujadas las leyes de esfuerzos

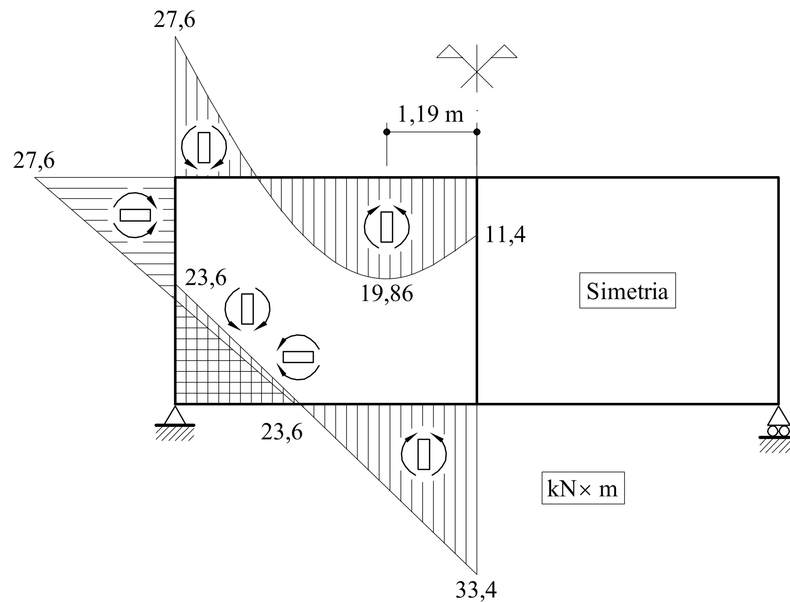


Fig.3 Ley de momentos flectores

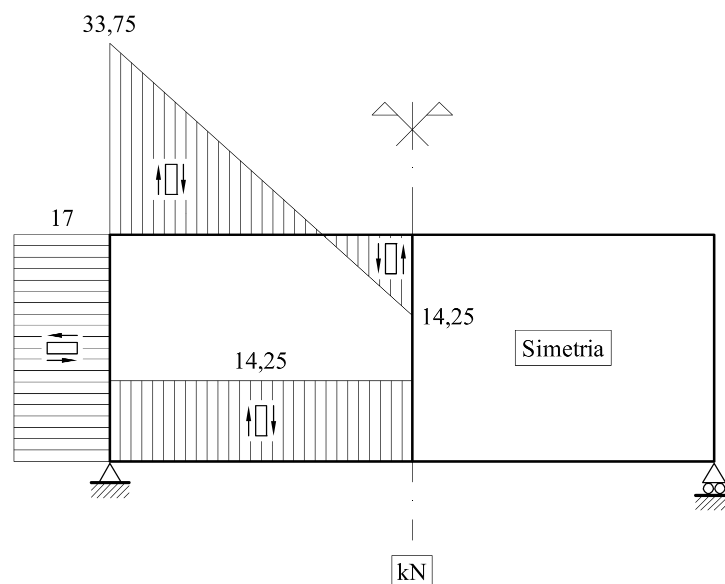


Fig.4 Ley de esfuerzos cortantes

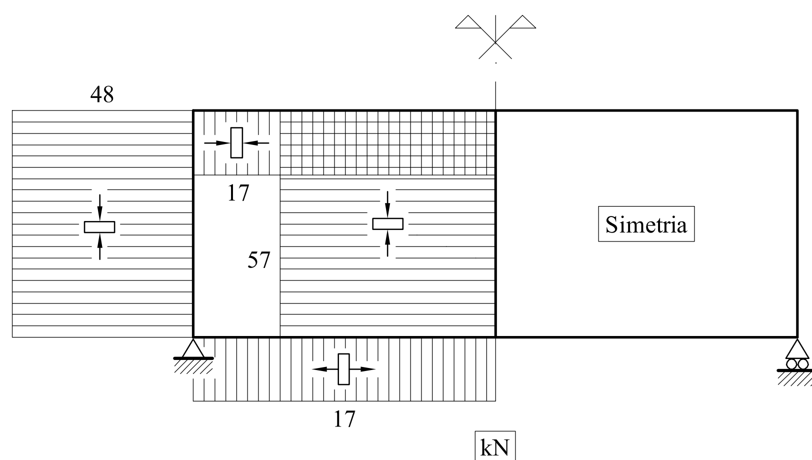


Fig.5 Ley de esfuerzos axiles

Problema 11.92 *Hallar las leyes de momentos en la estructura que se adjunta en la figura 1*

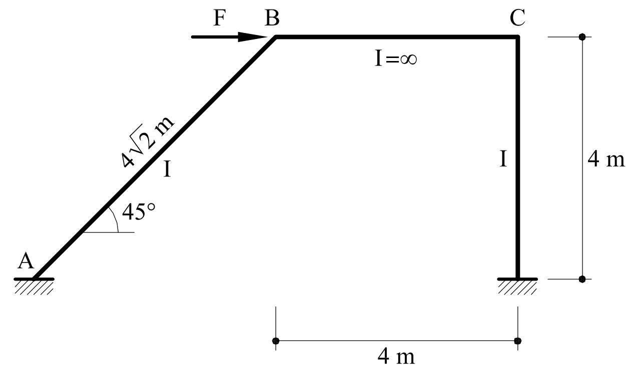


Fig.1 Estructura correspondiente al problema 11.92

Solución

La estructura es una vez trasnacional. Por otro lado, el centro de rotación de la barra *BC* estará situado en el punto *I* (figura 2). Además al ser dicha barra infinitamente rígida los giros de *B* y *C* serán iguales, verificándose que

$$\varphi_B = \varphi_C = \theta = \frac{BB'}{IB} = \frac{CC'}{IC}$$

Es decir:

$$\delta_{BA} = BB' = 4\sqrt{2}\,\theta$$
$$\delta_{CD} = CC' = 4\,\theta$$

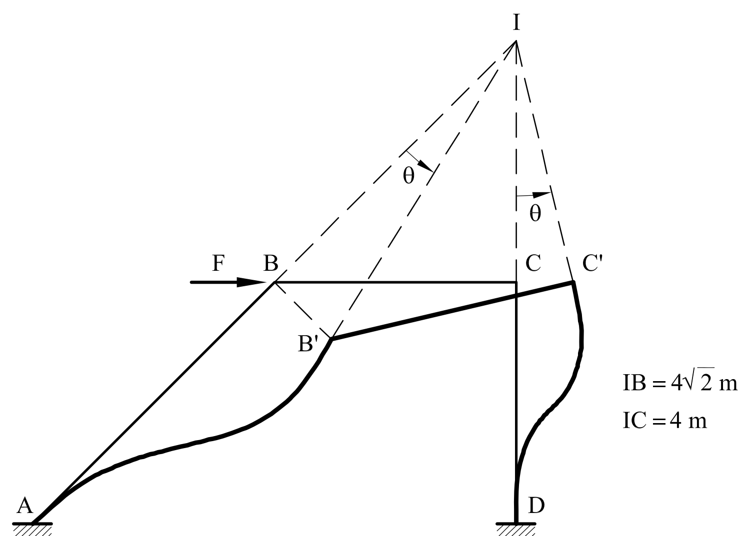


Fig.2 Deformada de la estructura

Las ecuaciones elásticas para las barras *AB* y *CD* se escriben:

$$m_{ba} = \frac{2\,EI}{4\sqrt{2}}\left(2\varphi_B + 0\right) + \frac{6\,EI\,\delta_{AB}}{\left(4\sqrt{2}\right)^2} = \frac{EI}{\sqrt{2}}\theta + \frac{6\,EI\,4\sqrt{2}\,\theta}{\left(4\sqrt{2}\right)^2} = \frac{5\,EI}{2\sqrt{2}}\theta \qquad (a1)$$

$$m_{ab} = \frac{2\,EI}{4\sqrt{2}}\left(0 + \varphi_B\right) + \frac{6\,EI\,\delta_{AB}}{\left(4\sqrt{2}\right)^2} = \frac{EI}{2\sqrt{2}}\theta + \frac{6\,EI\,4\sqrt{2}\,\theta}{\left(4\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2\,EI}{\sqrt{2}}\theta \qquad (a2)$$

$$m_{cd} = \frac{2\,EI}{4}\left(2\varphi_C + 0\right) + \frac{6\,EI\,\delta_{CD}}{4^2} = EI\,\theta + \frac{6\,EI\,4\,\theta}{4^2} = \frac{5\,EI}{2}\theta \qquad (a3)$$

$$m_{dc} = \frac{2\,EI}{4}\left(0 + \varphi_C\right) + \frac{6\,EI\,\delta_{CD}}{4^2} = \frac{EI}{2}\theta + \frac{6\,EI\,4\theta}{4^2} = 2\,EI\,\theta \qquad (a4)$$

De acuerdo con la figura 3 el equilibrio de esfuerzos cortantes vendrá dado por la expresión (tomando momentos respecto a I):

$$4\,F - 4\sqrt{2}\,Q_{AB} - 4\,Q_{CD} - m_{ba} - m_{cd} = 0 \qquad (b)$$

y por equilibrio de las barras *AB* y *DC*

$$Q_{AB} = \frac{m_{ab} + m_{ba}}{4\sqrt{2}} \qquad (c1)$$

$$Q_{CD} = \frac{m_{cd} + m_{dc}}{4} \qquad (c2)$$

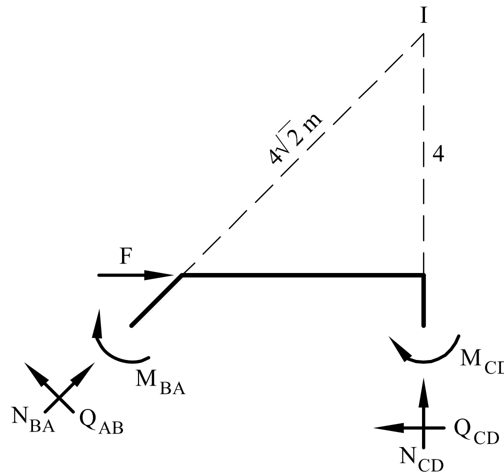


Fig.3 Equilibrio de cortantes

Sustituyendo las expresiones (a) y (c) en (b) se tiene:

$$E\,I\,\theta = 0{,}334735\,F \qquad (d)$$

Con lo cual, sustituyendo en (a) se tienen los momentos de extremo de barra

$$m_{ba} = \frac{5}{2\sqrt{2}} \times 0{,}334735\,F = 0{,}5917\,F$$

$$m_{ab} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times 0{,}334735\,F = 0{,}4734\,F$$

$$m_{cd} = \frac{5}{2} \times 0{,}334735\,F = 0{,}8368\,F$$

$$m_{dc} = 2 \times 0{,}334735\,F = 0{,}66947\,F$$

En la figura 4 puede verse dibujada la ley de momentos flectores.

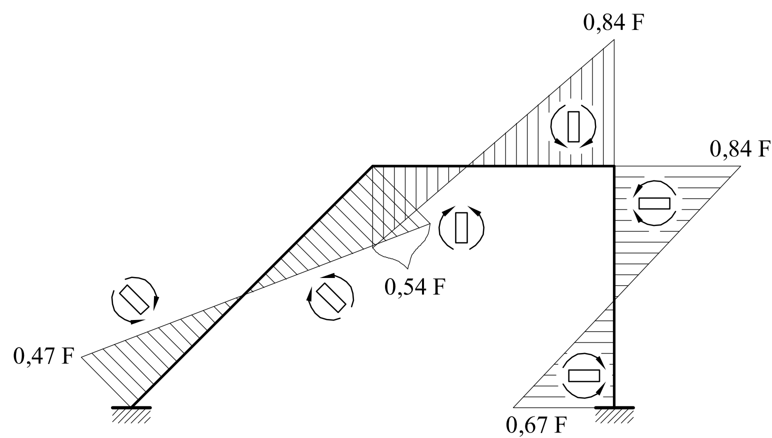


Fig.4 Ley de momentos flectores

Problema 11.93 *Determinar las leyes de esfuerzos en la estructura que se representa en la figura 1. Todas las barras tienen la misma inercia y se desprecia la deformación por esfuerzo axil.*

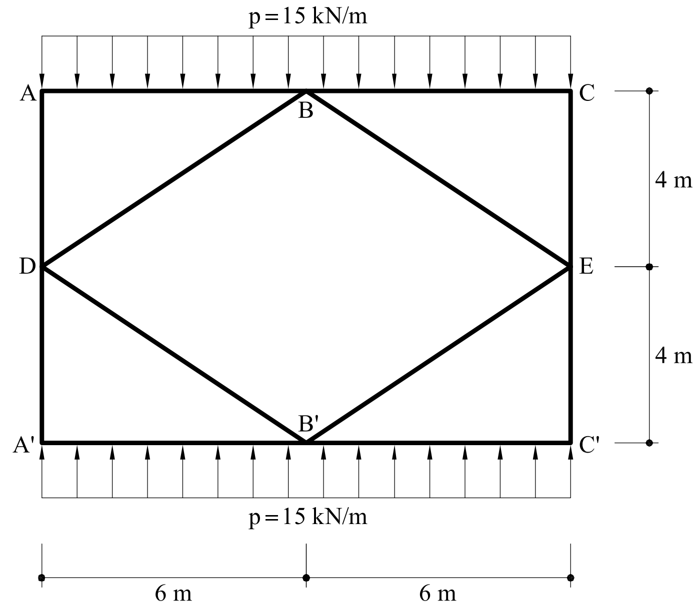


Fig.1 Estructura correspondiente al problema 11.93

Solución

La estructura es simétrica respecto a un eje horizontal y respecto a un eje vertical. Por ello:

$$\varphi_B = \varphi_{B'} = \varphi_D = \varphi_E = 0$$
$$\varphi_A = -\varphi_C = -\varphi_{A'} = \varphi_{C'}$$

Los puntos B y B' se moverán solo verticalmente. Los puntos D y E se moverán solo horizontalmente. Llamando δ_B al movimiento vertical de B y δ_D al movimiento horizontal de D, y teniendo en cuenta que el centro de rotación de la barra DB está en A se tendrá (figura 2)

$$\frac{\delta_B}{AB} = \frac{\delta_D}{AD}$$

es decir

$$\delta_B = 1{,}5\,\delta_D \qquad (a)$$

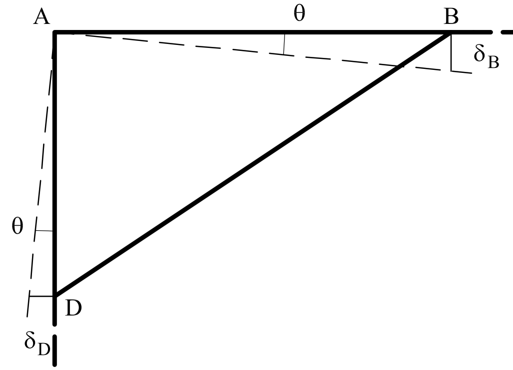


Fig. 2. Relación entre los movimientos en D y en B

Primer procedimiento. Se utilizarán las ecuaciones elásticas. En la figura 3 puede verse la deformada (sin giros) de la estructura

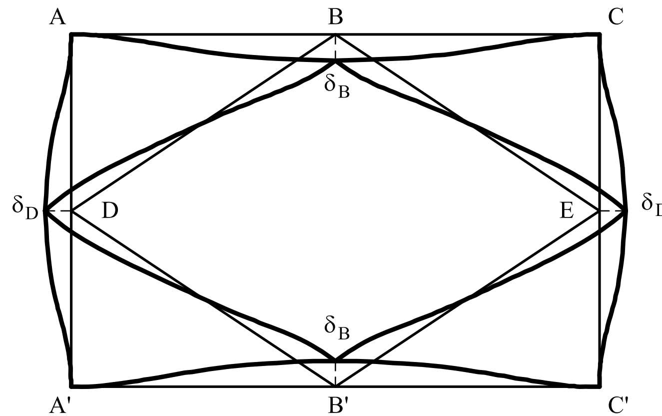


Fig. 3. Deformada sin giro

Aplicando las ecuaciones elásticas a las barras que concurren en el nudo *A* se tendrá

$$m_{ab}=\frac{2EI}{6}\left(2\varphi_a+0\right)+\frac{15\times 6^2}{12}+\frac{6EI\delta_B}{6^2}=\frac{2}{3}EI\varphi_a+45+\frac{EI}{6}\delta_B=$$

$$=\frac{2}{3}EI\varphi_a+45+\frac{EI}{4}\delta_D$$

$$m_{ad}=\frac{2EI}{4}\left(2\varphi_a+0\right)+0+\frac{6EI}{4^2}\delta_D=EI\varphi_a+\frac{3EI}{8}\delta_D$$

Sumando, e igualando a cero, y teniendo en cuenta la relación (a)

$$\frac{5}{3}EI\varphi_a+\frac{5}{8}EI\delta_D+45=0 \qquad (b)$$

Por otro lado, se aísla el trozo *ABD* de estructura, tal como se indica en la figura 4.

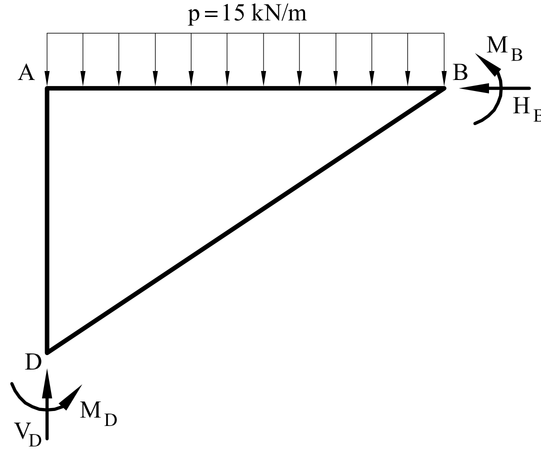


Fig.4. Parte de la estructura

Tomando momentos respecto al punto *A* se obtiene;

$$M_B + M_D - 270 = 0 \qquad (c)$$

La expresión anterior puede desarrollarse escribiendo

$$M_D = m_{da} + m_{db} \qquad (d1)$$

$$M_B = m_{ba} + m_{bd} \qquad (d2)$$

A su vez

$$m_{da} = \frac{2EI}{4}(0+\varphi_a) + \frac{6EI}{4^2}\delta_D = \frac{EI}{2}\varphi_a + 3\frac{EI}{8}\delta_D \qquad (e1)$$

$$m_{db} = \frac{2EI}{\sqrt{4^2+6^2}}(0+0) + \frac{6EI}{4^2+6^2}\delta_{BD} = 0{,}208\,EI\,\delta_D \qquad (e2)$$

(en la expresión anterior se ha tenido en cuenta que $\delta_{BD} = 1{,}8028\,\delta_D$)

$$m_{ba} = \frac{2EI}{6}(0+\varphi_a) - \frac{15\times 6^2}{12} + \frac{6EI\delta_B}{36} = \frac{EI}{3}\varphi_a - 45 + \frac{EI}{4}\delta_D \qquad (e3)$$

$$m_{bd} = m_{db} \qquad (e4)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en (d) y éstas a su vez en (c) se obtiene

$$0{,}8333\,EI\,\varphi_a + 1{,}041\,EI\,\delta_D = 315 \qquad (f)$$

Las expresiones (b) y (f) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolviendo:

$$EI\,\varphi_a = -200{,}72 \qquad (g1)$$

$$EI\,\delta_D = 463{,}27 \qquad (g2)$$

A partir de los valores anteriores se obtienen los momentos de extremo de barra:

$$m_{ab} = \frac{2}{3}(-200{,}72) + 45 + \frac{463{,}27}{4} = 27\, kNm$$

$$m_{ad} = -200{,}72 + \frac{3}{8} \times 463{,}27 = -27\, kNm$$

$$m_{ba} = -\frac{200{,}72}{3} - 45 + \frac{463{,}27}{4} = 3{,}91\, kNm$$

$$m_{bd} = 0{,}208 \times 463{,}27 = 96{,}36\, kNm$$

$$m_{da} = -\frac{200{,}72}{2} + \frac{3}{8} \times 463{,}27 = 73{,}37\, kNm$$

$$m_{db} = m_{bd} = 96{,}36\, kNm$$

Segundo procedimiento. Se separa el cuadrilátero exterior del cuadrilátero interior (figura 5)

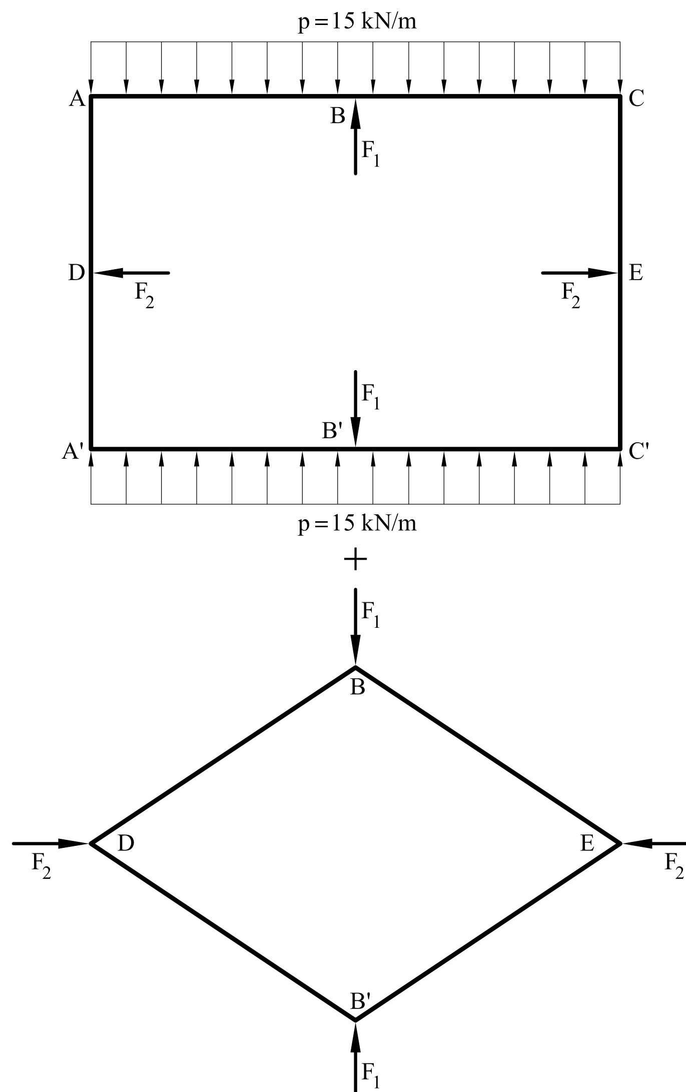


Fig.5. Separación del cuadrilátero exterior del cuadrilátero interior.

Los valores de F_1 y F_2 se obtendrán de igualar movimientos en ambos cuadriláteros.

a) *Cuadrilátero exterior*: Escribiendo las ecuaciones elásticas en las barras que concurren en el nudo A se tendrá:

$$m_{ac} = \frac{2EI}{12}(2\varphi_a - \varphi_a) + \frac{15\times 12^2}{12} - \frac{F_1 \times 12}{8} = \frac{EI}{6}\varphi_a + 180 - 1{,}5F_1$$
$$m_{aa'} = \frac{2EI}{8}(2\varphi_a - \varphi_a) + \frac{F_2 \times 8}{8} = \frac{EI}{4}\varphi_a + F_2$$

Sumando e igualando a cero:

$$0{,}41666\,EI\,\varphi_a - 1{,}5F_1 + F_2 + 180 = 0$$

Es decir:

$$m_{ac} = -0{,}9F_1 - 0{,}4F_2 + 108 \qquad (h1)$$
$$m_{aa'} = 0{,}9F_1 + 0{,}4F_2 - 108 \qquad (h2)$$

Las flechas de los puntos B y D valdrán respectivamente:

$$EI\,v_B = 2106 - 19{,}8F_1 + 7{,}2F_2 \quad \text{(positivo hacia el interior)}$$
$$EI\,v_D = -864 + 7{,}2F_2 - 7{,}4666F_2 \quad \text{(positivo hacia el interior)}$$

b) *Cuadrilátero interior*: Se aisla la barra DB (figura 6)

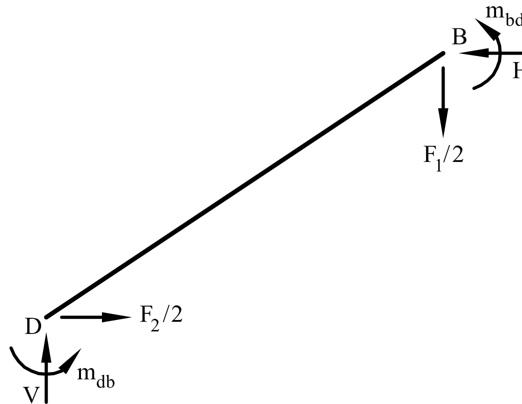


Fig. 6. Barra BD aislada

Por equilibrio

$$H = F_2/2$$
$$V = F_1/2$$

Los momentos m_{db} y m_{bd} en B y D deben ser iguales ya que el giro en D y en B es nulo. Por equilibrio de momentos:

$$m_{db} = m_{bd} = 1{,}5\,F_1 - F_2 \qquad (i)$$

Los movimientos en B y D del cuadrilátero interior pueden obtenerse aplicando el teorema de Castigliano. Si W es la energía elástica de todo el cuadrilátero se tendrá

$$v_B = \frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial F_1} = \frac{1}{2}\oint M_f \frac{\partial M_f}{\partial F_1}\frac{ds}{EI}$$
$$v_D = \frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial F_2} = \frac{1}{2}\oint M_f \frac{\partial M_f}{\partial F_2}\frac{ds}{EI}$$

El término $\frac{1}{2}$ proviene de que el teorema de Castigliano proporciona el movimiento relativo entre B y B' y D y E.

$$E\,I\,v_B = 10{,}8166\,F_1 - 7{,}21108\,F_2 \qquad (j1)$$
$$E\,I\,v_D = -7{,}21108\,F_1 + 4{,}807\,F_2 \qquad (j2)$$

Igualando los movimientos dados por (h) con los dados por (j), y resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene

$$F_1 = 79{,}70\,kN$$
$$F_2 = 23{,}18\,kN$$

Con lo cual, a partir de (i)

$$m_{ab} = m_{bd} = 1{,}5 \times 79{,}7 - 23{,}18 = 96{,}37\,kNm$$

Los momentos en los extremos de barra que concurren en A se obtendrán a partir de las expresiones (h)

$$m_{ac} = -0{,}9 \times 79{,}70 - 0{,}4 \times 23{,}18 + 108 = 27\,kNm$$
$$m_{aa'} = 0{,}9 \times 79{,}70 + 0{,}4 \times 23{,}18 - 108 = -27\,kNm$$

Los momentos m_{db} y m_{bd} se obtienen a partir de (i)

$$m_{bd} = m_{db} = 1{,}5 \times 79{,}70 - 23{,}18 = 96{,}37\,kNm$$

En la figura 7 pueden verse dibujadas las leyes de momentos flectores

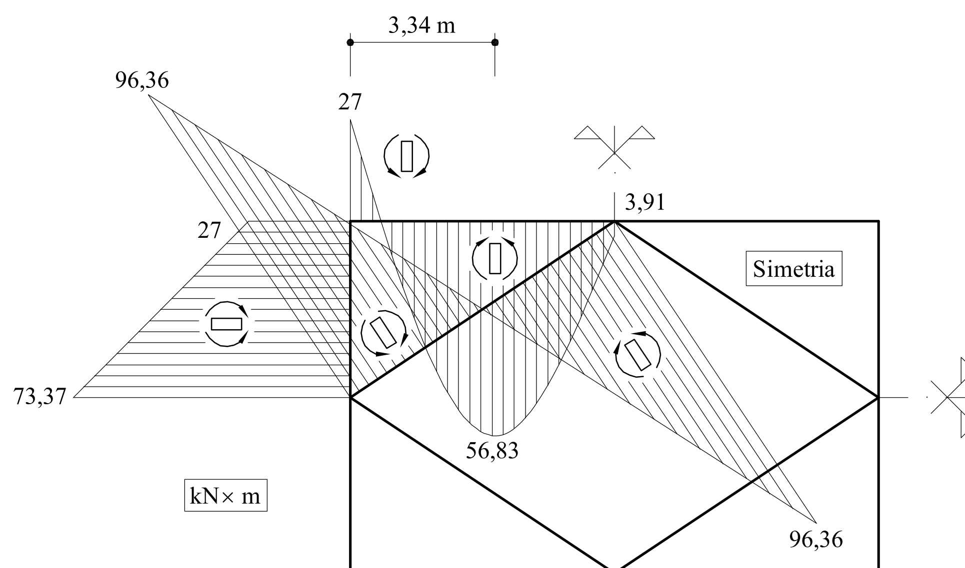


Fig. 7 Leyes de momentos flectores.

Problema 11.94 *En el pórtico a dos aguas que se representa en la figura 1, se desean obtener los momentos de extremo de barra*

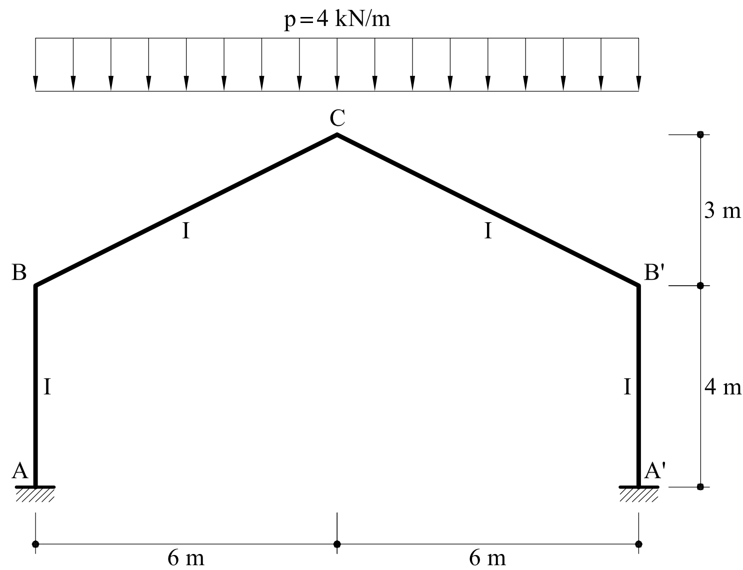


Fig.1 Pórtico correspondiente al problema 11.94

Solución

La estructura es una vez traslacional y simétrica respecto a un eje vertical. En la figura 2 pueden verse los movimientos de los nudos.

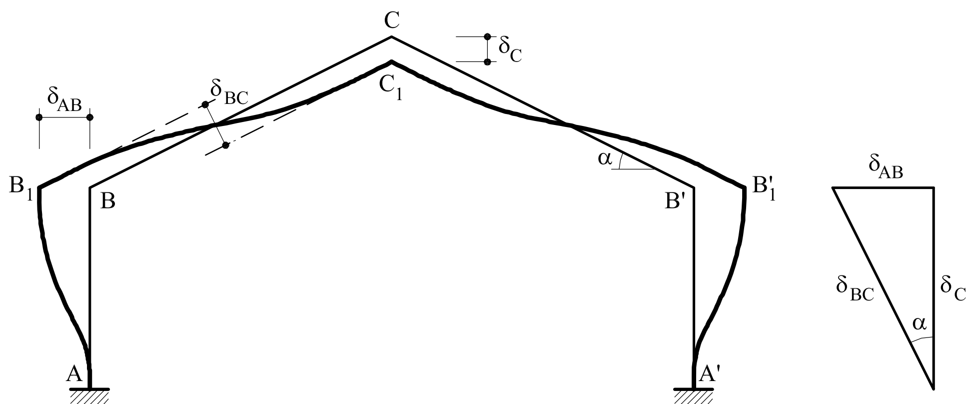


Fig.2 Movimientos de los nudos

De acuerdo con la figura 2

$$\delta_{AB} = \delta$$

$$\delta_{BC} = \frac{\delta}{\sin\alpha} = 2{,}236\,\delta$$

Las ecuaciones elásticas se escriben:

$$m_{ab} = \frac{2EI}{4}\left(2\varphi_a + \varphi_b\right) - \frac{6EI\delta_{AB}}{4^2} = 0{,}5\,EI\,\varphi_b - 0{,}375\,EI\,\delta$$

$$m_{ba} = \frac{2EI}{4}\left(2\varphi_b + \varphi_a\right) - \frac{6EI\delta_{AB}}{4^2} = EI\,\varphi_b - 0{,}375\,EI\,\delta$$

$$m_{bc} = \frac{2EI}{\sqrt{6^2+3^2}}\left(2\varphi_b + \varphi_c\right) + \hat{m}_{bc} + \frac{6EI\delta_{BC}}{6^2+3^2} = 0{,}5963\,EI\,\varphi_b + 12 + 0{,}2981\,EI\,\delta$$

$$m_{cb} = \frac{2EI}{\sqrt{6^2+3^2}}\left(2\varphi_c + \varphi_b\right) + \hat{m}_{bc} + \frac{6EI\delta_{BC}}{6^2+3^2} = 0{,}2982\,EI\,\varphi_b - 12 + 0{,}2981\,EI\,\delta$$

Por equilibrio, $m_{ba} + m_{bc} = 0$, es decir:

$$1{,}5963\,EI\,\varphi_b - 0{,}0769\,EI\,\delta + 12 = 0$$

A partir de la figura 3, tomando momentos respecto al punto O se obtiene la segunda ecuación

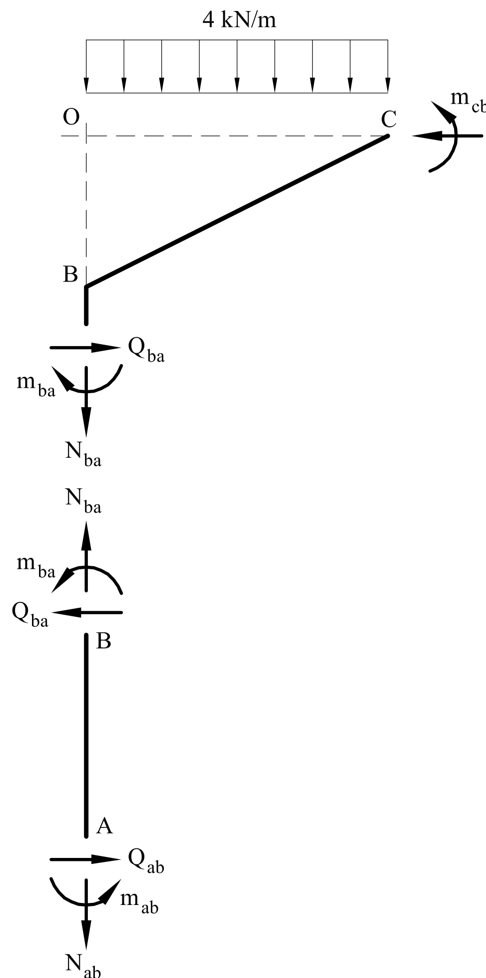


Fig.3 Equilibrio de esfuerzos cortantes

$$m_{cb} - m_{ba} + 3Q_{ba} - \frac{4 \times 6^2}{2} = 0$$

Es decir:

$$1{,}8268\, EI\, \varphi_b - 1{,}2356\, EI\, \delta + 84 = 0$$

Resolviendo el sistema

$$E\, I\, \varphi_b = -4{,}5677 \qquad\qquad E\, I\, \delta = 61{,}23$$

y sustituyendo en la expresión de los momentos

$$m_{ab} = -25{,}25\, kNm$$
$$m_{ba} = -27{,}52\, kNm$$
$$m_{bc} = 27{,}52\, kNm$$
$$m_{cb} = 4{,}89\, kNm$$

Problema 11.95 *En la estructura que se representa en la figura 1, determinar y dibujar las leyes de momentos flectores*

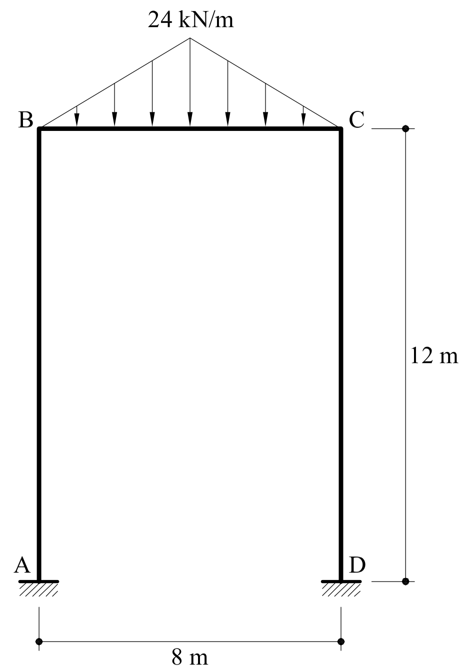


Fig.1 Pórtico correspondiente al problema 11.95

Solución

Se aplicará el método de las ecuaciones elásticas. Al ser el pórtico intraslacional y simétrico:

$$m_{bc}=\frac{2EI}{8}\left(2\varphi_b+\varphi_c\right)+\hat{m}_{bc}=\frac{2EI}{8}\left(2\varphi_b-\varphi_b\right)+80$$
$$m_{ba}=\frac{2EI}{12}\left(2\varphi_b+\varphi_a\right)+\hat{m}_{ba}=\frac{2EI}{12}\left(2\varphi_b+0\right)$$

La suma $m_{bc}+m_{ba}$ debe ser 0, es decir:

$$0=\frac{2EI}{8}\varphi_b+\frac{4EI}{12}\varphi_b+80$$

De donde se obtiene

$$EI\,\varphi_b=-137{,}14$$

Los momentos de extremo de barra valdrán:

$$m_{ab}=\frac{2EI}{12}\left(2\varphi_a+\varphi_b\right)+\hat{m}_{ab}=\frac{2EI}{12}\varphi_b=-22{,}9\ kN\,m$$

$$m_{ba} = \frac{2\,E\,I}{12} \cdot 2\,\varphi_b = -45{,}7\ kN\,m$$

$$m_{bc} = \frac{2\,E\,I}{8} \cdot \ \varphi_b + 80 = 45{,}7\ kN\,m$$

En la figura 2 pueden verse representadas las leyes de momentos flectores

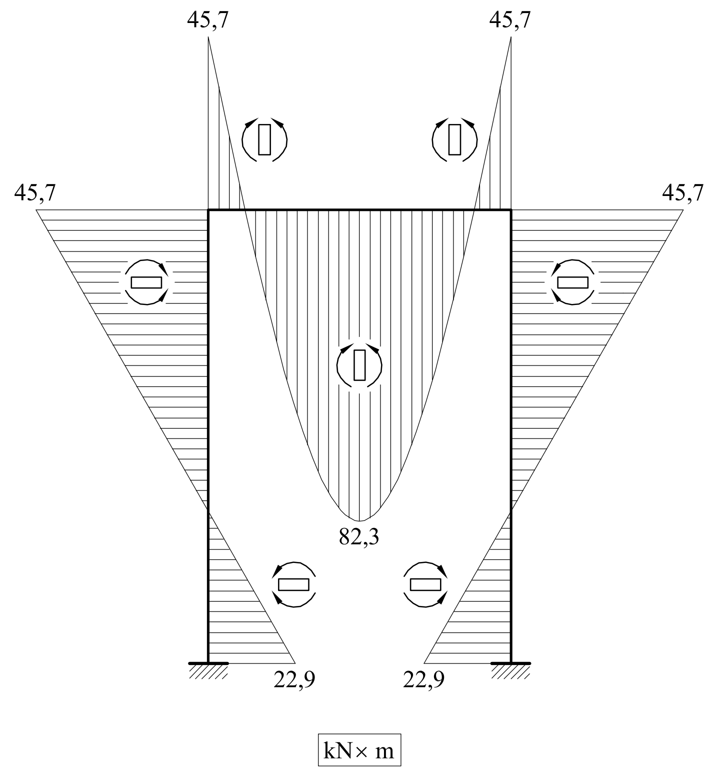


Fig.2 Ley de momentos flectores

Problema 11.96 *En la estructura que se representa en la figura 1, determinar los momentos de extremo de barra*

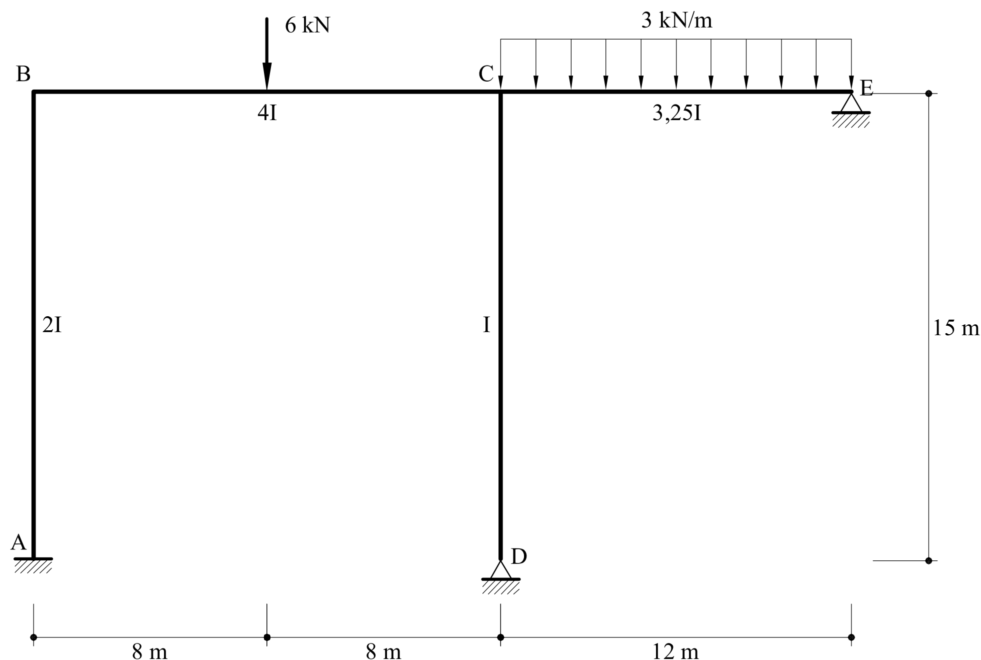


Fig.1 Pórtico correspondiente al problema 11.96

Solución

El pórtico es intraslacional, y se resolverá utilizando el método de las ecuaciones elásticas

$$m_{ba} = \frac{2E(2I)}{15}(2\varphi_b + \varphi_a) + \hat{m}_{ba} = \frac{8EI}{15}\varphi_b$$

$$m_{bc} = \frac{2E(4I)}{16}(2\varphi_b + \varphi_c) + \hat{m}_{bc} = EI\varphi_b + \frac{EI\varphi_c}{2} + 12$$

$$m_{cb} = \frac{2E(4I)}{16}(2\varphi_c + \varphi_b) + \hat{m}_{cb} = \frac{EI\varphi_b}{2} + EI\varphi_c - 12$$

$$m_{ce} = \frac{3E(3{,}25I)}{12}\varphi_c + \breve{m}_{ce} = \frac{9{,}75EI\varphi_c}{12} + 54$$

$$m_{cd} = \frac{3EI}{15}\varphi_c + \breve{m}_{cd} = \frac{3EI}{15}\varphi_c$$

Teniendo en cuenta que:

$$m_{ba} + m_{bc} = 0$$

$$m_{cb} + m_{ce} + m_{cd} = 0$$

se obtiene el sistema de dos ecuaciones:

$$1{,}5333\,E\,I\,\varphi_b + 0{,}5\,E\,I\,\varphi_c + 12 = 0$$
$$0{,}5\,E\,I\,\varphi_b + 2{,}0125\,E\,I\,\varphi_c + 42 = 0$$

Sistema que resuelto:

$$E\,I\,\varphi_b = -1{,}1108$$
$$E\,I\,\varphi_c = -20{,}5936$$

Sustituyendo en las expresiones correspondientes se obtienen los momentos de extremo de barra

$$m_{ab} = -0{,}296\,kN\,m$$
$$m_{ba} = -0{,}592\,kN\,m$$
$$m_{bc} = 0{,}592\,kN\,m$$
$$m_{cb} = -33{,}1\,kN\,m$$
$$m_{cd} = -4{,}12\,kN\,m$$
$$m_{ce} = 37{,}3\,kN\,m$$

Problema 11.97 *En el pórtico que se representa en la figura 1, hallar y dibujar las leyes de momentos flectores*

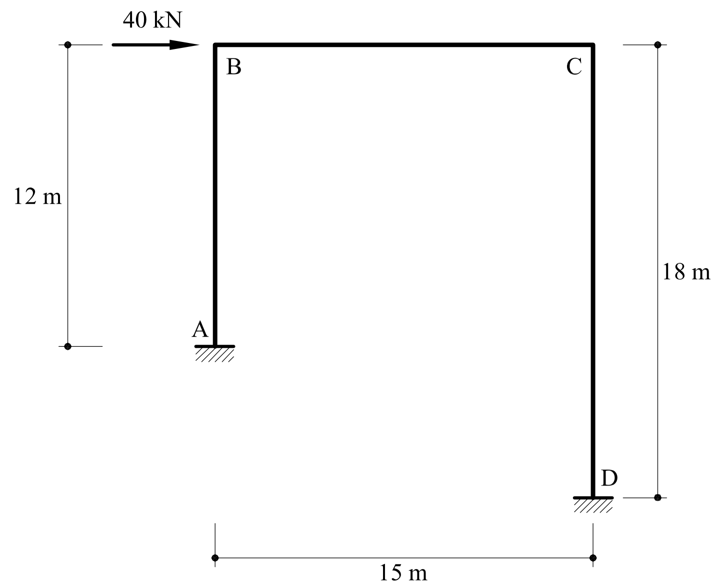


Fig.1 Pórtico correspondiente al problema 11.97

Solución

El pórtico es una vez traslacional. Los puntos *B* y *C* pueden trasladarse horizontalmente la misma magnitud δ (figura 2)

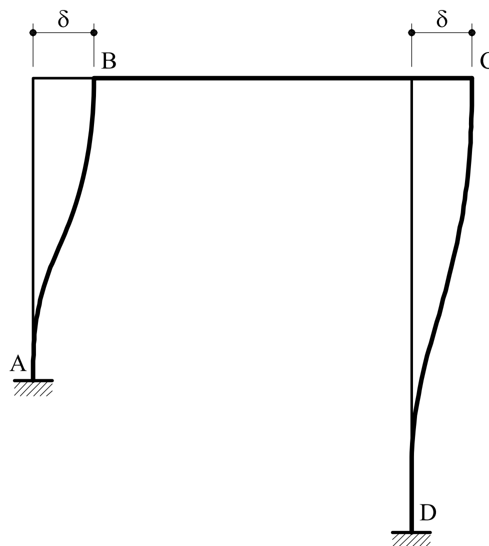


Fig.2 Traslaciones

Las ecuaciones elásticas se escriben:

$$m_{ab}=\frac{2EI}{12}\left(2\varphi_a+\varphi_b\right)+\hat{m}_{ab}+\frac{6EI\delta}{12^2}=\frac{2EI}{12}\varphi_b+\frac{6EI}{144}\delta$$

$$m_{ba}=\frac{2EI}{12}\left(2\varphi_b+\varphi_a\right)+\hat{m}_{ba}+\frac{6EI\delta}{12^2}=\frac{4EI\varphi_b}{12}+\frac{6EI}{144}\delta$$

$$m_{bc}=\frac{2EI}{15}\left(2\varphi_b+\varphi_c\right)+\hat{m}_{bc}=\frac{4EI\varphi_b}{15}+\frac{2EI\varphi_c}{15}$$
$$m_{cb}=\frac{2EI}{15}\left(2\varphi_c+\varphi_b\right)+\hat{m}_{cb}=\frac{2EI}{15}\varphi_b+\frac{4EI}{15}\varphi_c$$
$$m_{cd}=\frac{2EI}{18}\left(2\varphi_c+\varphi_d\right)+\hat{m}_{cd}+\frac{6EI\delta}{18^2}=\frac{4EI\varphi_c}{18}+\frac{6EI\delta}{324}$$
$$m_{dc}=\frac{2EI}{18}\left(2\varphi_d+\varphi_c\right)+\hat{m}_{dc}+\frac{6EI\delta}{18^2}=\frac{2EI}{18}\varphi_c+\frac{6EI\delta}{324}$$

Por equilibrio en los nudos *B* y *C*

$$m_{ba}+m_{bc}=0$$
$$m_{cb}+m_{cd}=0$$

Y sustituyendo se obtienen las dos primeras ecuaciones

$$0{,}6\,EI\varphi_b+0{,}1333\,EI\varphi_c+0{,}041667\,EI\delta=0$$
$$0{,}1333\,EI\varphi_b+0{,}489\,EI\varphi_c+0{,}01852\,EI\delta=0$$

La tercera ecuación se obtendrá realizando el equilibrio de esfuerzos cortantes (figura 3)

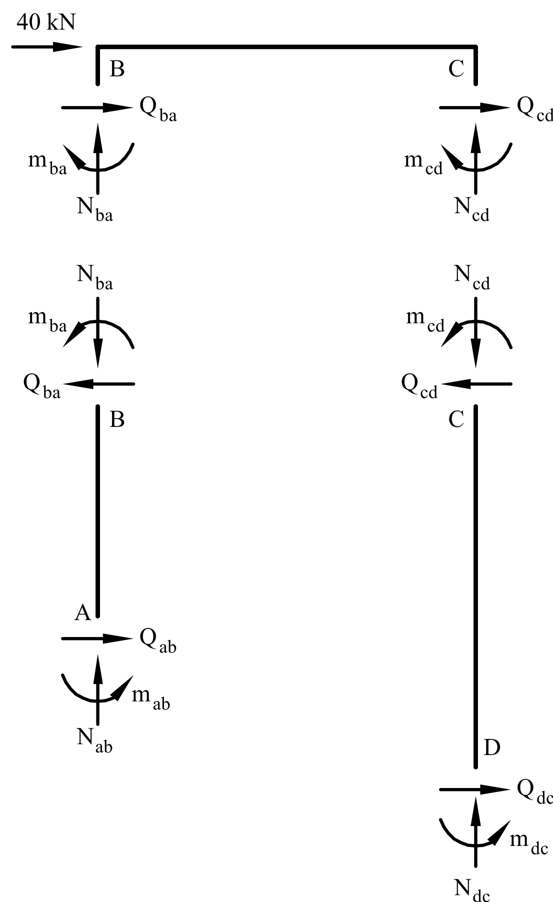


Fig.3 Esfuerzos en extremo de barra

Por equilibrio de fuerzas horizontales en el dintel:

$$Q_{ba} + Q_{cd} + 40 = 0$$

$$Q_{ba} = -\frac{m_{ba} + m_{ab}}{12} = -\frac{0,5EI\varphi_b + \frac{EI}{12}\delta}{12}$$

$$Q_{cd} = -\frac{m_{cd} + m_{dc}}{18} = -\frac{\frac{EI\varphi_c}{3} + \frac{EI}{27}\delta}{18}$$

O sea:

$$0,0416667EI\varphi_b + 0,018519EI\varphi_c + 0,009EI\delta = 40$$

Lo cual constituye la tercera ecuación.

Resolviendo:

$$EI\varphi_b = -439$$
$$EI\varphi_c = -136,2$$
$$EI\delta = -6757$$

Y sustituyendo en las expresiones de los momentos:

$$m_{ab} = 208,4 \quad kNm$$
$$m_{ba} = 135,2 \quad kNm$$
$$m_{bc} = -135,2 \quad kNm$$
$$m_{cb} = -94,7 \quad kNm$$
$$m_{cd} = 94,7 \quad kNm$$
$$m_{dc} = 110 \quad kNm$$